应用数学和力学，第17卷 第10期（1996年10月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

主轴内蕴法与高维张量方程$AX-XA=C^*$

梁 浩 云[1]

（郑泉水推荐，1996年3月6日收到）

摘 要

本文将主轴内蕴法推广到高维空间，并讨论了高维张量方程$AX-XA=C$的解。

关键词 主轴表示 主轴内蕴法 张量方程

一、引 言

Hill 的主轴法[1]为固体力学提供了一个有效的方法，使许多问题易于解决。郭仲衡教授及时地向我国读者详细介绍了这个方法[2]。但是，人们曾一度认为把主轴法得到的结果（主轴表示）转换为不依赖于坐标系的抽象表示是很困难的，这种情况限制了由主轴法得到的结果的进一步应用，因为对物理法则的一般特征的讨论要求所有的量都表示成抽象表示，而且对每一具体问题，以主轴方向为坐标曲线方向的坐标系在问题解决以前是未知的。在比较特殊情形的，郭先生应用 Hodged 对偶将相应的张量方程化为向量方程，得到了国际上称之为郭氏率定理的伸缩张量率的抽象表示[3,14]。

经过多年努力，郭教授带领我们终于发展出一种普遍适用的“主轴内蕴法”，它可内蕴地解决原来只能用主轴法解决的任何问题。方法命名的依据是：在解决过程中仍用了主轴法，而结果则是不再依赖于任何坐标系的内蕴表示。该方法的中心思想是：将问题归结为解张量方程问题；应用张量函数表示定理；在主标架下将问题转化为代数方程组问题；应用基于对称多项式基本定理的不变量算法最终得到抽象表示。应用这种普适的方法，我们已解决了有限变形理论中的多个基本问题[4~11]，其中很有意义的是给出连续介质基本主标架旋率的抽象表示[5]。众所周知，连续介质在每个典型点有三个与变形有关的基本主标架$\{e_i\}$：Lagrange标架，Euler标架和伸缩率标架，它们都是单位正交向量组，分别代表右伸缩张量，左伸缩张量和伸缩张量率的主方向。在运动过程中各标架相对于不动的背景标架转动的旋率分别称为 Lagrange 旋率，Euler 旋率和伸缩率标架旋率。长期以来人们认为速度梯度的反称部分即自旋就是伸缩率标架旋率，现已证实这是一种误解[12~13]。应用主轴内蕴法我们成功地将各种旋率都归结为同一种特殊类型的张量方程$AX-XA=C$的解，并得到该解的抽象表示[5]。郭仲衡教授生前一直在考虑把主轴内蕴法推广到高维向量空间，并提示我们

---

* 广东省科学基金资助项目

1 五邑大学数理系，广东江门 529020

从求解张量方程**AX**－**XA**＝**C**入手。本文正是试图实现郭先生生前的这一想法，以作为对郭先生的深切怀念。

二、主要结果

以伸缩率张量**D**（速度梯度**L**的对称部分）为例，它有谱分解

$$\mathbf{D}=\sum_i d_i\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i \tag{2.1}$$

将上式物质微商得到

$$\dot{\mathbf{D}}=\sum_i[\dot{d}_i\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i+d_i(\mathbf{\Omega}\mathbf{e}_i)\otimes\mathbf{e}_i+d_i\mathbf{e}_i\otimes(\mathbf{\Omega}\mathbf{e}_i)]=\sum_i\dot{d}_i\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i+\mathbf{\Omega}\mathbf{D}-\mathbf{D}\mathbf{\Omega} \tag{2.2}$$

或

$$\mathbf{D}\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}\mathbf{D}=\sum_i\dot{d}_i\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i-\dot{\mathbf{D}} \tag{2.3}$$

因此，旋率**Ω**满足张量方程

$$\mathbf{AX}-\mathbf{XA}=\mathbf{C} \tag{2.4}$$

这里**A**（给定），**C**（给定），和**X**（未知）都是二阶张量。**A**是对称的，**C**可以依赖于**A**。所有旋率(Lagrange 旋率，Euler 旋率，伸缩张量率旋率等）都满足(2.4)这同一类型的张量方程。

