

准各向同性复合材料弹性和强度的各向异性效应(II)——应用与细观力学分析*

方辉宇¹ 郑泉水¹

(1996年3月20日收到)

摘 要

文献中尚未见到针对准各向同性复合材料的各向异性效应对复合材料结构影响的分析。本文在第(I)部分^[1]所提出的强度准则模型的基础上,给出了复合材料各向异性特性在含椭圆孔和单个裂纹问题中的具体应用。在椭圆孔问题中分析了远场载荷随材料几何参数变化的规律;在含裂纹问题中分析了裂纹扩展方向随裂纹方向的变化规律。最后,用细观力学方法分析了一类三轴编织复合材料的弹性本构方程和强度准则,以及各向异性效应,得到了与实验和第(I)部分理论模型相一致的结果。

关键词 准各向同性 椭圆孔 裂纹 各向异性效应 细观分析

一、含裂纹孔问题的各向异性效应

考虑一个含椭圆孔的三轴编织复合材料层合板,在边界上承受着远场应力 p ,如图1所示。从文[1]的表1可以看出多轴编织材料刚度各向异性程度上远低于强度,因此在下面的工作中我们将假设材料的弹性为各向同性的,而仅考虑强度各向异性效应对所研究问题力学性质的影响。

对于各向同性材料,我们知道沿椭圆孔边切向正应力 σ_t (如图1)的一般形式为^[3]:

$$\sigma_t(\theta) = p \frac{1 - m^2 + 2\cos 2\alpha - \cos 2\theta}{1 - 2m\cos 2(\theta - \alpha) + m^2} \quad (1.1)$$

其中 α 为椭圆孔长半轴与加载方向(x 轴)的夹角, θ 为所讨论的孔边任意点 A 与 x 轴的夹角,而 $m = (\lambda - 1)/(\lambda + 1)$ 为表征椭圆长短轴之比 $\lambda = a/b$ 的无尺度参数, a 和 b 分别为椭圆孔的长轴和短轴。当 $m = 0$ 或 $\lambda = 1$ 时椭圆孔变化为圆;而当 $m = 1$ 或 $\lambda = +\infty$ 时,椭圆退化成裂纹。

由本文第(I)部分的(3.18)式所提出的模型反映了三轴编织材料拉伸应力强度的各向异性规律,为便于分析,将公式重新写成下面的形式:

$$S_0 = \frac{Y}{\sqrt{1 + \xi \cos 6(\theta - \delta) + \zeta \cos 12(\theta - \delta)}} \quad (1.2)$$

其中 δ 代表一轴纤维方向与 x 轴的夹角。从第(I)部分的(3.20)式我们知道

* 国家自然科学基金和国家教委基金资助项目

¹ 清华大学工程力学系,北京 100084

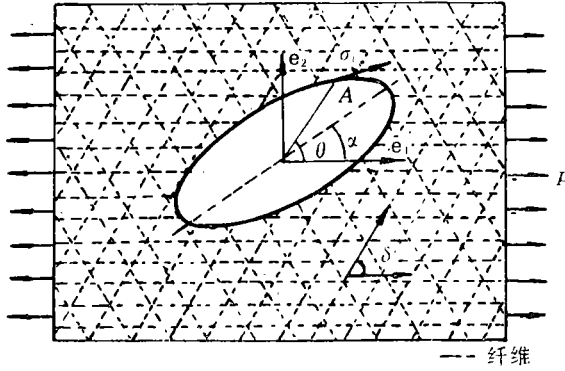


图1 含椭圆孔三轴编织复合材料板

$$Y=372\text{MPa}, \xi=-0.213, \zeta=-0.232 \tag{1.3}$$

由于式(1.1)表明 σ_t 与 p 呈线性关系, 远场应力在条件

$$\max\{\sigma_t(\theta)/S_0=1:0\leq\theta\leq 2\pi\} \tag{1.4}$$

下有极限 $p=p_0$.

三轴编织复合材料的平均强度为

$$\bar{S}=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} S_0 d\theta=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} Y/\sqrt{1+\xi\cos 6\theta+\zeta\cos 12\theta} d\theta=380.65\text{MPa} \tag{1.5}$$

当三轴编织复合材料被视为各向同性材料时, \bar{S} 可作为对应的各向同性强度. 于是(1.2)和(1.5)分别给出的是分别考虑六方向性和各向同性时的材料强度模型.

