应用数学和力学，第17卷 第11期（1996年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

解二维抛物型方程的高精度差分格式

马明书[1]

（张鸿庆推荐，1996年6月2日收到）

摘　　要

本文构造了一个解二维抛物型方程的高精度三层显式差分格式，其稳定性条件为 $r=\Delta t/\Delta x^2=\Delta t/\Delta y^2\leqslant 1/4$，截断误差为$O(\Delta t^2+\Delta x^4)$。

关键词　高精度　显式差分格式　二维抛物型方程

一、引　　言

在渗流、扩散、热传导等很多领域，经常会遇到求解抛物型方程初边值问题．在二维情形，其模型问题为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} && (0<x,y<1,\ 0<t<T)\\
&u(x,y,0)=\varphi(x,y) && (0\leqslant x,y\leqslant 1)\\
&u(0,y,t)=\mu_1(y,t),\ u(1,y,t)=\mu_2(y,t) && (0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T)\\
&u(x,0,t)=\nu_1(x,t),\ u(x,1,t)=\nu_2(x,t) && (0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T)
\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

文[1]构造了两个解上述问题的高精度显式差分格式，但表达式都很繁杂，稳定性也有很多的限制条件，实际使用极为不便．本文构造的格式精度和[1]的格式相同，但表达式较[1]简单得多，稳定性的限制条件也大为放宽．

二、差分格式的构造

用如下含参数的差分方程逼近微分方程(1.1)

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12r}\right)\Delta u_{i,j}^{n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)\Delta u_{i,j}^{n-1}\right]$$
$$=\frac{1}{\Delta x^2}\left[\left(\frac{\theta_1}{2}\mathscr{F}+\theta_2\mathscr{L}\right)u_{i,j}^{n+1}+\left(\frac{\theta_3}{2}\mathscr{F}+\theta_4\mathscr{L}\right)u_{i,j}^{n}+\left(\frac{\theta_5}{2}\mathscr{F}+\theta_6\mathscr{L}\right)u_{i,j}^{n-1}\right]\tag{2.1}$$

其中　$u_{i,j}^n$表示在节点$(i\Delta x,j\Delta y,n\Delta t)$处的网格函数值，且

1　河南师范大学数学系，新乡　453002.

记

$$\Delta u^n_{i,j}=u^{n+1}_{i,j}-u^n_{i,j}$$

$$\mathscr{F}u^n_{i,j}=u^n_{i+1,j+1}+u^n_{i-1,j+1}+u^n_{i+1,j-1}+u^n_{i-1,j-1}-4u^n_{i,j}$$

$$\mathscr{L}u^n_{i,j}=u^n_{i+1,j}+u^n_{i-1,j}+u^n_{i,j+1}+u^n_{i,j-1}-4u^n_{i,j}$$

其余类推，$\theta_k(k=1\sim6)$为待定参数，适当选择这些参数，可以使(2.1)逼近(1.1)有尽可能高阶的离散误差，且有较好的稳定性。

当(1.1)的解充分光滑时，如下关系成立

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^q u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{p+q}u \qquad (p,q\text{为非负整数}) \tag{2.2}$$

将(2.1)中各节点上的u以其在节点$(i\Delta x,\ j\Delta y,\ n\Delta t)$处展开的 Taylor 级数代入，利用(2.2)并整理可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{12r}\Delta t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{6}\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+\cdots=\left(\sum_{k=1}^{6}\theta_k\right)\frac{\partial u}{\partial t}+(\theta_1+\theta_2-\theta_5-\theta_6)\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&+\frac{\Delta x^2}{12}\left(\sum_{k=1}^{6}\theta_k\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\Delta x^2}{12}[4(\theta_1+\theta_3+\theta_5)-2(\theta_2+\theta_4+\theta_6)]\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}\\
&+\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_5+\theta_6)\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+\frac{1}{12}\Delta t\Delta x^2(\theta_1+\theta_2-\theta_5-\theta_6)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\\
&+\frac{\Delta t\Delta x^2}{6}(2\theta_1-\theta_2-3\theta_3+\theta_5+\theta_6)\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}\right)\\
&+\frac{1}{360}\Delta x^4\left(\sum_{k=1}^{6}\theta_k\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+\frac{1}{360}\Delta x^4(12\theta_1-3\theta_2+12\theta_3-3\theta_4\\
&+12\theta_5-3\theta_6)\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}\right)+\cdots
\end{aligned}$$

欲使(2.1)的逼近阶达$O(\Delta t\Delta x^2+\Delta t^2+\Delta x^4)$（由于$O(\Delta t\Delta x^2)\leqslant\max\{O(\Delta t^2),O(\Delta x^4)\}$，这个逼近阶实为$O(\Delta t^2+\Delta x^4)$），只需下列诸方程同时成立

$$\sum_{k=1}^{6}\theta_k=1,\quad \theta_1+\theta_2-\theta_5-\theta_6=0,\quad 2(\theta_1+\theta_3+\theta_5)-(\theta_2+\theta_4+\theta_6)=0$$