由于其广泛的应用背景，历史上具有形式为

$$\mathbf{AX}+\mathbf{XB}=\mathbf{C} \tag{2.5}$$

的矩阵方程曾是众多研究的对象，这里**A**和**B**分别是$m\times m$和$n\times n$矩阵[15~24]。但是，大多数研究中，解存在唯一的公共条件是**A**和－**B**没有公共的特征值，且解是表示为无穷级数、有限数列、围道积分、分量矩阵或伴随矩阵的形式。而方程(2.4)正好不满足这一条件。我们曾在文[5]中讨论过三维空间中的方程(1)的解的存在唯一性，下面把文[5]的结果推广到任意N维空间。

先假设N维空间中的二阶对称张量**A**的N个特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$互不相同，即

$$\Delta=(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)\cdots(\lambda_n-\lambda_1)\neq 0 \tag{2.6}$$

下面所有的分量形式都是在**A**的主标架$\{\mathbf{e}_i\}$给出的，即

$$\mathbf{A}=\sum_i\lambda_i\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i \tag{2.7}$$

$$\mathbf{X}=\sum_{i,j}x_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \tag{2.8}$$

$$\mathbf{C}=\sum_{i,j}C_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \tag{2.9}$$

引理1 齐次方程

$$\mathbf{AX}-\mathbf{XA}=0 \tag{2.10}$$

有一般解

$$\mathbf{X}=\alpha_1\mathbf{I}+\alpha_2\mathbf{A}+\cdots+\alpha_n\mathbf{A}^{n-1} \tag{2.11}$$

这里α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是任意的数值参量。

证明　(2.10)的分量形式是

$$X_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)=0 \tag{2.12}$$

等式(2.6)和(2.12)表明当$i\neq j$时$X_{ij}=0$，即$\mathbf{X}$有形式

$$\mathbf{X}=\sum_i x_i \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i \tag{2.13}$$

上式易改写成(2.11)的形式，将(2.11)与(2.13)的分量形式比较得

$$a_1+\lambda_i a_2+\cdots+\lambda_i^{n-1}a_n=x_i$$

由于(2.6)式，$\{a_1,\cdots,a_n\}$与$\{x_1,\cdots,x_n\}$是一一对应的.

引理2　在附加条件

$$[\mathrm{tr}\mathbf{X}]^2+[\mathrm{tr}(\mathbf{AX})]^2+\cdots+[\mathrm{tr}(\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{X})]^2=0 \tag{2.14}$$

下齐次方程(2.10)只有零解.

证明　条件(2.14)等价于

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{tr}\mathbf{X}=x_1+x_2+\cdots+x_n=0\\&\mathrm{tr}(\mathbf{AX})=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=0\\&\cdots\\&\mathrm{tr}(\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{X})=\lambda_1^{n-1}x_1+\cdots+\lambda_n^{n-1}x_n=0\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

(2.6)式表明上述方程组只有零解$X_1=X_2=\cdots=X_n=0$，即$\mathbf{X}=\mathbf{0}$.

引理3　张量方程

$$\mathbf{AX}-\mathbf{XA}=\mathbf{C} \tag{2.16}$$

至多只有一个满足(2.14)式的解$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})$，且它具有以下性质：

(1)　$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})$关于$\mathbf{C}$是线性的，

(2)　$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})$是$\mathbf{A}$和$\mathbf{C}$的各向同性张量函数，即对任意二阶正交张量$\mathbf{Q}$有

$$\mathbf{QX}(\mathbf{A},\mathbf{C})\mathbf{Q}^T=\mathbf{X}(\mathbf{QAQ}^T,\ \mathbf{QCQ}^T) \tag{2.17}$$

这里$\mathbf{Q}^T$表示$\mathbf{Q}$的转置.

证明　方程(2.16)至多只有一个满足附加条件(2.14)的解是引理2的直接结果.

从方程(2.16)的形式可直接看出解$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})$关于$\mathbf{C}$是线性的.

设$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})$满足

$$\mathbf{AX}(\mathbf{A},\mathbf{C})-\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{C} \tag{2.18}$$

用正交张量$\mathbf{Q}$和它的转置$\mathbf{Q}^T$分别左乘和右乘上式得到

$$(\mathbf{QAQ}^T)(\mathbf{QX}(\mathbf{A},\mathbf{C})\mathbf{Q}^T)-(\mathbf{QX}(\mathbf{A},\mathbf{C})\mathbf{Q}^T)(\mathbf{QAQ}^T)=\mathbf{QCQ}^T \tag{2.19}$$

在(2.18)式中以$\mathbf{QAQ}^T$和$\mathbf{QCQ}^T$代替$\mathbf{A}$和$\mathbf{C}$又得到

$$(\mathbf{QAQ}^T)\mathbf{X}(\mathbf{QAQ}^T,\ \mathbf{QCQ}^T)-\mathbf{X}(\mathbf{QAQ}^T,\ \mathbf{QCQ}^T)(\mathbf{QAQ}^T)=\mathbf{QCQ}^T \tag{2.20}$$

(2.19)与(2.20)两式相减并利用引理2即得到$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})$应满足各向同性条件(2.17).

