应用数学和力学，第17卷 第10期（1996年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

纤维丛上一般非线性控制系统的几何框架及其最小实现理论*

慕 小 武[1]

（郑泉水推荐，1996年3月20日收到）

摘 要

本文探讨正确建立一般非线性控制系统纤维丛框架的途径，并研究了纤维丛上系统的最小实现理论。我们在本文中通过引进$(F,\ \varphi)$同构，$(F,\ \varphi)$同态，φ-强等价等新概念，实质上拓广了H. J. Sussmann所发展的非线性系统实现理论的经典概念和结果，并证明了纤维丛上的一般非线性系统的最小实现唯一性定理。

关键词 纤维丛 能观性 能控性 最小实现

一、引 言

1976年与1983年，R. W. Brockett在[1, 2, 16]中通过对若干具体问题的分析，指出一般非线性控制系统理论应该是建立在纤维丛上。此后，J. C. Willems, A. J. Van der Schaft, Nijmeijer 相继在一系列文章及在其专著[3～8]中，为探讨正确建立一般非线性控制系统的纤维丛框架并发展其相应的理论（能控性、能观性、最小性，控制不变性和解耦等）做了持续的工作。但就其框架来讲，始终是不完善的，这表现在当在这些框架下进行动力学分析和理解非线性控制的一些基本问题（诸如能观、能控性及实现理论等）时，出现了基本的困难和矛盾。一些经典的概念和结构均不成立[3~8]。本文将在分析前人工作的基础上，探讨建立正确几何框架的途径，并发展其相应的理论。

人们通常理解的一般非线性系统[1~16]，是指$\Sigma(M,\ U,\ f,\ N,\ h)$，其中$M$，$N$为光滑流形，$U\subset R^m$为子集，$h:M\to N$光滑映射，称为输出映射。$\forall u\in U$，$f(\cdot,\ u)$为$M$上光滑的向量场。局部坐标下系统的动态方程可写为

$$\Sigma:\ \begin{cases}\dot{x}=f(x,\ u), & u\in U\\ y=h & x\in M,\ M\text{称为状态空间}\end{cases}\tag{1.1}$$

一般地u也可选为一个可测映射$I\to U$，$I\subset R^1$为区间。此时规定$f(u,\ u(t))$为M上依赖于时间的向量场。$\Omega\triangleq\{\sigma:I\to U\text{可测}\mid I,\ U\text{同上}\}$称为系统的控制集。

---

* 国家自然科学青年基金与河南省自然科学资金资助课题

1 郑州大学系统科学与数学系，郑州 450052

R. W. Brockett在[1]中通过对若干力学非线性系统的结构分析，指出非线性系统的一般几何框架应是建立在纤维丛上。

Brockett的基本思想[1,2,16]:

(1) 引入输入一状态纤维丛$E\xrightarrow{\pi}M$，称M为状态空间，M中任一点x的纤维$\pi^{-1}(x)$称为x点的容许控制空间。

(2)一个一般的非线性系统可表述为$\Sigma(E\xrightarrow{\pi}M,\ f,\ Y,\ h)$，其中$E\xrightarrow{\tau}M$为光滑纤维丛，$Y$为流形称为输出空间（观测空间）$h:M\to Y$及$f:E\to TM$为光滑映射并使下图交换

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & TM \arrow[dl, "\tau_{M}"] \\ & M & \end{tikzcd} \qquad TM\to M\text{为投影} \tag{1.2}$$

Brockett认为上述交换图在局部坐标下可表示为动力学方程$\dot{x}=f(x,\ u)$，从而得到Σ的局部动态方程表示

$$\Sigma:\ \begin{cases}\dot{x}=f(x,\ u) & (1.3)\\ y=h(x) & (1.4)\end{cases}$$

当$E=M\times\boldsymbol{R}^m$为平凡丛时，即刻画了系统(1.1)。

(A) R. W. Brockett提出的几何框架存在着一些基本的数学上的不完善地方，从(1.2)的可交换关系所得到的$\dot{x}=f(x,\ u)$不能视为动力学方程。它只是f在自然丛卡下纤维坐标的局部表示，它本身并没有任何动力学因素。系统的动态方程应源自于向量场。

(B) A. Van der Schaft在[8]中讨论了纤维丛上一般非线性控制系统的能观性、能控性与最小性，文献[8]中所给出的结论只有局部的意义。在文献[8]、[3]中，一些经典的结论均不成立（如能观、能控性的秩条件，最小实现定理等），且在讨论最小实现理论时遇到了基本的困难和矛盾。

(C) 在文献[3]～[8]中，他们实际上都在用由局部截面诱导的向量场这一概念。但如何在一般几何框架中体现出来，均没有给以认识。我们下面将建立起非线性系统更一般的完善的纤维丛框架，并发展整体实现理论。

二、一般非线性控制系统的新几何框架

我们在这一节中将吸取R. W. Brockett的合理思想，建立更一般非线性控制系统的合理框架。

给定纤维丛$E\xrightarrow{\pi}M$，$\forall$开集$V\subset M$，$\Gamma(V,\ E)\triangleq\{\gamma\mid\pi\circ\gamma=id,\ \gamma:\ V\to E\,C^{\infty}\text{映射}\}$，$\Gamma_{\mathrm{loc}}\triangleq\bigcup\limits_{V\subset M\text{开}}\Gamma(V,\ E)$表示$M$上所有局部截面集合。$\mathscr{X}_{\mathrm{loc}}(M)$表示$M$上所有局部向量场集合。

定义2.1　设$U\subset\Gamma_{\mathrm{loc}}$，称$U$为**处处定义**的，如果$U$满足$\bigcup\limits_{\theta\in U}\mathrm{Domain}(\theta)=M$，这儿Domain$(\theta)$表示局部截面$\theta$的定义域。有时也简记$D(\theta)$。

定义2.2 设$\mathscr{A}\subset\mathscr{X}_{\mathrm{loc}}(M)$为局部向量场集，称$\mathscr{A}$为**处处定义**的，如果$\mathscr{A}$满足$\bigcup\limits_{X\in\mathscr{A}}D(X)=M$。

定义2.3 $\forall U\subset\Gamma_{\mathrm{loc}}(M,\ E)$，$f$：$U\to\mathscr{X}_{\mathrm{loc}}(M)$为一映射，称$f$为**协调**的，如果

(1) $\forall\theta\in U$，$D(f(\theta))=D(\theta)$；(2) 下图可交换

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f(\theta)"] \arrow[d, "\theta"'] & TM \arrow[d, "\tau_M"] \\ E \arrow[r, "\pi"'] & M \end{tikzcd}$$

(3) $\forall\theta_1,\theta_2\in U$，$\forall V\subset M$开集，若$\theta_1|_V=\theta_2|_V$，则$f(\theta_1)_V=f(\theta_2)|_V$。