解上方程组得

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_1=\theta,\ \theta_2=\eta,\ \theta_3=\frac{1}{3}-\theta-\omega,\ \theta_4=\frac{2}{3}-\theta-2\eta+\omega\\
&\theta_5=\omega,\ \theta_6=\theta+\eta-\omega
\end{aligned}\right\}$$

将以上各值代入(2.1)，则得如下的三参数三层高精度隐式差分格式

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12r}\right)\Delta u^n_{i,j}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)\Delta u^{n-1}_{i,j}\right]=\frac{1}{\Delta x^2}\left\{\left(\frac{\theta}{2}\mathscr{F}+\eta\mathscr{L}\right)u^{n+1}_{i,j}\right.\\
&+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\theta-\omega\right)\mathscr{F}+\left(\frac{2}{3}-\theta-2\eta+\omega\right)\mathscr{L}\right]u^n_{i,j}\\
&\left.+\left[\frac{\omega}{2}\mathscr{F}+(\theta+\eta-\omega)\right]u^{n-1}_{i,j}\right\}
\end{aligned}\tag{2.3}$$

在(2.3)中令$\theta=\eta=\omega=0$，则得一高精度三层显式差分格式

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12r}\right)u_{i,j}^{n+1}=\left(\frac{1}{6r}+\frac{r}{6}\mathscr{F}+\frac{2}{3}r\mathscr{L}\right)u_{i,j}^{n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)u_{i,j}^{n-1} \tag{2.4}$$

三、稳定性分析

方程(2.4)是一个三层格式，根据 R.D.Richtmyer 理论，对多层差分方程组，引进新的因变量，写出与之等价的两层方程组，然后研究其稳定性与(2.4)等价的两层方程组为

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12r}\right)u_{i,j}^{n+1}=\left(\frac{1}{6r}+\frac{r}{6}\mathscr{F}+\frac{2}{3}r\mathscr{L}\right)u_{i,j}^{n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)v_{i,j}^{n}\\&v_{i,j}^{n+1}=u_{i,j}^{n}\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

根据研究差分格式稳定的 Fourier 方法，令

$$u_{i,j}^{n}=\bar{u}^{n}\exp[I(p\pi x_i+q\pi y_j)],\quad v_{i,j}^{n}=\bar{v}^{n}\exp[I(p\pi x_i+q\pi y_j)] \tag{3.2}$$

其中　$I=\sqrt{-1}$．经过简单的计算可知如下关系式成立

$$\mathscr{L}u_{i,j}^{n}=-4A_1u_{i,j}^{n},\quad \mathscr{F}u_{i,j}^{n}=-8B_1u_{i,j}^{n} \tag{3.3}$$

其中　$A_1=S_1^2+S_2^2$，$B_1=S_1^2+S_2^2-2S_1^2S_2^2$，$S_1=\sin\frac{p\pi\Delta x}{2}$，$S_2=\sin\frac{q\pi\Delta y}{2}$

将(3.2)代入(3.1)并利用(3.3)可得

$$\begin{bmatrix}\bar{u}^{n+1}\\ \bar{v}^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-B/A & -C/A\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{u}^{n}\\ \bar{v}^{n}\end{bmatrix}$$

其中　$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{12r}$，$B=-\frac{1}{6r}+\frac{4}{3}rB_1+\frac{8}{3}rA_1$，$C=\frac{1}{12r}-\frac{1}{2}$．故得传播矩阵为

$$G(S_1^2,S_2^2)=\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-B/A & -C/A\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0$$

下面我们列出三个对稳定性证明十分有用的结果，作为引理．

引理1[2](Mckee)　实系数二次方程

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0\quad (A>0) \tag{3.4}$$

的两根按模小于等于1的充要条件是

$$A-C\geqslant 0,\quad A+B+C\geqslant 0,\quad A-B+C\geqslant 0 \tag{3.5}$$

引理2[3]　差分格式(3.1)稳定，即矩阵族$G^n(S_1^2,S_2^2)$ $(S_1^2,S_2^2\in[0,1],\ n=1,2,\cdots)$一致有界的充要条件是

(i) $|\lambda_{1,2}|\leqslant 1$(其中$\lambda_1$，$\lambda_2$为传播矩阵$G(S_1^2,S_2^2)$的特征方程的根)；

(ii) $N_0^1\left(\left(1-\frac{1}{4}|g_{11}+g_{22}|^2\right)\right)\cap N_0^1(|(g_{11}-g_{22})^2+4g_{12}g_{21}|)$

$$\subseteq N_0^1((g_{11}-g_{22})^2)\cap N_0^1(g_{12}^2)\cap N_0^1(g_{21}^2)$$

其中　$N_0^1(f(S_1^2,S_2^2))$表示多项式$f(S_1^2,S_2^2)$在[0,1]区间的所有实根的集合（重根要重复

计）.

定理 差分格式(2.4)稳定的充分条件是$r\leqslant 1/4$.