由引理3我们直接可得

引理4　引理3中的解$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})$可分为两部分：

$$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})=\mathbf{X}\left(\mathbf{A},\ \frac{1}{2}(\mathbf{C}+\mathbf{C}^T)\right)+\mathbf{X}\left(\mathbf{A},\ \frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{C}^T)\right)$$

引理5　引理3中的解$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})$是对称（反对称）的，当且仅当方程右边的张量$\mathbf{C}$是反对称（对称）的.

证明　加(2.16)式的转置到(2.16)或从(2.16)减去其转置得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}\pm\mathbf{X}^T)-(\mathbf{X}\pm\mathbf{X}^T)\mathbf{A}=\mathbf{C}\mp\mathbf{C}^T$$

再用引理2即得结论.

引理6 条件

$$[\mathrm{tr}\mathbf{C}]^2+\cdots+[\mathrm{tr}(\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{C})]^2=0 \tag{2.21}$$

是方程(2.16)有解的必要条件.

证明 条件(2.21)等价于

$$\mathrm{tr}\mathbf{C}=0,\cdots,\mathrm{tr}(\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{C})=0$$

后式可由(2.16)分别左乘$\mathbf{I},\mathbf{A},\cdots,\mathbf{A}^{n-1}$并取迹得到.

于是我们有

定理 如果$\mathbf{A}$是对称的且$\mathbf{C}$满足(2.21)式，方程(2.16)有一般解

$$\mathbf{X}=\alpha_1\mathbf{I}+\cdots+\alpha_n\mathbf{A}^{n-1}+\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C}) \tag{2.22}$$

这里，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是任意参数，$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})$是满足引理3的特解.

由引理1，如果我们能找到一个特解$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})$，就可以得到方程(2.16)的一般解，而特解可用主轴内蕴法如下来选取:

第一步，由引理3知$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})$是$\mathbf{A}$和$\mathbf{C}$的各向同性张量函数，关于$\mathbf{C}$是线性的且满足条件(2.14). 由引理4我们可把方程(2.16)的右边分解为它的对称部分和反称部分.

对对称的$\mathbf{C}$,$\mathbf{A}$和$\mathbf{C}$的对称性保证能使用各向同性张量函数表示定理[25]，而关于$\mathbf{C}$的线性使表达式简化为形式:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})=&\beta_1(\mathbf{AC}-\mathbf{CA})+\beta_2(\mathbf{A}^2\mathbf{C}-\mathbf{CA}^2)+\cdots+\beta_{n-1}(\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{C}-\mathbf{CA}^{n-1})\\&+\beta_n(\mathbf{A}^2\mathbf{CA}-\mathbf{ACA}^2)+\cdots+\beta_{n(n-1)/2}(\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{CA}^{n-2}-\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{CA}^{n-1})\end{aligned} \tag{2.23}$$

这里$\beta_1,\cdots,\beta_{n(n-1)/2}$是$\mathbf{A}$的主不变量

$$\left.\begin{aligned}&I_1=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\\&I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\cdots+\lambda_n\lambda_1\\&\cdots\\&I_n=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

的函数.

而对反称的$\mathbf{C}$，我们要找的各向同性张量函数仍有上述形式，它将自动满足附加条件(2.14).

第二步，(2.16)和(2.23)在$\mathbf{A}$主标架下写成分量式得到

$$x_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)=C_{ij} \tag{2.25}$$

和

$$\begin{aligned}x_{ij}=&\beta_1C_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)+\cdots+\beta_{n-1}C_{ij}(\lambda_i^{n-1}-\lambda_j^{n-1})\\&+\beta_n\lambda_i\lambda_j(\lambda_i-\lambda_j)+\cdots+\beta_{n(n-1)/2}\lambda_i^{n-2}\lambda_j^{n-2}(\lambda_i-\lambda_j)\end{aligned} \tag{2.26}$$