命题2.1 设$(f,\ U)$为协调的，则$\forall U'\subset U$，$(f|_{U'},\ U')$也是协调的。

证明 直接验证，略。 □

定义2.4 一个控制系统是指$\Sigma(E\xrightarrow{\pi}M,\ f,\ U,\ Y,\ h)$，其中$E\xrightarrow{\pi}M$为纤维丛，称$E$为输入—状态丛，$M$称为状态空间。$\forall x\in M$，称$\pi^{-1}(x)$为$\Sigma$在$x$处的输入空间。$U\subset\Gamma_{\mathrm{loc}}(E,M)$为**处处定义**的局部截面集，并称$U$为控制集。$f:U\to\mathscr{X}_{\mathrm{loc}}(M)$为**协调映射**。$Y$也为微分流形，称为观测空间，$h:M\to Y$为**输出映射**。令$\mathscr{F}_0^{\Sigma}=\{f(\theta)\,|\,\theta\in U\}$称$\mathscr{F}_0^{\Sigma}$为与$\Sigma$相联系的向量场集。

注2.1 我们在定义中更一般地选取U为局部截面集合，是因为一般的纤维丛未必有整体截面。

注2.2 令$\mathscr{F}_0^{\Sigma}$表示由$\mathscr{F}_0^{\Sigma}$生成的Lie代数，称$\mathscr{F}^{\Sigma}$为与Σ相联系的Lie代数。

注2.3 设$E=M\times R^m$为平凡丛，$\forall u\in R^m$决定了一个截面$\theta_u:M\to E$，$\theta_u(x)=(x,u)\in E,\forall x\in M$，取$U=\{\theta_u\,|\,u\in\mathbf{R}^m\}$，并记$f_{\theta_u}\triangleq f_u$，取$Y$，$h$如定义2.4，这样我们就得到了由一族向量场$\{f_u\}_{u\in R^m}$决定的控制系统[12]如(1—1)。

命题2.2 $F:E\to TM$，满足

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & TM \arrow[dl, "\tau_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

可交换

设f为由F诱导的映射：$f:\Gamma_{\mathrm{loc}}(M,\ E)\to\mathscr{X}_{\mathrm{loc}}(M)$

$$\forall\theta\in\Gamma_{\mathrm{loc}}(M,\ E),\ f(\theta)=F\circ\theta:M\to TM$$

则$\Sigma(E\xrightarrow{\pi}M,\ f|_U,\ U,\ Y,\ h)$为一控制系统，这儿$U\subset\Gamma_{\mathrm{loc}}(M,E)$如定义2.4。

证明 直接验证$f|_U$满足**协调性**条件即可，略。

注2.4 我们这里所给出的结果可看成是对R. W. Brockett框架的修正，但是也有显著的不同，我们这儿展示的更合理和严格化了，系统的动态方程源自于向量场。此外，我们首次在纤维丛框架下把控制集看成一个局部截面集。我们也是第一次对纤维丛上控制系统区分出了控制集与输入空间，并注意到了如何整体地给出一个输入（即通过截面的方法），这是原来的框架所没有做到的。

定义2.5 设$E\xrightarrow{\pi}M$纤维丛，Γ_{loc}意义同前。$U\subset\Gamma_{\mathrm{loc}}$为子集，$f:U\to\mathscr{X}_{\mathrm{loc}}(M)$为映射。我们称$(f,\ U)$为**强协调对**，如果满足

（1）f为协调的；

（2）U为满的，即$\bigcup\limits_{\theta\in U}\{\theta(x)\mid x\in\mathrm{Domain}(\theta)\}=E$；

（3）$\forall\theta_1,\theta_2\in U$，$\forall x\in D(\theta_1)\cap D(\theta_2)$，若$\theta_1(x)=\theta_2(x)$，则$f(\theta_1)(x)=f(\theta_2)(x)$；

注2.5 若(f,U)为强协调对，则U一定是**处处定义**的，这由性质2可立得。

命题2.3 (f,U)为强协调对的充分必要条件是，存在f到$\Gamma_{\mathrm{loc}}(M,E)$上的唯一扩张$\tilde{f}$：$\Gamma_{\mathrm{loc}}(M,E)\to\mathscr{X}_{\mathrm{loc}}(M)$，使满足：（Ⅰ）$\tilde{f}$也是协调的，且$\tilde{f}|_U=f$；（Ⅱ）存在唯一的光滑映射$F$：$E\to TM$，使图

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & TM \arrow[dl, "\tau_M"] \\ & M & \end{tikzcd} \quad \text{可交换} \tag{2.1}$$

（Ⅲ） $$\forall\theta\in\Gamma_{\mathrm{loc}}(E),\ \tilde{f}(\theta)=F\circ\theta\in\mathscr{X}_{\mathrm{loc}}(M) \tag{2.2}$$

证明 充分性是显然的，我们下面只证必要性。假定(f,U)为强协调对，我们先构造一个光滑映射F：$E\to TM$满足交换关系。

$\forall z\in E$，由U的条件知$\exists\,\theta\in U$，使$z=\theta(\pi(z))$，定义$F(z)\overset{\Delta}{=}f(\theta)(\pi(z))\in TM$，由$(f,U)$是强协调的，可知$F$的定义与$\theta$的选取无关，且$F$满足交换关系。$F$的光滑性由$f$，$\theta$，$\pi$的光滑性可立得。利用$F$可定义一个映射$\tilde{f}$：$\Gamma_{\mathrm{loc}}(M,E)\to\mathscr{X}_{\mathrm{loc}}(M)$，$\tilde{f}(\theta)\overset{\Delta}{=}F\circ\theta$，$\forall\theta\in\Gamma_{\mathrm{loc}}$。

由命题2.2可知$\tilde{f}$为协调的，再由F的定义可知$\tilde{f}|_U=f$，即$\tilde{f}$为f的扩张。这样我们就证明了存在性。F的唯一性由（Ⅲ）是显见的。

下面我们证明满足（Ⅰ）和（Ⅱ）的扩张是唯一的，设存在两个扩张$\tilde{f}_1,\tilde{f}_2$满足（Ⅰ）、（Ⅱ），则$\exists\,F_i$：$E\to TM$，满足交换关系，且

$$\forall\theta\in\Gamma_{\mathrm{loc}},\quad \tilde{f}_i(\theta)=F_i\circ\theta \qquad (i=1,\ 2) \tag{2.3}$$

由 $$\tilde{f}_1|_U=\tilde{f}_2|_U=f\Rightarrow F_1\circ\theta=F_2\circ\theta,\qquad \forall\theta\in U$$

由U的满性质$\Rightarrow F_1(z)=F_2(z)$ $\forall z\in E$由(2.3)$\Rightarrow\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$ 唯一性证毕。

注2.6 由命题2.3可以看出，对于系统$\Sigma(E\xrightarrow{\pi}M,f,U,h,Y)$，若$(f,U)$为强协调对，则$\Sigma$可以经过扩张后成为命题2.2所定义的系统，即经过修正了的Brockett的意义下的系统。