很显然远场应力极限与三个参数 α, λ, δ 有关, 即 $p_0=p_0(\alpha, \lambda, \delta)$. 远场应力极限 $p_0=p_0(\alpha, \lambda, \delta)$ 的上下界当 α 在 $[0, 2\pi)$ 范围之内分别记为 $p_{0M}(\lambda, \delta)$ 和 $p_{0m}(\lambda, \delta)$. 图2和图3分别给出了其随 λ 和 δ 变化时的情况, 并可以从中得到两个有趣的结果:

(a) 图2给出了当 λ 增加时(从圆向裂纹变化), 准各向同性和各向同性远场应力极限上界的比较. 两者的差别当 $\lambda \rightarrow +\infty$ 即转化到裂纹时趋近于14%. 而两者在远场应力极限下界上的差别则是不明显的, 这说明三轴编织复合材料的各向异性对远场应力极限的下界 p_{0m} 影响不大. 从而说明了对于本文所研究的复合材料, 可以通过优化设计来获得最好的材料强度性能.

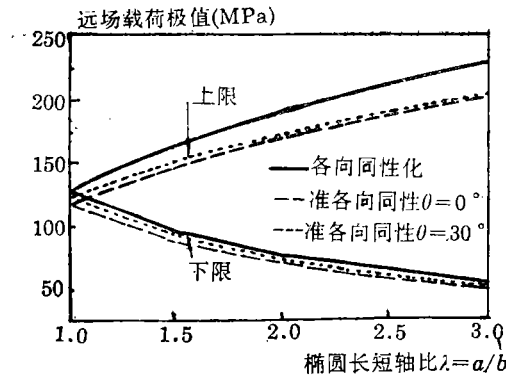


图2 远场载荷极值随 λ 的变化

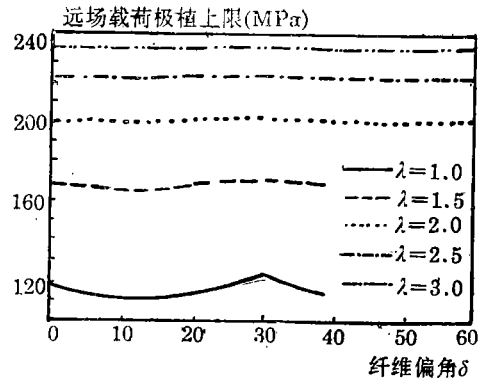


图3 远场载荷极值上限随 δ 的变化

(b) 图3显示了当 λ 增大时, 远场许用应力上界 p_{oM} 的各向异性效应变弱, $p_{oM} - p_{cm}$ 的差值变小. 在 $\delta = 30^\circ$ 时 p_{oM} 达到最大.

二、含裂纹问题的各向异性效应

考虑含单个裂纹三轴编织材料无限大平板承受着远场应力 p , 如图4所示. 为分析各向异性对裂纹扩展方向的影响, 我们仍假定三轴编织材料的刚度是各向异性的. 这样可以从诸如[4,5]的文献中给出 I 和 II 型应力强度因子的表示

$$K_I = \sqrt{\pi a} p \sin^2 \alpha, \quad K_{II} = \sqrt{\pi a} p \cos \alpha \sin \alpha \quad (2.1)$$

令 (r, θ) 表示图4中的极坐标系, 其在裂纹尖端 r 处的环向正应力分量 σ_θ 为^[4,5]:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I(1 + \cos \theta) - 3K_{II} \sin \theta] \quad (2.2)$$

裂纹扩展方向 $\theta = \theta_c$ 的判据可由

$$[\sigma_\theta(r, \theta) / S_\theta] |_{\theta = \theta_c} = \max_{-\pi < \theta < \pi} \{ \sigma_\theta(r, \theta) / S_\theta \} \quad (2.3)$$

的最大值给出, 其中 S_θ 为拉伸各向异性. 采用本文第(I)部分(3.18)式提出的模型并注意到纤维方向和 $\theta + \pi/2$ 之间的夹角为 $\theta + \alpha - \delta$, 我们得到

$$S_\theta = \frac{Y}{\sqrt{1 + \xi \cos 6(\theta + \alpha - \delta) + \zeta \cos 12(\theta + \alpha - \delta)}} \quad (2.4)$$