由于(2.21)和(2.14)，当$i=j$时方程自动满足.由于(2.6)和$C_{ij}(i\neq j)$的任意性，比较(2.25)和(2.26)得到当$i\neq j$时

$$\beta_1+(\lambda_i+\lambda_j)\beta_2+\cdots+\lambda_i^{n-2}\lambda_j^{n-2}\beta_{n(n-1)/2}=\frac{1}{(\lambda_i-\lambda_j)^2} \tag{2.27}$$

因为由(2.6)保证上述线性方程组的系数行列式不为零，方程组(2.26)有唯一解. 于是得到用$\mathbf{A}$的特征值和$\mathbf{C}$的分量表示的$\beta_1\cdots$的表达式;

最后，由于方程组(2.27)关于$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$对称，它的解是$\lambda_1$，$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的齐次对称有理函数，利用对称多项式基本定理，解可表为基本对称多项式(2.24)的函数而得到$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})$的抽

象表示。

三、算　例

例如，在$N=4$的情形，经运算我们有

$$\mathbf{X}(\mathbf{A},\mathbf{C})=\beta_1(\mathbf{AC}-\mathbf{CA})+\beta_2(\mathbf{A}^2\mathbf{C}-\mathbf{CA}^2)+\beta_3(\mathbf{A}^3\mathbf{C}-\mathbf{CA}^3)$$
$$+\beta_4(\mathbf{A}^2\mathbf{CA}-\mathbf{ACA}^2)+\beta_5(\mathbf{A}^3\mathbf{CA}-\mathbf{ACA}^3)+\beta_6(\mathbf{A}^3\mathbf{CA}^2-\mathbf{A}^2\mathbf{CA}^3) \tag{3.1}$$

其中

$$\beta_1=\Delta^{-1}(-6I_1^4I_2I_4-4I_1^4I_3^2+5I_1^3I_2^2I_3+2I_1^3I_2I_4-I_1^2I_2^4+32I_1^2I_2^2I_4+18I_1^2I_2I_3^2+2I_1^2I_4^2$$
$$-22I_1I_2^3I_3-54I_1I_3^3-27I_1I_2I_3I_4+4I_2^5-28I_2^3I_4+27I_2^2I_3^2+48I_2I_4^2+54I_3^2I_4)$$

$$\beta_2=\Delta^{-1}(9I_1^5I_4-4I_1^4I_2I_3+I_1^3I_2^3-50I_1^3I_2I_4+4I_1^3I_3^2+17I_1^2I_2^2I_3+67I_1^2I_3I_4$$
$$-4I_1I_2^4-45I_1I_2I_3^2+52I_1I_2^2I_4-80I_1I_4^2+4I_2^3I_3-48I_2I_3I_4+27I_3^3)$$

$$\beta_3=\Delta^{-1}(-9I_1^4I_4+4I_1^3I_2I_3+47I_1^2I_2I_4-I_1^2I_2^3-18I_1I_2^2I_3$$
$$-60I_1I_3I_4+4I_2^4+27I_2I_3^2-40I_2^2I_4+96I_4^2)$$

$$\beta_4=\Delta^{-1}(3I_1^5I_3-3I_1^4I_4-16I_1^3I_2I_3+13I_1^2I_2I_4+5I_1^2I_2^3+20I_1^2I_3^2$$
$$+10I_1I_2^2I_3-52I_1I_3I_4-4I_2^4-15I_2I_3^2+8I_2^2I_4+32I_4^2-I_1^4I_2^2)$$

$$\beta_5=\Delta^{-1}(-3I_1^4I_3+3I_1^3I_4+I_1^3I_2^2+13I_1^2I_2I_3-16I_1I_2I_4-21I_1I_3^2$$
$$+4I_2^2I_3+48I_3I_4-4I_1I_2^3)$$

$$\beta_6=\Delta^{-1}(3I_1^3I_3+6I_1^2I_4-14I_1I_2I_3+4I_2^3-16I_2I_4+18I_3^2-I_1^2I_2^2)$$

且

$$\Delta=27I_1^4I_4^2-18I_1^3I_2I_3I_4+4I_1^3I_3^3+4I_1^2I_2^3I_4-I_1^2I_2^2I_3^2-144I_1^2I_2I_4^2+6I_1^2I_3^2I_4$$
$$+80I_1I_2^2I_3I_4-18I_1I_2I_3^3+192I_1I_3I_4^2-16I_2^4I_4+4I_2^3I_3^2+128I_2^2I_4^2$$
$$-144I_2I_3^2I_4+27I_3^4-256I_4^3$$

至于**A**有相同特征值的情形，例如$\lambda_1=\lambda_2$，我们可以在上述表达式中令$\lambda_1\longrightarrow\lambda_2$而取极限束得到（参见[5]）。

总之，主轴内蕴法对高维空间仍然是适用的，它的确是一种普适的有效的方法。

参 考 文 献

[1] R. Hill, Aspects of invariance in solid mechanics, *Adv. in Appl. Mech.*, 18(1)(1978).