注2.7 (f,U)满足命题2.3中(1)+(2)的扩张称为(f,U)的正则扩张。一般性的讨论可参看[14]。

注2.8 今后我们把满足交换关系(2.1)的光滑映射F：$E\to TM$称为Brockett映射。

设$E\xrightarrow{\pi}M$为向量丛，则我们可在$\Gamma_{\mathrm{loc}}(M,E)$上定义数乘和加法使$\Gamma_{\mathrm{loc}}(M,E)$成为线性空间$\forall\theta_1,\theta_2$ Ω，$\forall\alpha$，$\beta\in R^1$规定$\mathrm{Domain}(\alpha\theta_1+\beta\theta_2)=\mathrm{Domain}(\theta_1)\cap\mathrm{Domain}(\theta_2)$。

定义2.6 设$\Sigma(E\xrightarrow{\pi}M,f,U,Y,h)$为定义2.4意义的非线性系统，称$\Sigma$为仿射系统，如果：(1) $E\xrightarrow{\pi}M$为向量丛；(2) $U\subset\Gamma_{\mathrm{loc}}(M,E)$为在某数域$F\subset R^1$上的线性子空间；(3) f：$U\to\mathscr{X}_{\mathrm{loc}}(M)$是仿射映射。

注2.9 我们要求U为某个数域F上的线性子空间，是为了能刻画一些特殊情形，如在平凡丛情形的Bang-Bang控制，此时取$F=Z_2$。

定义2.7 设$U\subset\Gamma_{\mathrm{loc}}(M,E)$为**处处定义**的子集，称$U$为局部$m$-独立有限生成的，如果

$\forall x_0 \in M$，$\exists$ 邻域$V \subset M$，及有限个截面S_1，…，$S_m \in \Gamma_{\mathrm{loc}}$，$\{S_i\}$在$V$上线性独立（将$\Gamma(V, E)$看成$R^1$上线性空间），使$U|_V = \underset{R^1}{\mathrm{Span}}\{S_1, \cdots, S_m\}$。

注2.10 定义中$S_1, \cdots, S_m$在V上独立，是指作为截面在整体上是独立的，在每一个点$x \in V_1$，$S_1(x), \cdots, S_m(x)$在纤维空间上未必独立。定义中$U|_V = \{\theta|_V \theta \in U\}$。

命题2.4 给定一个仿射系统$\Sigma(E \xrightarrow{\pi} M, f, U, Y, h)$，若$U$为局部$m$-独立有限生成的，则局部地存在$m+1$个向量场$X_0, X_1, \cdots, X_m$，使$\Sigma$在局部坐标下动力学方程有表示

$$\begin{cases} \dot{x} = X_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} u_i X_i \qquad u \in R^m \\ y = h \end{cases}$$

证明 只要注意到U是m-独立有限生成的及f的仿射性即可得。其中X_0由M上的零截面$S_0 \in \Gamma(M, E)$决定，$X_0 = f(S_0)$。

命题2.5 设(f, U)为强协调对，$E \xrightarrow{\pi} M$为向量丛，且f：$U \subset \Gamma_{\mathrm{loc}}(M, E) \to \mathscr{X}_{\mathrm{loc}}(M)$为仿射的，则由命题2.3所决定的唯一正则扩张$\bar{f}$：$\Gamma_{\mathrm{loc}}(M, E) \to \mathscr{X}_{\mathrm{loc}}(M)$也是仿射的.且由$f$诱导的Brockett变换$F$：$E \to TM$，限制在纤维$\pi^{-1}(x)$上也是仿射的，这儿$\forall x \in M$.

证明 直接验证可得.

定义2.8 给定系统 $\Sigma(E \xrightarrow{\pi} M, f, U, Y, h)$，称$\gamma$：$[0, T] \to M$为**系统的轨线**，如果存在分划$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = T$及$f\theta_1$，…，$f\theta_k \in \mathscr{T}_0^{\Sigma}$，使$\gamma|[t_{i-1}, t_i]$为$f\theta_i$的积分曲线. 其中$\theta_i \in U$，并假定$\gamma$为连续分段光滑.

在我们的新框架中这样引进系统轨线的概念是很自然的. 我们可通过轨线的概念并仿照H. J. Sussmann和V. Jurdjevic[13]R. Hermann和A.T.Krener[11]对系统(1-1)进行的那样，用同样类似的方法引入纤维丛框架下非线性系统的**能控性、可接近性、强可接近性、弱可控、局部弱可控、局部能控**等概念[17].

需要着重指出的是，H. J. Sussmann, R. Hermann等在[10]～[13]中对系统(1-1)所得到的所有有关能控性、可接近性、强可接近性、弱可控性等结论，包括秩条件等，对于纤维丛上一般非线性控制系统均是成立的[17].

但是在文献[3]～[8]中在R. W. Brockett 等框架下却无法得到这些结论. 根本原因已在前边叙述过了.

定义2.9 给定一系统 $\Sigma(E \xrightarrow{\pi} M, f, U, h, Y)$，记 Orbit$(\Sigma)$为$\Sigma$的所有轨线集，引进两个集合$\mathscr{U}^x$，$\mathscr{Y}$

$$\mathscr{Y} = \{\sigma:\ I \to Y \mid I \subset R^1 \text{为区间，} \sigma \text{分段光滑连续}\}$$

$$\mathscr{U} = \left\{ (T, t_0, \cdots, t_k, \theta_1, \cdots, \theta_k) \middle| \begin{array}{l} \text{其中} T > 0,\ 0 = t_0 < \cdots < t_k = T \\ \theta_i \in U,\ \text{且} \exists\, \gamma \in \mathrm{Orbit}(\Sigma) \\ \text{使} \gamma(0) = x,\ \gamma|[t_{j-1}, t_j] \text{为} f(\theta_j) \text{的积分曲线} \end{array} \right\}$$

$\mathscr{U}^x$称为以$x \in M$为初始状态的初始化系统Σ^x的**整体控制集**.

