应用数学和力学，第17卷 第10期（1996年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

退化抛物型方程与单侧约束系统

郭 兴 明[1]

（钱伟长推荐，1996年3月10日收到）

摘 要

本文讨论了一类非线性非自治多值的退化抛物型方程解的存在性和解的正则性等．它代表一类具非线性本构约束及不可微外约束的能量耗散的物理、力学和优化等问题．

关键词 抛物型方程 单侧约束 多值 解的存在性

一、引 言

经典连续介质热力学，半渗透壁及其温度控制等诸如此类问题的经典动态刻画均可等价地由如下变分不等方程描述[1]．

(P) 求$u(t,\cdot)$满足

$$\langle \dot{u}(t),\ v-u\rangle+a(u,v-u)+\Phi(v)-\Phi(u)\geqslant\langle f,v-u\rangle \qquad \forall v\in V$$

其中V是具自反结构的 Banach 空间，$a(u,v)=\langle A_0u,v\rangle(A_0\in L(V,V'))$是$V$上的强制非负对称的连续双线性型，$\Phi$是系统的约束函数，通常它是$V$上的下半连续凸函数．$A_0$的线性性一般由物质的线性本构约束所决定．(P) 也代表了一类优化控制问题[2]．但是我们知道，线性理论虽然具有某种普适性，能近似的解决一些理论和实际问题，但它只是一般理论的一种特殊情形，其理论基础及其适用范围有其局限性[3]．基于此，我们考察如下的一非线性非自治多值的退化抛物型方程

$$\dot{u}+A(t,u)+\beta(u)\ni f \tag{1.1}$$

$$u=u_0,\qquad x\in\Gamma \tag{1.2}$$

或者

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\partial\Phi(u)\ni g,\qquad x\in\Gamma \tag{1.3}$$

它代表了包括上述问题在内的更为广泛实际的一类物理、力学和优化等问题．其中$A:I\times V\to V'$是非自治非线性的，$\beta(u)=\partial j(u)$及$\partial\Phi$均是R^2中的极大单调图，$j:R\to R\cup\{+\infty\}$及$\Phi:R\to R\cup\{+\infty\}$是下半连续常态凸函数．通常$\beta$和$\partial\Phi$是施加给系统的不可微单侧约束．

若取$j(u)=k(u-h)$或者$\Phi(u)=m(u-r)$（这里h和r是不依赖于u的函数），那么它们分别表示Ω及其边界$\partial\Omega$上的延迟现象[4,5,6]，如延迟温度控制等．就主控方程而言（方程 (1.1) 中取$j=c$，$\beta=\{0\}$），它表示一类如变比热非各向同性的具非线性形式 Fourier 定律的热

1 上海大学，上海市应用数学和力学研究所，上海 200072

力学系统，多孔介质流体力学方程，磁流方程和一些能量耗散系统等[1,7,8]。

本文我们主要讨论由具有一般非线性非自治主控算子的多值的退化抛物型方程表示的单侧约束系统的解的存在性等。我们对此讨论的结果不仅包含了对经典问题的结论，主要从物理上（线性本构到非线性本构，自治到非自治）将经典模型推广到更一般形式[1,4,8]。

二、解的存在性

本文中我们只讨论方程(1.1)在(1.2)型边值约束下解的存在性，对于(1.3)型边值约束可无任何实质困难地得到类似结论。

记$\Psi=\int_\Omega j(v)d\Omega$。不失一般性可设$u_0=0$。那么方程(1.1)、(1.2)等价于如下不等方程

$$\langle\dot{u},\ v-u\rangle+\langle A(t,u),\ v-u\rangle+\Psi(v)-\Psi(u)\geqslant\langle f,\ v-u\rangle\qquad\forall v\in V$$

定理 设$V\subset H^1(\Omega)$是自反 Banach 空间，$H=L^2(\Omega)$，$1<p\leqslant 2$，$1/p+1/p'=1$，$I=[0,T]$，且

1. A在$I\times V$上有限维连续，

$$\langle A(t,u),\ u\rangle_{V'V}+\alpha\|u\|_H^2\geqslant c\|u\|_V^p+h(t),\quad c>0,\quad\alpha\geqslant 0,\qquad h\in L(I)$$

2. $v_n\xrightarrow{\text{弱}}v$ 在$L^p(I,V)\Rightarrow A(t,v_n)\xrightarrow{\text{弱}}A(t,v)$在$L^{p'}(I,V')$。