综合(2.1)到(2.4)式以及(1.3)所确定的参数值, 很容易看出裂纹扩展方向是 α 和 δ 的函数, 即(如图5所示):

$$\theta_c = \theta_c(\alpha, \delta) \quad (2.5)$$

在(2.4)式中当 $\xi = \zeta = 0$ 时的各向同性裂纹扩展方向 θ_c^{iso} 可写成

$$\begin{aligned} \theta_c^{iso} &= 2 \arctan \left(\frac{K_{II} - \sqrt{K_{II}^2 + 8K_I^2}}{4K_I} \right) \\ &= 2 \arctan \left[\frac{1 - \sqrt{1 + 7 \sin^2 \alpha}}{4} \tan \alpha \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

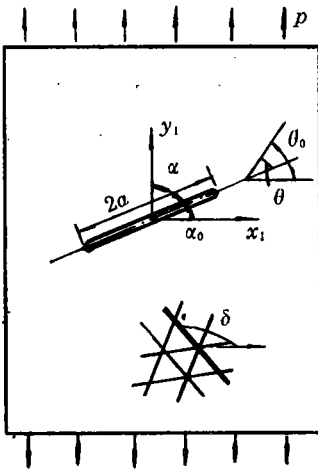


图4 含斜向裂纹三轴编织无穷大平板

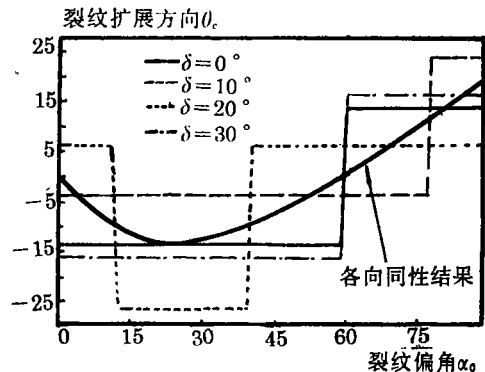


图5 准各向同性裂纹扩展方向

三、刚度和强度的细观力学分析

本节将根据整理在文[1]的表1中 Fujita 等人^[2]所提供的实验数据,从细观尺度出发具体分析三轴编织复合材料的结构特点.图6给出了一个代表性体积单元.复合材料中的编织纤维具有相互交错并离面起伏的特点. Swanson 及其合作者^[6~9]研究了多轴编织材料的强度特性,发现材料失效的主要原因是由于在离面角度最大的区域纤维体的破坏.由此现象出发,本节将通过一些简单的细观力学分析,具体研究材料刚度和强度的各向异性效应.

3.1 材料刚度的细观力学模型

参考 Chou 等的工作^[10],我们假定:(i)表示体元内应变均匀,(ii)纤维在拉伸过程中保持面内直线,和(iii)宏细观应变能等效.利用上述假设可以进行简单的刚度分析.然而由于纤维的离面起伏度 $H_s/L_0=0.45\%$ ^[2]非常小(如图7所示),纤维的离面应变变化部分是可以忽略不计的.从上述假设(iii)可以得出

$$\bar{E} = E_m(1 - V_f) + \frac{1}{3\varepsilon_0^2} \sum_{i=1,2,3} E_f V_f \varepsilon_i^2 \quad (3.1)$$

其中 s_i 为纤维长度, ε_0 为拉伸应变, ε_i 为面内 θ_i -方向的纤维应变,

$$E_m = 3.3\text{GPa}, E_f = 230\text{GPa}, V_f = 40\% \quad (3.2)$$

分别为基体和纤维的弹性模量^[2],以及纤维体积百分数.

根据假设(i)和(ii),我们可以得到 ε_i 和 ε_0 的关系:

$$\varepsilon_i = \sqrt{1 + 2(\cos^2\theta_i - \nu\sin^2\theta_i)\varepsilon_0 + (\cos^2\theta_i + \nu^2\sin^2\theta_i)\varepsilon_0^2} - 1 \quad (3.3)$$

其中 ν 为材料泊松比.通过文献所提供的实验数据我们得到,准各向同性复合材料的 ν 通常在0.3左右.为便于分析,我们假定 $\nu=0.30$.