定义映射IO^{Σ_x}: $\mathscr{U}^x \to \mathscr{Y}$，$u = (T, t_0, \cdots, t_k, \theta_1, \cdots, \theta_k) \in \mathscr{U}^x \to h \circ \gamma \in \mathscr{Y}$，其中$\gamma$为与$u = (T, t_1, \cdots, t_k, \theta_1, \cdots, \theta_k)$相联系的轨线，且$\gamma(0) = x$，称$IO\Sigma^x$为**输入—输出映射**，记

$\tilde{h}(\gamma)\triangleq h\circ\gamma$，称$\tilde{h}$:Orbit$(\Sigma)\to\mathscr{Y}$为$\Sigma$的**轨线输出**映射．

定义2.10　给定系统$\Sigma(E\xrightarrow{\pi}M,\ f,\ U,\ h,Y)$，$\forall x_1,\ x_2\in M$，如果$\mathscr{U}^{x_1}=\mathscr{U}^{x_2}$且$IO^{\Sigma^{x_1}}=IO^{\Sigma^{x_2}}$，则称$x_1$与$x_2$**不可区分**．

$\forall$开集$V\subset M$，$\pi^{-1}(V)\subset E\xrightarrow{\pi}V$也为一丛，令$U^V=\{\theta|_V|\theta\in U\}$，则得到一个系统，$\Sigma^V(\pi^{-1}(V)\xrightarrow{\pi}V,\ \tilde{f},\ U^V,\ h|_V,\ Y)$，这儿$\tilde{f}:U^V\to\mathscr{X}_{loc}(V)$，$\tilde{f}(\theta|_V)\triangleq f(\theta)|_V$，$\forall\theta\in U$，显然$\tilde{f}$也为协调的．

我们把Σ^V上的“**不可区分性**”定义为Σ上的**局部**不可区分性．

命题2.6　“不可区分性”和“局部不可区分性”均为等价关系．

证明　直接验证．　□

利用“不可区分性”及系统轨线的整体定义（不依赖于坐标卡的选择），可仿照文[11]相应地给出纤维丛上一般非线性系统的**能观性、局部能观性、弱能观、局部弱能观**等概念的几何描述．其定义与经典形式是一样的，且可推知**能观性秩条件**及[11]中有关于能观性的一系列结果对纤维丛上一般非线性系统也是成立的[17]．再一次要指出的是[3]～[8]中得不到这些论断．

三、纤维丛上一般非线性控制系统的最小实现理论

H. J. Sussmann在[9]中对于整体定义的系统(1—1)研究了非线性控制系统的最小实现理论，对于系统的同态同构等价性及最小性等给出了一系列深刻的结果[9]，成为非线性控制系统几何理论的经典文献之一．文[8]中研究了纤维丛上一般非线性系统的能观性、能控性及最小性的问题．在文[8]中没有能够得到经典最小实现理论在纤维丛上的相应的结果，事实上在文[8]的框架下也是不可能得到的．这主要是由于文[8]对于纤维丛上一般非线性系统的几何框架实质的理解是不完善的，从而对于最小系统概念的描述也是不正确的，与经典的定义有很大的不一致．

在[10]中，H. J. Sussmann 对向量场族引进了**轨道**的概念．它实质上相应于R. Harmann & Krener在[11]中引进的非线性系统的可达集，任意给定系统$\Sigma(E\xrightarrow{\pi}M,\ f,\ U,\ h,\ Y)$，由第二节可知$\Sigma$联系了一个向量场族$\mathscr{F}_0^{\Sigma}=\{f(\theta)\in\mathscr{X}_{loc}(M)|\theta\in U\}$，我们将$\mathscr{F}_0^{\Sigma}$的轨道称为**$\Sigma$的轨道**．

定义3.1　$\Sigma(E\xrightarrow{\pi}M,\ f,U,h,Y)$称为**最小的**，如果$M$本身为$\Sigma$的一个轨道，且$\Sigma$可观．

注3.1　在我们第二节给出的新框架下，我们很自然地得到了经典的“最小性”概念在纤维丛上一般系统的自然推广．而在以前的不完善框架下是无法给出的[8]．（参看以前的评注）

定义3.2　两个初始化系统$\Sigma_i^{x_i}(E_i\xrightarrow{\pi}M_i,\ f_i,\ U_i,\ h_i,\ Y)$，称为**输入—输出$\varphi$-同构的**，如果

(1) $\varphi:U_1\to U_2$为1—1满映射；

(2) φ诱导出一个映射$\tilde{\varphi}:\mathscr{U}_1^{x_1}\to\mathscr{U}_2^{x_2}$，也为1—1满映射．其中$\mathscr{U}_1^{x_1}$，$\mathscr{U}_2^{x_2}$，如第二节中的定义2.9所述，且$\forall(T,t_0,\cdots,t_k,\theta_1,\ \cdots,\ \theta_k)\in\mathscr{U}_1^{x_1}\xrightarrow{\tilde{\varphi}}(T_1,\ t_0,\ \cdots,\ t_k,\ \varphi(\theta_1),\ \cdots,\ \varphi(\theta_k))$

$\in \mathscr{U}_2^{x_2}$;

(3) $IO^{\Sigma_1^{x_1}} = IO^{\Sigma_2^{x_2}} \circ \tilde{\varphi}$

定义3.3 两个系统$\Sigma_i(E_i \xrightarrow{\pi_i} M_i, f_i, U_i, h_i, Y)$ $(i=1, 2)$，称为是(F, φ)同构的，如果

(1) $\varphi: U_1 \to U_2$为1—1满映射，(2) 存在$F: M_1 \to M_2$，C^∞同胚，$\forall \theta \in U_1, F_* f_1(\theta) = f_2(\varphi(\theta))$ (3) $h_2 \circ F = h_1$，(4) 对初始化系统$\Sigma^{x_1} \Sigma^{x_2}$，还要求$F(x_1) = X_2$。

命题3.1 若两个系统$\Sigma_1^{x_1}$和$\Sigma_2^{x_2}$是(F, φ)同构，则可推出$\Sigma_1^{x_1}$与$\Sigma_2^{x_2}$为φ同构的。

证明 简单的验证即可。 □

注3.2 命题3.1的逆命题不一定成立。后边将证明当Σ_1，Σ_2均为最小系统时，逆命题也是对的。

定义3.4 给定两个系统$\Sigma_i(E_i \xrightarrow{\pi_i} M_i, f_i, U_i, h_i, Y)$ $(i=1, 2)$ (F, φ)称为Σ_1到Σ_2的**同态**，如果

(1) $\varphi: U_1 \to U_2$为1—1满；(2) $F: M_1 \to M_2$为映射；(3) $\forall x \in M_1$，φ诱导一个映射$\tilde{\varphi}^x$: $\mathscr{U}^{\Sigma_1^{x_1}} \to \mathscr{U}^{\Sigma_2^{F(x)}}$，$\tilde{\varphi}^x$的定义如定义3.2；(4) $\forall u \in \mathscr{U}^{\Sigma_1^x}$，设$\gamma$为相应于$u$的轨线，$\gamma(0) = x$，则$F \circ \gamma$为$\Sigma_2^{F(x)}$的相应于$\tilde{\varphi}^x(u)$的轨线；(5) $IO^{\Sigma_1^x} = IO^{\Sigma_2^{F(x)}} \circ \tilde{\varphi}^x$，(6) 对于初始化系统$\Sigma_i^{x_i}$，还要求$F(x_1) = X_2$。