则对 $\forall u_0\in H$，存在$u\in L^p(I,V)\cap C(I,H)$，$\dot{u}\in L^{p'}(I,V')$，$g\in L^1(I\times\Omega)$使得$u(0)=u_0$

$$\dot{u}+A(t,u)+g=f,\quad g(t,x)\in\beta(u(t,x))\qquad \text{a.e在}I\times\Omega$$

此外，若存在$P:I\times V\to R$，$P(t,\cdot)$是凸函数($t\in I$)且$P'_v(t,v)=A(t,v)$，则上述u是如下不等式的解且解唯一。

$$\langle\dot{u},v-u\rangle+\langle A(t,u),v-u\rangle+\int_\Omega j(v)\,d\Omega-\int_\Omega j(u)d\Omega\geqslant\langle f,v-u\rangle,\qquad\forall v\in V,\text{a.e.}\,t\in I$$

证明 不失一般性，我们设$0\in\beta(0)$，取β的 Yosida 正则逼近$\beta_\lambda(\lambda>0)$，它是系数为$1/\lambda$的李氏映射，$\beta_\lambda(0)=\partial j_\lambda(0)$。取$V$之稠密基$\{e_i\}\subset V$，$\overline{\text{span}\{e_i\}}=V$，$(e_i,e_j)_H=\delta_{ij}$。

$$u_n=\sum_{i=1}^n\eta_i\,e_i\xrightarrow{H}u_0$$

对任意给定的$n,\lambda(\lambda>0)$，考察如下的初值问题

$$\dot{\xi}_\lambda^n=F_\lambda^n(t,\xi_\lambda^n)+g^n,\qquad\xi_\lambda^n(0)=\eta^n\tag{2.1}$$

其中

$$F_\lambda^n(t,\xi_\lambda^n)=\{F_{\lambda i}^n|i=1,2,\cdots,n\},\quad g^n=\{\langle f,e_i\rangle|i=1,2,\cdots,n\}$$

$$F_\lambda^n=-\langle A(t,\varphi_\lambda^n),\ e_i\rangle_{V'V}-\langle\beta_\lambda(\varphi_\lambda^n),\ e_i\rangle_{V'V},\ \xi_\lambda^n=\{\xi_{\lambda i}^n|i=1,2,\cdots,n\},\varphi_\lambda^n=\sum_{i=1}^n\xi_{\lambda i}^n e_i$$

由定理条件，(2.1)在$I_{n\lambda}=[0,T_{n\lambda}]$上有解($0<T_{n\lambda}\leqslant T$)。(2.1)也等价如下方程组

$$\begin{aligned}\langle\dot{\varphi}_\lambda^n,e_i\rangle_{V'V}=&-\langle A(t,\varphi_\lambda^n),e_i\rangle_{V'V}-\langle\beta_\lambda(\varphi_\lambda^n),e_i\rangle_{V'V}\\&+\langle f,e_i\rangle_{V'V}\qquad(i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\tag{2.2}$$

在(2.1)两边点乘ξ_λ^n

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_H^2+\langle A(t,\varphi_\lambda^n),\varphi_\lambda^n\rangle+\langle\beta_\lambda(\varphi_\lambda^n),\varphi_\lambda^n\rangle=\langle f,\varphi_\lambda^n\rangle$$

因$0\in\beta_\lambda(0)$，由β_λ的单调性

$$\langle\beta_\lambda(\varphi_\lambda^n),\ \varphi_\lambda^n\rangle_{V'V}=\langle\beta_\lambda(\varphi_\lambda^n),\varphi_\lambda^n\rangle_H=\int_\Omega\beta_\lambda(\varphi_\lambda^n)\cdot\varphi_\lambda^n d\Omega\geqslant 0$$

所以

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_H^2+\langle A(t,\varphi_\lambda^n),\varphi_\lambda^n\rangle\leqslant\langle f,\varphi_\lambda^n\rangle$$

积分上不等式并结合定理条件得到

$$\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_H^2+2c\int_0^t\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_V^p d\tau\leqslant 2\alpha\int_0^t\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_H^p d\tau+2\left(\int_0^t\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_V^p d\tau\right)^{1/p}\left(\int_0^t|f|_{V'}^{p'}d\tau\right)^{1/p'}$$

$$+\left\|\varphi_\lambda^n(0)\right\|_H^2-2\int_0^t hdt$$

利用 Cauchy 不等式

$$ab\leqslant\varepsilon^q a^q/q+\varepsilon^{-q'}b^{q'}/q',\quad 1/q+1/q'=1,\qquad\forall a,b\geqslant 0,\varepsilon>0,\quad q>1$$

$$\left(\int_0^t\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_V^p d\tau\right)^{1/p}\left(\int_0^t|f|_{V'}^{p'}d\tau\right)^{1/p'}\leqslant\varepsilon^p\left(\int_0^t\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_V^p d\tau\right)\Big/p+\varepsilon^{-p'}\left(\int_0^T|f|_{V'}^{p'}d\tau\right)\Big/p'$$