证明 (2.4)的传播矩阵的特征方程为(3.4)，我们需要检验(3.4)的两根按模是否不超过1. 根据引理1，此条件与(3.5)等价

$$
\left.\begin{aligned}
&A-C=1\geqslant 0\\
&A+B+C=\frac{4}{3}rB_1+\frac{8}{3}rA_1=\frac{4}{3}r(S_2^2+S_2^2-2S_1^2S_2^2+2S_1^2+2S_2^2)\geqslant 0\\
&A-B+C=\frac{1}{3r}-\frac{4}{3}r(3S_1^2+3S_2^2-2S_1^2S_2^2)\geqslant 0
\end{aligned}\right\}
$$

成立的充分条件是$r\leqslant 1/4$. 在此条件下，引理2的条件(i)成立. 下面来检验条件(ii)，因$g_{21}=1$，所以$N_0^1(g_{21}^2)$是空集，故条件(ii)成立的充要条件是使$1-\frac{1}{4}g_{11}^2=g_{11}^2+4g_{12}=0$成立的$S_1^2$，$S_2^2$或者不存在，或者不属于区间[0,1]. 由$1-\frac{1}{4}g_{11}^2=0$解得$g_{11}^2=4$，将其代入$g_{11}^2+4g_{12}=0$得$g_{12}=-1$，但$g_{12}=-C/A$，于是有$A=C$，即$\frac{1}{2}+\frac{1}{12r}=\frac{1}{12r}-\frac{1}{2}$，显然，使这个等式成立的$S_1^2$，$S_2^2$并不存在.

综上所述，当$r\leqslant 1/4$时，差分格式(2.4)稳定. 定理证毕.

特别地，当$r=1/6$时，我们得到另一个稳定的两层显式格式

$$
u_{i,j}^{n+1}=\left(1+\frac{1}{36}\mathscr{F}+\frac{1}{9}\mathscr{L}\right)u_{i,j}^{n} \tag{3.6}
$$

四、数值例子

考虑初边值问题

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (0<x,y<1,\ t>0)\\
&u(x,y,0)=\sin(x+y) \qquad (0\leqslant x,y\leqslant 1)\\
&u(0,y,t)=\exp[-2t]\sin y,\ u(1,y,t)=\exp[-2t]\sin(1+y) \qquad (0\leqslant y\leqslant 1,\ t\geqslant 0)\\
&u(x,0,t)=\exp[-2t]\sin x,\ u(x,1,t)=\exp[-2t]\sin(x+1) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),t\geqslant 0)
\end{aligned}\right\} \tag{4.1}
$$

利用本文格式(2.4)及(3.6)计算数值解.

为简便计，用(4.1)的精确解

$$
u(x,y,t)=\exp[-2t]\sin(x+y)
$$

计算第一层的值$u_{i,j}^1$，然后分别利用格式(2.4)及(3.6)计算到五十层的结果如表1和表2.

表1表明格式(2.4)的精度是很高的. 表2表明格式(3.6)的精度较格式(2.4)要低，但计算还是稳定的. 因此，两个格式的数值结果均与理论分析相符.

表1 $\Delta t=0.01$, $\Delta x=0.2$, $r=1/4$

(x,y)	格式 (2.4)	精确解
(0.2, 0.2)	0.143260	0.143259
(0.2, 0.4)	0.207722	0.207720
(0.2, 0.6)	0.263902	0.263901
(0.2, 0.8)	0.309561	0.309560
(0.4, 0.8)	0.342880	0.342878
(0.6, 0.8)	0.362528	0.362527
(0.8, 0.8)	0.367724	0.367723

表2 $\Delta t=0.0066\cdots$, $\Delta x=0.2$, $r=1/6$

(x,y)	格式 (3.6)	精确解
(0.2, 0.2)	0.201037	0.201271
(0.2, 0.4)	0.291457	0.291836
(0.2, 0.6)	0.370347	0.370767
(0.2, 0.8)	0.434595	0.434916
(0.4, 0.8)	0.481255	0.481726
(0.6, 0.8)	0.508841	0.509331
(0.8, 0.8)	0.516270	0.516631

参 考 文 献

[1] 曾文平，解二维抛物型方程的两个高精度显式差分格式，计算物理，9(4) (1992), 448—450.

[2] S. Mckee, A generalization of the Du Fort-Frakel scheme, *J. Inst. Maths. Applics*, (1) (1972), 42—48.

[3] 马驷良，二阶矩阵族$G^n(K,\Delta t)$一致有界的充要条件及其对差分方程稳定性的应用，高等学校计算数学学报，2(2) (1980), 41—53.

A High-Order Accuracy Explicit Difference Scheme for Solving the Equation of Two-Dimensional Parabolic Type

Ma Mingshu

(*Math. Dept. He'nan Normal University, Xinxiang, He'nan* 453002, *P.R.China*)

Abstract

In this paper, a three level explicit difference schemes with high order accuracy for solving the equations of two-dimensional parabolic type is proposed. The stablity condition is $r=\frac{\Delta t}{\Delta x^2}=\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\leqslant\frac{1}{4}$ and the truncation error is $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$.

Key words high-order accuracy, explicit difference scheme, equation of two-dimensional parabolic type