注3.3 定义3.4中如F为1—1的满映射，则称(F, φ)为**弱同构**。

注3.4 以上定义中的条件(3)是绝对必要的，因为一般来讲，$\forall u = (T, t_1, \cdots, t_k, \theta_1, \cdots, \theta_k) \in \mathscr{U}^{\Sigma_1^x}$，未必存在$\Sigma_2^{F(x)}$的轨线$\gamma$相应于$\tilde{\varphi}(u) = (T, t_0, \cdots, t_k, \varphi(\theta_1), \cdots, \varphi(\theta_k))$，即$\tilde{\varphi}(u)$不一定属于$\mathscr{U}^{\Sigma_2^{F(x)}}$。

注3.5 条件(3)中$\tilde{\varphi}^x$为1—1的，这由φ的1—1性来保证，但$\tilde{\varphi}$不一定是满的，即任给$\tilde{u} = \{T, t_0, \cdots, t_k, \tilde{\theta}_1, \cdots, \tilde{\theta}_k) \in \mathscr{U}\Sigma_2^{F(x)}$，未必存在轨线$\gamma$ (Σ_1^x的轨线) 相应于$(T, t_0, \cdots, t_k, \varphi^{-1}\tilde{\theta}_1, \cdots, \varphi^{-1}\tilde{\theta}_k)$，即$\tilde{u}$不一定属于$\tilde{\varphi}(\mathscr{U}\Sigma_1^x)$。

定义3.5 两个系统$\Sigma_i(E_i \xrightarrow{\pi_i} M_i, f_i, U_i, h_i, Y)$称为$\varphi$**强等价**的，如果$\forall x_1 \in M_1$，$\exists x_2 \in M_2$，使$\Sigma^{x_1}$与$\Sigma^{x_2}$为$\varphi$—等价。当$\Sigma_1$与$\Sigma_2$为$\varphi$-强等价时，我们记为$\Sigma_1 \leqslant \Sigma_2$。

注3.6 我以上所定义的两个系统**输入—输出φ-同构**，(F, φ)**同构**，(F, φ)**同态**，**φ-强等价**等新概念，是对H. J. Sussmann在经典文献[9]中，所给出的输入—输出同构，F-同构，F-同态，强等价等一系非线性系统实现理论经典概念在纤维丛上的自然推广，但是这种推广是本质的。它拓扩了H.J.Sussmann在[9]中所发展的经典实现理论。

正如第二节中描述的那样，对于系统$\Sigma(E \xrightarrow{\pi} M, f, U, h, Y)$，用$\mathscr{F}_0^{\Sigma}$表示与$\Sigma$相联系的向量场集合，它自然是"处处定义"的。H. J.Sussmann在[10]中研究了光滑流形上"处处定义"的向量场集合的"轨道"性质，并证明了在轨道上可以定义一个微分结构，使轨道成为M的浸入子流形（非嵌入）。在我们这儿，$\mathscr{F}_0^{\Sigma}$的轨道实际上就是系统Σ从某一点的弱可达集。

下面给出关于纤维丛上控制系统同态的一个等价命题，实质推广了H.J.Sussmann的结果[9]。

命题3.2 给定两个系统$\Sigma_i(E_i \xrightarrow{\pi_i} M_i, f_i, U_i, h_i, Y)$ $(i=1, 2)$及映射$F: M_1 \to M_2$，φ: $U_1 \to U_2$为1—1满，则(F, φ)是Σ_1到Σ_2的同态的充分必要条件是：

(1) $\forall \mathscr{F}_0^{\Sigma_1}$的轨道$S$，$F_S \triangleq F|_S: S \to M_2$为$C^\infty$；

(2) $\forall \theta \in U_1, \forall x \in \mathrm{Domain}(\theta) \cap S$，有$T_x F_S(f_1(\theta)(x)) = f_2(\varphi(\theta)) \circ F(x)$或$TF_S \circ f_1(\theta) = f_2(\varphi(\theta)) \circ F_S$;

(3) $h_1=h_2\circ F$.

证明 先证充分性，假设条件(1)～(2)成立，我们要证(F, φ)为从Σ_1到Σ_2的同态．由定义3.4，我们只须证明如下三个论断成立就行了．

(Ⅰ) $\forall x\in M_1$，φ可诱导一个映射$\tilde{\varphi}^x: \mathscr{U}^{\Sigma_1^x}\to\mathscr{U}^{\Sigma_2^{F(x)}}$；

(Ⅱ) $\forall u\in\mathscr{U}^{\Sigma_1^x}$，$\gamma$为$\Sigma_1^x$的相应于$u$的轨线$\gamma(0)=x$，则$F\circ\gamma$为$\Sigma_2^{F(x)}$的相应于$\tilde{\varphi}(u)\in\mathscr{U}^{\Sigma_2^{F(x)}}$的轨线；

(Ⅲ) $IO^{\Sigma_1^x}=IO^{\Sigma_2^{F(x)}}\circ\tilde{\varphi}^x$，$\forall x\in M_1$．

先证(Ⅰ)成立．

$\forall x\in M_1$，设$u=(T, t_0, \cdots, t_k, \theta_1, \cdots, \theta_k)\in\mathscr{U}^{\Sigma_1^x}$则由$\mathscr{U}^{\Sigma_1^x}$的定义知存在分段光滑连续轨线$\gamma_1:[0, T]\to M_1$ $\gamma_1|[t_{j-1}, t_j]$为$f_1(\theta_j)$的积分曲线，设S为$\mathscr{F}_0^{\Sigma}$过x的轨道（即弱可达集$WA(x)$），则$\gamma_1(t)\in S$，$\forall t\in[0, T]$，由(1)、(2)知$TF_S\circ f_1(\theta)=f_2(\varphi(\theta))\circ F_S$且$F_S\circ\gamma_1|[t_{j-1}t_j]$为$f_2(\varphi(\theta_j))$的积分曲线，由$F_S$定义知$F_S\circ\gamma_1=F\circ\gamma_1$．

定义$\gamma_2=F\circ\gamma_1$，则γ_2即为$\Sigma_2^{F(x)}$的相应于$(T, t_0, t_1, \cdots, t_k, \varphi(\theta_1), \cdots, \varphi(\theta_k))$的轨线，且$\gamma_2(0)=F(x)$，所以$\tilde{\varphi}^x\in\mathscr{U}^{\Sigma_2^{F(x)}}$．这样$\varphi$诱导了一个映射$\tilde{\varphi}^x: \mathscr{U}^{\Sigma_1^x}\to\mathscr{U}^{\Sigma_2^{F(x)}}$，所以(Ⅰ)成立．