取ε足够小使得$\varepsilon^p/p\leqslant c/2$，那么

$$\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_H^2\leqslant\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_H^2+c\int_0^t\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_V^p d\tau\leqslant 2\alpha\int_0^t\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_H^p d\tau+C_1\qquad(C_1>0)$$

如果$p=2$，那么由 Gronwall 不等式得到

$$\left\|\varphi_\lambda^n(t)\right\|_H^2\leqslant C_1\exp(2\alpha t)$$

如果$1<p<2$，再由 Cauchy 不等式得到

$$\int_0^t\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_H^p d\tau\leqslant\left(\int_0^t\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_H^2 d\tau\right)^{1/r}\cdot T\leqslant\varepsilon_1^r\int_0^t\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_H^2 d\tau/r+\varepsilon_1^{-r'}\cdot T^{r'}$$

这里$r=2/p$，取ε_1足够小使得$\varepsilon_1^r/r\leqslant 1$，那么有

$$\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_H^2\leqslant 2\alpha\int_0^t\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_H^p d\tau+C_1\leqslant 2\alpha\int_0^t\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_H^2 d\tau+C_2\qquad(C_2>0)$$

由 Gronwall 不等式同样可得

$$\left\|\varphi_\lambda^n(t)\right\|_H^2\leqslant C_2\exp(2\alpha t)$$

这里C_1，C_2是不依赖于n，λ，$T_{n\lambda}$的正常数，因此

$$I_{n\lambda}=I,\quad\left\|\varphi_\lambda^n(t)\right\|_H\leqslant d_1,\quad\left(\int_0^T\left\|\varphi_\lambda^n\right\|_V^p d\tau\right)\leqslant d_2,\quad\int_0^T\left\|\dot\varphi_\lambda^n\right\|_{V'}^{p'}d\tau\leqslant d_3$$

d_1，d_2，d_3是与n，λ，$T_{n\lambda}$无关的正常数，从而存在子列

$$\{\varphi_\lambda^{nk}\}\subseteq\{\varphi_\lambda^n\},\quad\varphi_\lambda^0\in L^p(I,V),\quad\dot\varphi_\lambda^0\in L^{p'}(I,V')$$

使得

$$\varphi_\lambda^{nk}\xrightarrow{\text{弱}}\varphi_\lambda^0\text{在}L^p(I,V)$$

$$\dot\varphi_\lambda^{nk}\xrightarrow{\text{弱}}\dot\varphi_\lambda^0\text{在}L^{p'}(I,V')$$

$$\left\|\varphi_\lambda^{nk}-\varphi_\lambda^0\right\|_{L^{p'}(I,H)}\to 0\qquad(nk\to\infty)$$

但是

$$\left|\int_I \langle \beta_\lambda(\varphi_\lambda^{n_k}) - \beta_\lambda(\varphi_\lambda^0),\ \psi e_i \rangle_{V'V} dt\right| = \left|\int_I \langle \beta_\lambda(\varphi_\lambda^{n_k}) - \beta_\lambda(\varphi_\lambda^0),\ \psi e_i \rangle_H dt\right|$$

$$\leqslant \left\|\varphi_\lambda^{n_k} - \varphi_\lambda^0\right\|_{L^{p'}(I,H)} \cdot |\psi e_i|_{L^p(I,H)}/\lambda$$

在(2.2)中将n换成n_k两边同时乘$\psi\in L^p(I)$，积分并取极限($n_k\to\infty$)可得到

$$\dot{\varphi}_\lambda^0 + A(t,\varphi_\lambda^0) + \beta_\lambda(\varphi_\lambda^0) = f \qquad \text{在} L^{p'}(I,V') \text{意义下成立} \tag{2.3}$$