[2] 郭仲衡, R.N.Dubey, 非线性连续介质力学中的“主轴法”，力学进展, 13(1)(1983).

[3] Guo Zhongheng, Rates of stretch tensors, *J. Elasticity*, 14(3)(1984), 263—267.

[4] 郭仲衡、梁浩云, 从主轴表示到抽象表示, 力学进展, 20(3)(1990), 303.

[5] 郭仲衡、梁浩云, 连续介质基本主标架旋率的绝对表示, 应用数学和力学, 12(1)(1991), 39.

[6] 郭仲衡, 梁浩云, 《主轴法的近期进展》, 兰州大学出版社 (1991).

[7] 郭仲衡, Th. Lehmann, 伸缩张量率的抽象表示, 力学学报, 23(6)(1991), 712.

[8] Guo Zhongheng, Th. Lehmann, Linag Haoyun and Chi-sing Man, Twirl tensors and the tensor equation $AX-XA=C$, *J. Elasticity*, 27(1992), 227.

[9] Guo Zhongheng, Th. Lehmann and Liang Haoyun, Further remarks on stretch tensors, *Transactions of the CSME*, 15(2)(1991), 6.

[10] Th. Lehmann, Guo Zhongheng and Liang Haoyun, The conjugacy between Cauchy stress and logarithm of the left stretch tensor, *Eur. J. Mech., A/Solids*, 10(4)(1991), 395.

[11] Th. Lehmann and Liang Haoyun, The stress conjugate to logarithmic strain $\ln V$, *ZAMM*, 73(12) (1993), 357.

[12] 郭仲衡, 连续介质的自旋和伸长率标架旋率, 应用数学和力学, 9(12) (1988), 1045—1048.

[13] 程莉、黄克智, 固化物质导数与标架旋率, 力学学报, 19 (1987), 524.

[14] A. Hoger and D. E. Carlson, On the derivative of the squeare root of a tensor and Guo's rate theorem, *J. Elasticity*, 14(3) (1984), 329.

[15] M. Wedderburn, On the linear matrix equation, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 22 (1904), 49.

[16] D. E. Rutherford, On the solution of the matrix equation $AX+XB=C$, *Nederl. Akad. Wtensch.. Proc., Ser. A*, 35 (1932), 53.

[17] W. E. Roth, The equations $AX-YB=C$ and $AX-XB=C$ in matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3 (1952), 392.

[18] M. Rosenblum, On the operator equation $BX-XA=Q$, *Duke Math. J.*, 23 (1956), 263.

[19] Ma Er-chieh, A finite series solution of the matrix equation $AX-XB=C$, *SIAM J. Appl. Math.*, 14 (1966), 490.

[20] R. A. Smith, Matrix equation $XA+BX=C$, *SIAM J. Appl. Math.*, 16 (1968), 198.

[21] A. Jameson, Solution of the equation $AX+XB=C$ by inversion of a $M\times M$ or $N\times N$ matrix, *SIAM J. Appl. Math.*, 16 (1968), 1020.

[22] P. Lancaster, Explicit solution of linear matrix equation, *SIAM Rev.*, 12 (1970), 544.

[23] P. C. Muller, Solution of the matrix equation $AX+XB=-Q$ and $S^TX+XS=-Q^*$, *SIAM J. Appl. Math.*, 18 (1970), 682.

[24] V. Kucera, The matrix equation $AX+XB=C$, *SIAM J. Appl. Math.*, 26 (1974), 15.

[25] A. J. M. Spencer, Theory of invariants, in *Continuum Physics*, Vol. 1. Ed. by A. C. Eringen, Academic Press, New York (1971), 239—353.

Principal Axis Intrinsic Method and the High Dimensional Tensor Equation AX-XA=C

Liang Haoyun

(*Wuyi University, Jiangmen, Guangdong* 529020, *P.R.China*)

Abstract

The present paper spreads the principal axis intrinsic method to the high-dimensional case and discusses the solution of the tensor equation **AX−XA=C**.

Key words principal axis representation, principal axis intrinsic method, tensor equation