结论(Ⅱ)可从(Ⅰ)的证明过程立得，结论(Ⅲ)可由IO^{Σ^x}的定义及条件(3)与(Ⅱ)立得．

由此证明了(F, φ)为从Σ_1到Σ_2的同态，充分性证完．

下面证明必要性，假设(F, φ)为从Σ_1到Σ_2的同态，我们要证条件(1)～(3)成立．

先证明(3)，然后再证(1)和(2)．为证(3)只要证$\forall x\in M_1, h_1(x)=h_2(F(x))$即可．取定$x\in M_1$，由$U_1$的"处处定义"性质可知存在$\theta\in U_1$，使$x\in\mathrm{Domain}(\theta)$，由此$\exists\varepsilon>0$及$\gamma:[-\varepsilon, \varepsilon]\to M_1$，使$\gamma|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$为$f(\theta)$的积分曲线，由$f_1$的协调性，$x\in\mathrm{Domain}(f_1(\theta))$，所以$u_\varepsilon=(\varepsilon, t_0, \varepsilon, \varphi(\theta))\in\mathscr{U}^{\Sigma_2^{F(x)}}$，且$F\circ\gamma:[-\varepsilon, \varepsilon]\to M_2$为$f_2(\varphi(\theta))$的积分曲线且$F\circ\gamma(0)=F(x)$，由$IO^{\Sigma_1^x}=IO^{\Sigma_2^{F(x)}}\circ\tilde{\varphi}^x\Rightarrow\bar{h}_1(\gamma)(t)=\bar{h}_2(F\circ\gamma_2)(t)$ $\forall t\in[-\varepsilon, \varepsilon]$．所以$h_1(x)=h_2(F(x))$，这样就证明了(3)成立．

为证(1)和(2)成立，我们先证明一个引理．

引理3.3 设(F, φ)为Σ_1到Σ_2的同态，则$\forall\theta\in U_1$，$\forall t\in R^1$，$\forall x\in D(\theta)$，只要$X_t^\theta(x)$有定义，$X_t^{\varphi(\theta)}(F(x)$就也有定义且$X_t^{\varphi(\theta)}(F(x))=F(X_t^\theta(x))$．这儿$X_t^\theta$，$X_t^{\varphi(\theta)}$分别为向量场$f_1(\theta)$与$f_2(\varphi(\theta))$的流．

证明 由同态映射的定义可知，当$t>0$时，若$X_t^\theta(x)$有定义，则$X_t^{\varphi(\theta)}(F(x))$也有定义且$F(X_t^\theta(x))=X_t^{\varphi(\theta)}(F(x))$（由同态的定义可知$F(x)\in\mathrm{Domain}(f_2\varphi(\theta))$）．当$t<0$时，令$\tilde{x}=X_t^\theta(x)$，则$X_{-t}^{\varphi(\theta)}(F(\tilde{x}))$有定义，且有

$$X_{-t}^{\varphi(\theta)}(F(\tilde{x}))=F(X_{-t}^\theta(\tilde{x}))=F(x)\quad\therefore X_t^{\varphi(\theta)}(F(x))=F(\tilde{x})=F(X_t^\theta(x))\ \square$$

接下来我们先证明(1)成立，即欲证$F_S=F|_S: S\to M_2$为C^∞映射，由[10]H.J.Sussmann对一般向量场族的研究，$\forall x\in S$，$\exists y\in S$及$f(\theta_1), \cdots, f(\theta_k)\in\mathscr{F}_0^{\Sigma_1}$，使$X_{t_1}^{\theta_1}\circ\cdots\circ X_{t_k}^{\theta_k}(y)$在$(t_1^0, \cdots, t_k^0)\in R^k$的某个邻域$V$中有定义，且使得下列论断成立

(A) 若记$\Phi(t_1, \cdots, t_k)=X_{t_1}^{\theta_1}\circ\cdots\circ X_{t_k}^{\theta_k}(y)$，则$\Phi(t_1^0, \cdots, t_k^0)=x$；

(B) $T\Phi$在$(t_1^0, \cdots, t_k^0)$的秩等于$\dim S\triangleq q$．

由引理3.3知$X_{t_1}^{\theta_1}\circ\cdots\circ X_{t_k}^{\theta_k}(y)\xrightarrow{F\circ\Phi}X_{t_1}^{\varphi(\theta_1)}\circ\cdots\circ X_{t_k}^{\varphi(\theta_k)}(F(y))$，$\therefore F\circ\Phi: V\subset R^k\to M_2$为$C^\infty$

映射.

由(B)及隐函数定理，$\exists$ q维子流形$V_1\subset V\subset R^k$，及$W\subset S$，且$(t_1^0, \cdots, t_k^0)\in V_1$，使$\Psi=\Phi|_{V_1}:V_1\to V\subset S$为微分同胚，且$F|_W=F\circ\Phi\circ\Psi^{-1}$，由此$\Rightarrow F_S|_W=F|_W$为光滑的，

$\therefore$ $F_S:S\to M_2$为C^∞映射，$\therefore$(1)成立.

最后证明(2)，$\forall\theta\in U_1$，$\forall x\in S\cap\mathrm{Domain}(\theta)$，由常微解的存在唯一性定理，$\exists\varepsilon>0$，$X_t^\theta(x)$在$(-\varepsilon, \varepsilon)$上有定义，由引理3.3知$f_2(\varphi(\theta))$的流$X_t^{\varphi(\theta)}(F(x))$在$(-\varepsilon, \varepsilon)$上也存在且$F(X_t^\theta(x))=X_t^{\varphi(\theta)}(F(x))$，由于$S$为$\mathscr{F}_0^x$的轨道，$\therefore X_t^\theta(x)\in S$，$\forall|t|<\varepsilon$，且$F_S(X_t^\theta(x))=F(X_t^\theta(x))=X_t^{\varphi(\theta)}(F(x))$.

在$t=0$处求导$\Rightarrow TF_S\circ f_1(\theta)(x)=f_2(\varphi(\theta))(F(x))$，$\therefore$(2)成立.

由命题3.2证明过程我们可得如下推论:

推论3.4 Σ_1，Σ_2，(F, φ)如命题3.2所述，则引理3.3的结论成立的充要条件是命题3.2中的条件(1)+(2)成立.

命题3.5 给定两个系统$\Sigma_i(E_i\xrightarrow{\pi_i}M_i, f_i, U_i, h_i, Y)(i=1, 2)$，假定$\Sigma_1$，$\Sigma_2$均为解析或$\Sigma_1$为完全的($\Sigma_1$完全是指$\mathscr{F}_0^{x_1}$中的向量场是完全的)，若$\Sigma_1\underset{\varphi}{\leqslant}\Sigma_2$且$\Sigma_2$为能观的，则存在唯一的同态$(F, \varphi):\Sigma_1\to\Sigma_2$.