易知$\varphi_\lambda^0\in C(I,H)$，$\varphi_\lambda^0(0)=u_0(\forall\lambda>0)$，并且$\{\varphi_\lambda^0\}$是$L^p(I,V)$中的有界集，$\{\dot{\varphi}_\lambda^0\}$是$L^{p'}(I,V')$中的有界集，所以存在$\varphi\in L^p(I,V)$，$\dot{\varphi}\in L^{p'}(I,V')$及子集$\{\varphi_{n_k}^0\}\subseteq\{\varphi_\lambda^0\}$使得

$$\varphi_{n_k}^0 \xrightarrow{\text{弱}} \varphi \qquad \text{在} L^p(I,V)$$

$$\dot{\varphi}_{n_k}^0 \xrightarrow{\text{弱}} \dot{\varphi} \qquad \text{在} L^{p'}(I,V')$$

$$\left\|\varphi_{n_k}^0 - \varphi\right\|_{L^p(I,H)} \to 0 \qquad (k\to\infty),\ \varphi(0)=u_0$$

$$\varphi_{n_k}^0(t,x)\to\varphi(t,x) \qquad \text{a.e.在} I\times\Omega$$

由(2.3)及定理条件可进一步得到

$$\int_{I\times\Omega} j(\varphi(t,x))\,dtd\Omega < +\infty$$

因此$\varphi(t,x)\in\mathrm{dom}j$ a.e.在$I\times\Omega$.

记$J_\lambda=(1+\lambda\beta)^{-1}$，$J_\lambda$是非扩张算子且$J_\lambda(q)\to q$，当$q\in\mathrm{dom}j$. 因此

$$J_{nk}(\varphi_{n_k}^0)(t,x)\to\varphi(t,x), \qquad \text{a.e.在} I\times\Omega$$

容易证明

$$\int_{I\times\Omega} \beta_{nk}(\varphi_{n_k}^0)\cdot J_{nk}(\varphi_{n_k}^0)\,dtd\Omega$$

是有界的. 因此从[4]定理18知道存在$\{\varphi_{n_k}^0\}$的子列（仍然记为本身），$g\in L^1(I\times\Omega)$，使得

$$\beta_{nk}(\varphi_{n_k}^0) \xrightarrow{\text{弱}} g \qquad \text{在} L^1(I\times\Omega)$$

$$g(t,x)\in\beta(\varphi(t,x)) \qquad \text{a.e. 在} I\times\Omega$$

因此

$$\dot{\varphi} + A(t,\varphi) + g = f \qquad \{\text{在}\{L^\infty(I,L^\infty(\Omega))\cap L^2(I,V)\}'\text{意义下}\}$$

若 $A(t,h)=P'(t,h)$，且$P(t,\cdot)$是凸函数，则有

$$\int_I \langle A(t,\varphi_{n_k}^0),\ v-\varphi_{n_k}^0\rangle dt \leqslant \int_I \{P(t,v) - P(t,\varphi_{n_k}^0)\}dt$$

再由(2.3)我们得到

$$\int_I \langle \dot{\varphi}_{n_k}^0, v-\varphi_{n_k}^0\rangle dt + \int_I \{P(t,v)-P(t,\varphi_{n_k}^0)\}dt$$
$$+\int_{I\times\Omega}\{j(v)-j(J_{nk}(\varphi_{n_k}^0))\}dtd\Omega \geqslant \int_I \langle f, v-\varphi_{n_k}^0\rangle dt$$

利用函数的下半连续性容易证明下列不等式成立

$$\lim\sup\int_I \langle \dot{\varphi}_{n_k}^0, v-\varphi_{n_k}^0\rangle dt \leqslant \int_I \langle \dot{\varphi}, v-\varphi\rangle dt$$

$$\lim\inf\int_I P(t,\varphi_{n_k}^0)dt \geqslant \int_I P(t,\varphi)dt$$

$$\lim\inf\int_{I\times\Omega} j(J_{nk}(\varphi_{n_k}^0))\,dtd\Omega \geqslant \int_{I\times\Omega} j(\varphi)\,dtd\Omega$$

因此

$$\int_I \langle \dot{\varphi}, v-\varphi \rangle dt + \int_I \{P(t,v)-P(t,\varphi)\} dt + \int_{I\times\Omega} \{j(v) - j(\varphi)\} dt d\Omega \geqslant \int_I \langle f, v-\varphi \rangle dt \qquad \forall v \in L^p(I,V) \tag{2.4}$$

它等价于如下不等方程

$$\int_I \langle \dot{\varphi}, v-\varphi \rangle dt + \int_I \langle A(t,\varphi), v-\varphi \rangle dt + \int_{I\times\Omega} \{j(v)-j(\varphi)\} dt d\Omega \geqslant \int_I \langle f, v-\varphi \rangle dt \qquad \forall v \in L^p(I,V)$$