综合(3.1)和(3.3)以及所提供的真实的材料参数(3.2),得到可三轴编织材料拉伸模量的细观分析结果.与文[1]的宏观分析结果(3.13)列于图8.

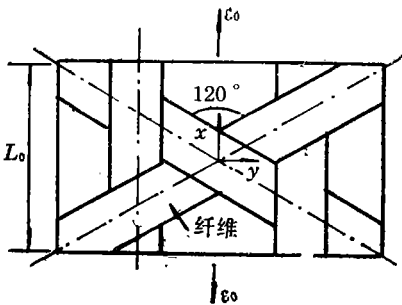


图6 三轴编织复合材料的表示体元 e

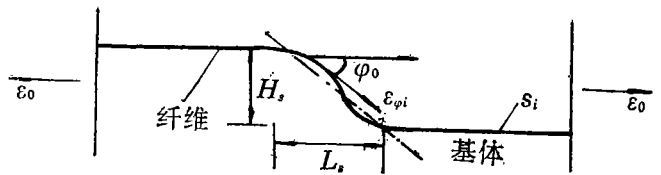


图7 表示体元中纤维的离面波动形态

3.2 材料强度的细观力学模型

由于纤维最大的离面起伏角度出现在三轴纤维交汇处附近,我们假设当交汇点附近的应变达到极限应变 ε_{fc} 时,材料整体即告失效.

在简单拉伸时,材料各纤维之间存在着一定程度的相互挤压,图9a给出了简化的纤维相

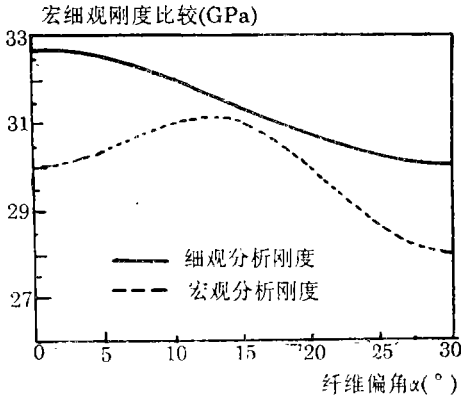


图8 宏观刚度随纤维偏角的变化

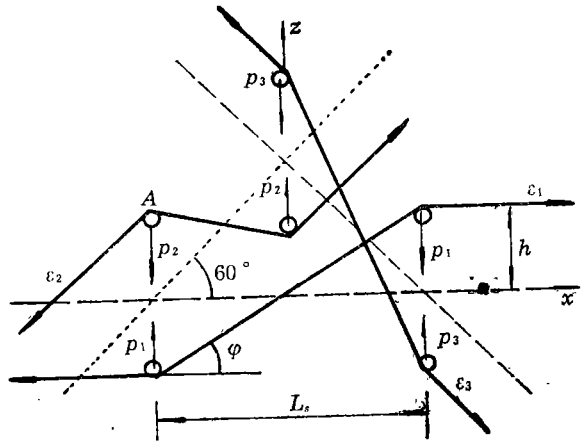


图9a 纤维之间相互作用的简化模型

互作用模型。在模型中我们忽略了纤维弯曲的影响以及纤维之间的摩擦。通过在特征点A处的平衡, 可得(如图9b)

$$P_i = E_m \varepsilon_i \tan \varphi_i \quad (i=1, \dots, 3) \quad (3.4)$$

进而我们假设纤维间相对位移 $h_{i,j}$ 和纤维间的挤压力 P_i 存在着关系

$$h_{i,j} = h(1 - P_j/P_i) \quad (i \neq j, i < j) \quad (3.5)$$

从而可求得在拉伸过程中交汇点附近纤维 $i=1$ 的离面偏角 φ_1

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{1}{4}(\sqrt{r^2 + 8r} - r) \tan \varphi_0\right) \quad (3.6)$$

其中 $r = \varepsilon_2/\varepsilon_1$, φ_0 为未加载时的交汇点附近的纤维最大离面角度(图9), 经简单分析可知 $\varphi_0 = 63^\circ$ (或 $\tan \varphi_0 = 2$)。

纤维应变的面内分量 ε_i 和实际纤维应变 ε_i^s 存在着关系 $\varepsilon_i = \varepsilon_i^s \cos^2 \varphi_i$ 。从而应力 σ_i 有

$$\sigma_s = E_m(1 - V_f) \varepsilon_0 + \frac{1}{3} \sum_{i=1,2,3} E_f V_f \frac{\varepsilon_i^2 \cos^4 \theta_i}{\varepsilon_0} \quad (3.7)$$