证明 我们先构造一个映射$F:M_1\to M_2$. 由φ-强等价的定义，知$\forall x_1\in M_1$，$\exists x_2\in M_2$，使$\tilde{\varphi}_{x_1,x_2}:\mathscr{U}^{\Sigma_1^{x_1}}\to\mathscr{U}^{\Sigma_2^{x_2}}$为1—1的满映射，且$IO^{\Sigma_1^{x_1}}=IO^{\Sigma_2^{x_2}}\circ\tilde{\varphi}_{x_1x_2}$，定义$F(x_1)=x_2$. 下面验证$x_2$是存在唯一的. 假定还存在$x_2'\in M_2$满足上述性质，由于$\tilde{\varphi}_{x_1x_2}$，$\tilde{\varphi}_{x_1,x_2'}$均为1—1的满映射，再由$\mathscr{U}^{\Sigma^x}$的定义及$\tilde{\varphi}$的构造可直接看出$\mathscr{U}^{\Sigma_2^{x_2'}}=\mathscr{U}^{\Sigma_2^{x_2}}$，且$\tilde{\varphi}_{x_1,x_2}=\tilde{\varphi}_{x_1,x_2'}$，再由$IO^{\Sigma_2^{x_2}}\circ\tilde{\varphi}_{x_1,x_2}=IO^{\Sigma_2^{x_2'}}\circ\tilde{\varphi}_{x_1,x_2'}\Rightarrow IO^{\Sigma_2^{x_2}}=IO^{\Sigma_2^{x_2'}}$，$\therefore x_2$与$x_2'$"**不可区分**"，由$\Sigma_2$的能观性可推出$x_2=x_2'$，$\therefore F$为单值映射.

这样我们就构造了一个映射$F:M_1\to M_2$，由上述推导过程可知(F, φ)满足同态定义3.4中的条件(1)、(2)、(3)和(5). 下面我们只要证明(F, φ)也满足定义3.4中的条件(4)即可. 由命题3.2及推论3.4，我们只要证明下述论断："$\forall\theta\in U_1$，$\forall t\in R^1$，$\forall x\in\mathrm{Domain}(\theta)$，若$X_t^\theta(x)$有定义，则$X_t^{\varphi(\theta)}(F(x))$也有定义且$F(X_t^\theta(x))=X_t^{\varphi(\theta)}(F(x))$"，即可.

任取定$\theta\in U_1$及$x\in\mathrm{Domain}(\theta)$，由$f_1$的协调性及常微分方程解的存唯一性定理及解的延拓定理知有$x\in\mathrm{Domain}f(\theta)$，且存在一个极大区间$(-\alpha, \beta)$，$\alpha$，$\beta>0$，使$X_t^\theta(x)$在$(-\alpha, \beta)$上存在且$X_t^\theta(x)|_{t=0}=x$，$\forall T\in[0, \beta)$，则$(T, 0, T, \theta)\triangleq(T, t_0, t_1, \theta)\in\mathscr{U}^{\Sigma_1^x}$，由强等价性的定义及$F$的构造知$(T, 0, T, \varphi(\theta))\triangleq(T, t_0, t_1, \varphi(\theta))\in\mathscr{U}^{\Sigma_2^{F(x)}}$，$\therefore X_t^{\varphi(\theta)}(F(x))$在$[0, T]$上有定义. 由$T\in[0, \beta)$的任意性知$X_t^{\varphi(\theta)}(F(x))$在$[0, \beta)$上也有定义.

接下来证明 $F(X_t^\theta(x))=X_t^{\varphi(\theta)}(F(x))$ $\forall t\in[0, \beta)$

$\forall\beta_1\in[0,\beta)$，令$\tilde{x}\triangleq X_{\beta_1}^\theta(x)$，$\forall(T, t_0, \cdots, t_k, \theta_1, \cdots, \theta_k)\in\mathscr{U}^{\Sigma_1^{\tilde{x}}}$，设相应的轨线为$\gamma^{\tilde{x}}$: $[0, T]\to M_1$，定义$\gamma^x:[0, T+\beta_1]\to M_1$，$\gamma^x|_{[0,\beta_1]}=X_t^\theta(x)$，在$[t_{i-1}+\beta_1, t_i+\beta_1]$上，$\gamma^x(t)\triangleq\gamma^{\tilde{x}}(t-\beta_1)$，则$\gamma^x$为$\Sigma_1^x$的相应于$u=(T+\beta_1, 0, \beta_1, t_1+\beta_1, \cdots, t_k+\beta_k, \theta, \theta_1, \cdots, \theta_k)$的轨线，由此推出$u\in\mathscr{U}^{\Sigma_1^x}$.

由F的定义及$\Sigma_1\underset{\varphi}{\leqslant}\Sigma_2$可知$\tilde{u}=(T+\beta_1, 0, \beta_1, t_1+\beta_1, \cdots, t_k+\beta_k, \tilde{\theta}, \tilde{\theta}_1, \cdots, \tilde{\theta}_k)\in\mathscr{U}^{\Sigma_2^{F(x)}}$，(这儿$\tilde{\theta}=\varphi(\theta)$，$\tilde{\theta}_i=\varphi(\theta_i)$)，且存在与$\tilde{u}$相联系的轨线$\gamma^{F(x)}$: $[0, T+\beta_1]\to M_2$并满足

$h_1\circ\gamma^x(t)=h_2\circ\gamma^{F(x)}(t)$.

令 $\tilde{x}_2\triangleq X_{\beta_1}^{\varphi(\theta)}(F(x))$，定义$\gamma^{\tilde{x}_2}$: $[0, T]\to M_2, \gamma^{\tilde{x}_2}(t)\triangleq\gamma^{F(x)}(t+\beta_1)$ $\forall t\in[t_{i-1}, t_i]$，则$h_1\circ\gamma^{\tilde{x}}=h_2\circ\gamma^{\tilde{x}_2}$，反之任给$\Sigma_2^{\tilde{x}_2}$的轨线$\gamma^{\tilde{x}_2}$，也可构造 $\Sigma_1^{\tilde{x}}$ 的轨线 $\gamma^{\tilde{x}}$，使$h_1\circ\gamma^{\tilde{x}}=h_2\circ\gamma^{\tilde{x}_2}$，$\therefore\varphi$诱导了一个1－1满足映射，$\varphi^{\tilde{x}}$: $\mathscr{U}^{\Sigma_1^{\tilde{x}}}\to\mathscr{U}^{\Sigma_2^{\tilde{x}}}$，且 $IO\Sigma_1^{\tilde{x}}=IO^{\Sigma_2^{\tilde{x}_2}}\circ\Phi^{\tilde{x}}$，$\therefore F(\tilde{x})=\tilde{x}_2$，即$F(X_{\beta_1}^{\theta}(x))=X_{\beta_1}^{\varphi(\theta)}(F(x))$由$\beta_1$, θ, x的任意性，我们证明了$F(X_t^{\theta}(x))=X_t^{\varphi(\theta)}(F(x))$，$\forall t>0$，$\forall\theta$，$\forall x$，当上式两端均有定义时成立.

下证$t<0$的情形$\forall\theta\in U_1$，$x\in\text{Domain}(\theta)$，$t<0$，使$X_t^{\theta}(x)$有定义，令 $x'=X_t^{\theta}(x)$，则$X_{-t}^{\theta}(x')$有定义且等于x，由前面证明过程知$X_{-t}^{\varphi(\theta)}(F(x'))$也有定义且 $F(X_t^{\theta}(x'))=X_{-t}^{\varphi(\theta)}(F(x'))\Rightarrow F(x)=X_{-t}^{\varphi(\theta)}(F(x'))$，$\therefore X_t^{\varphi(\theta)}F(x)=F(X_t^{\theta}(x))$. 这样就证明了$(F, \varphi)$为从$\Sigma_1$到$\Sigma_2$的同态.