由上两不等方程容易得到

$$\langle \dot{\varphi}, v-\varphi \rangle_{V'V} + P(t,v) - P(t,\varphi) + \int_\Omega \{j(v)-j(\varphi)\} d\Omega - \langle f, v-\varphi \rangle \geqslant 0 \qquad \text{a.e. } t \in I, v \in V$$

$$\langle \dot{\varphi}, v-\varphi \rangle_{V'V} + \langle A(t,\varphi), v-\varphi \rangle_{V'V} + \int_\Omega \{j(v)-j(\varphi)\} d\Omega - \langle f, v-\varphi \rangle \geqslant 0 \qquad \text{a.e. } t \in I, v \in V$$

此时解的唯一性容易得到.

如果我们要讨论代表一类物理、力学和优化问题的主控平衡方程的解及其性态，只须在上面取$j=0$. 此时V可以是任一自反 Banach 空间，H是可分的 Hilbert 空间，只要V嵌入H中是连续且稠密的. 此时的解可以是更强意义下的解.

在上面的讨论中，我们对外约束β只要求 dom $\beta \neq \phi$. 另外我们用一个非自治非线性算子代替了自治线性算子（对于有势情形，相当于用一个适当的可微函数代替强制连续非负对称的双线性型）. 这使得我们所述的模型适用范围更加广泛实际. 我们以热力学方程为例简单说明.

在形变现象独立速度可以忽略的假设下连续介质热力学控制方程为

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \rho\omega - q_{i,i}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \mathrm{div}\sigma + f = 0$$

采用的特性定律:

$$e = c\theta, \quad q = -K \mathrm{grad}\ \theta, \qquad \sigma \text{不依赖温度}$$

$c>0$为比热，K是二阶（物质）张量. 在经典情形假设c和K只依赖于x（物质点）. 这和实际情况并不相符合. 尤其对K而言，对许多物质，K随温度显著变化. 在经典假设下，对各向同性物质，其热力学控制方程为

$$\dot{\theta} - k_0 \Delta\theta = g, \quad k_0 > 0 \text{ 是常数}, \qquad A_0\theta = -k_0 \Delta\theta$$

当K依赖温度或者考察的是非各向同性物质时，经典的方程不再适用. 此时的控制方程是

$$\dot{\theta} + A(\theta) = g, \quad A(\theta) = -(K(\theta)\mathrm{grad}\theta)\cdot\nabla$$

然而当K依赖于温度（比如线性增长情形）或者是各向异性物质时，只要施加适当的条件，仍在我们所述的框架中. 不难看出，我们的讨论不仅包含了经典模型，而且可以在更弱的条件下得到经典解的存在、唯一的结论.

参 考 文 献

[1] G. Duvaut and J. L. Lions, *Inequalities Problems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag (1976).

[2] J. L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential*

Equation, Springer-Verlag (1971).

[3] 郭仲衡,《非线性弹性理论》, 科学出版社 (1980).

[4] I. D. Mayergoyz, *Mathematical Models of Hysteresis*, Springer-Verlag, Berlin (1991).

[5] J.W.Macki, P.Nistri and P. Zecca, Mathematical models for hysteresis, *SIAM Rev*, 35 (1993), 94—123.

[6] U.Hornung and R.E.Showalter, PDE models with hysteresis on the boundary, in *Models of Hysteresis, Pitman Research Notes in Mathematics* 286, A.Visintin ed., Longman Scientific and Technical, Harlow, U.K. (1993), 30—38.

[7] Knops, *Nonlinear Analysis and Mechanics*, Vol. Ⅳ, Pitman Adv Publishing Program (1979).

[8] H. Brezis, monotonicity methods in Hilbert space and some application to non-linear partial differential equations, in *Contribution to Nonlinear Functional Analysis*, Ed, by E.H.Zarautonelle Academic Press, New York (1971),101—156.

Degenerate Parabolic Equation and Unilateral Constraint Systems

Guo Xingming

(*Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai* 200072, *P.R.China*)

Abstract

In this paper the existence and regularity of solution to a nonlinear and nonautonomous multivalued parabolic equation, which represents some energy dissipative problems with nonlinear constitutive constraints and nondifferential external constraints in physics, mechanics and optimization.

Key words parabolic, multivalued, unilateral constraint, existence of solution