将式(3.3)代入(3.7), 我们可以得到拉伸强度 S_{cm} 的细观分析结果:

$$S_{cm} = \max\{\sigma_i; i=1, 2, 3; |\varepsilon_i| \leq \varepsilon_{cf}\} \quad (3.8)$$

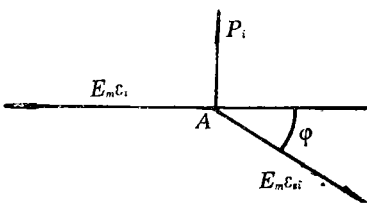


图9b A点力的平衡

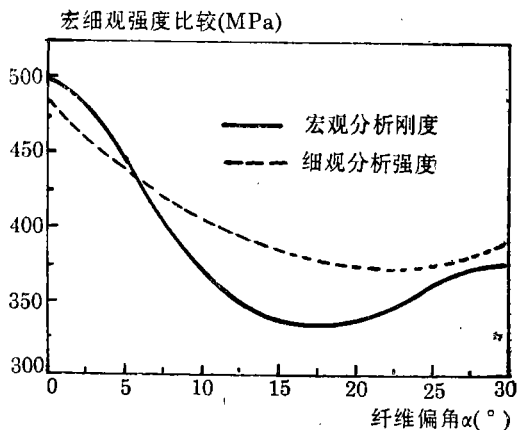


图10 宏观强度随纤维偏角的变化

其中 e_{cf} 代表纤维拉伸极限应变。细观力学模型(3.8)和第(I)部分的宏观分析模型(3.18)由图10给出。

参 考 文 献

- [1] 郑泉水、方辉宇, 准各向同性复合材料刚度和强度的各向异性效应(I)——模型, 应用数学和力学, 17(10) (1996), 869—878.
- [2] A. Fujita, H. Humada and Z. Mackawa, Tensile properties of carbon fibre tri-axial woven fabric composites, *J. Composite Materials*, 27 (1973), 1428—1442.
- [3] 张行主编, 《高等弹性力学》, 北京航空航天大学出版社 (1994).
- [4] 范天佑, 《断裂力学基础》, 江苏科学技术出版社 (1978).
- [5] 尹双增, 《断裂、损伤理论和应用》, 清华大学出版社 (1992).
- [6] R. B. Pipes and B. W. Cole, On the off-axis strength test for anisotropic materials, *J. Composite Materials*, 7 (1973), 246—256.
- [7] S. R. Swanson and B. C. Trask, Strength of quasi-isotropic laminates under off-axis loading, *Comp. Sci. & Tech.*, 34 (1989), 19—34.
- [8] S. R. Swanson and M. Nelson, Failure properties of carbon/epoxy laminates under tension-compression biaxial stress, in *Proc. 3rd Japan-US Conf. on Comp. Mater.*, Tokyo (1986).
- [9] S. R. Swanson, M. Messick and Z. Tian, Failure of carbon/epoxy laminates under combined stresses, *J. Comp. Mater*, 21 (1986), 619—630.
- [10] T. W. Chou and F. K. Ko, *Textile Structural Composites*, Elsevier Science Publishing Company, Inc. (1989), 357—365.

Anisotropic Effects of Quasi-Isotropic Composites(II) ——Applications and Micro-Mechanical Analysis

Fang Huiyu Zheng Quanshui

(Department of Engineering Mechanics, Qinghua University,
Beijing 100084, P. R. China)

Abstract

Up to now, the analysis on anisotropic effects of quasi-isotropic composites to material structures has not been found in literatures. In the present paper the strength model for triaxial woven materials proposed in Part(I)^[1] is applied to study the problems of an infinitely large plate of triaxial woven material containing either an elliptic hole or a crack. To the elliptic hole problem the remote critical loading as a function of the geometric parameters of woven materials is analysed, and to the crack problem, the cracking orientation is examined. Finally, the elasticity and strength models for a triaxial woven material proposed in Part(I) are verified in terms of micro-mechanical analysis.

Key words quasi-isotropy, elliptic hole, crack, anisotropic effects, micro-mechanical analysis