下面证明这种同态是唯一的:

假设另外也存在一个同态(G, φ)，使 $\forall x\in M_1$，$IO^{\Sigma_1^x}=IO^{\Sigma_2^{G(x)}}\circ\Phi$. 由$F$的构造$\Rightarrow F(x)=G(x)$，这样完成了唯一性证明.

命题3.6 给定系统 $\Sigma_i(E_i\xrightarrow{\pi_i}M_i, f_i, U_i, h_i, Y)$ $(i=1, 2, 3)$，则下述三个结论成立:

(1) 若(F, φ_1)为Σ_1到Σ_2的同态，(F_2, φ_2)为Σ_2到Σ_3的同态，则$(F_2\circ F_1, \varphi_2\circ\varphi_1)$为$\Sigma_1$到$\Sigma_3$的同态.

(2) (F, φ)为$\Sigma_1\to\Sigma_2$同态，则F将Σ_1的轨道映入Σ_2的轨道.

(3) (F, φ)为$\Sigma_1\to\Sigma_2$的同态，且 $F: M_1\to M_2$为1—1的满映射，则(F^{-1}, φ^{-1})也为$\Sigma_2\to\Sigma_1$的同态.

证明 由定义3.4，引理3.3和推论3.4可立得.

定理3.7 任给两个系统 $\Sigma_i(E_i\xrightarrow{\pi_i}M_i, f_i, U_i, h_i, Y)$ $(i=1, 2)$，设Σ_1, Σ_2均为可观的且$\Sigma_1\underset{\varphi}{\leqslant}\Sigma_2$，再假定$\Sigma_i$为解析或完全的，则存在唯一的弱同构$(F, \varphi)$.

证明 这是定理3.5及命题3.6的直接推论.

定理3.8 任给定两个系统$\Sigma_i^{x_i}(E_i\xrightarrow{\pi}M_i, f_i, U_i, h_i, Y)$，假设:

(1) Σ_i为解析的或完全的 $i=1, 2$，(2) Σ_i为最小系统 $i=1, 2$.

则Σ_1与Σ_2输入—输出φ-同构$\Leftrightarrow\exists!F$: $M_1\to M_2$为 C^∞同胚，使(F, φ)为Σ_1到Σ_2的同构.

证明 $\Leftarrow$)如果Σ_1, Σ_2为(F, φ)同构的，则由命题3.1可知Σ_1, Σ_2为输入—输出φ-同构的. $\Rightarrow$)假定$\Sigma_1^{x_1}, \Sigma_2^{x_2}$为输入—输出$\varphi$同构的.我们下面要构造 F: $M_1\to M_2$，使(F, φ)满足同构性条件由输入—输出φ-同构的定义及定理3.5的证明过程推出如下条件成立:

(A) $\forall\theta\in U_1$，$\forall t\in R^1$，$\forall x\in\text{Domain}(\theta)$，若$X_t^{\theta}(x_1)$有定义，则 $X_t^{\varphi(\theta)}(x_2)$也有定义且 $\Sigma_1^{X_t^{\theta}(x_1)}$与 $\Sigma_2^{X_t^{\varphi(\theta)}(x_1)}$为输出—输出$\varphi$-同构.

(B) 由(A)知，$\forall\theta_1, \cdots, \theta_k\in U_1$，$\forall(t_1, \cdots, t_k)\in R^k$，只要$X_{t_1}^{\theta_1}\circ\cdots\circ X_{t_k}^{\theta_k}(x_1)$有定义，则$X_{t_k}^{\varphi(\theta_1)}\circ\cdots\circ X_{t_k}^{\varphi(\theta_k)}(x_2)$ 也有定义且 $\Sigma_1^{x'}$与$\Sigma_2^{x''}$输入—输出φ-同构，这儿$x'=X_{t_1}^{\theta_1}\circ\cdots\circ X_{t_k}^{\theta_k}(x_1)$，$x''=X_{t_1}^{\varphi(\theta_1)}\circ\cdots\circ X_{t_k}^{\varphi(\theta_k)}(x_2)$.

(C) 由于Σ_i为极小系统，$\therefore M_i$本身即为Σ_i的一个轨道.

$\therefore \quad M_1=\{x\in M_1 \mid \exists\, \theta_1, \cdots, \theta_k\in U_1$及$(t_1, \cdots, t_k)\in R^k$,使$x=X_{t_1}^{\theta_1}\circ\cdots\circ X_{t_k}^{\theta_k}(x_1)$, k为整数$\}$

由(B)和(C)及Σ_2的可观性知$\forall\, x\in M_1$, $\exists\, !\, x'\in M_2$, s, t, Σ_1^x与$\Sigma_2^{x'}$输入—输出φ同构.

定义 $F(x)=x'$, 则我们便构造了一个映射: F: $M_1\to M_2$, $F(x_1)=x_2$, 且F为1—1的满的.

由定理3.5的证明过程知(F, φ)为$\Sigma_1^{x_1}$到$\Sigma_2^{x_2}$弱同构. 由命题3.6知(F^{-1}, φ^{-1})也是$\Sigma_2^{x_2}$到$\Sigma_1^{x_1}$的弱同构, 由于Σ_1极小, M_1本身为一轨道, 利用命题3.2可知:

(D) F: $M_1\to M_2$, C^∞映射.

(E) $\forall\,\theta\in U_1$, $\forall\, x\in D(\theta)$有$F(x)\in D(\varphi(\theta))$, 且$T_xF(f_1(\theta)(x))=f_2(\varphi(\theta))(F(x))$.

(F) $h_1=h_2\circ F$.

由Σ_2的极小性$\Rightarrow F^{-1}$: $M_2\to M_1$也为C^∞的, $\therefore F$: $M_1\to M_2$为微分同胚.

由此证明了(F, φ)为Σ_1到Σ_2的同构, 再有定理3.5的证明过程知F是存在唯一的. □

作者在此感谢中科院系统所的秦化淑研究员与程代展研究员, 他们对本文提出了很中肯的建议. 作者同时也深切怀念已故导师中科院院士、北京大学教授郭仲衡先生, 作者最初进行的这项研究得到了他的极大鼓励与支持.

参 考 文 献

[1] R. W. Brockett, *Control Theory and Analytical Mechanics*, *Geometrical Control Theory*, Ed. by C. Martin and R. Hermann, Math. Sci. Press (1977).

[2] R. W. Brockett, Nonlinear control theory and differential geometry, *Proceeding of the International Congress of Mathematicans*, August 16—24, 1983, Warszawa (1983).

[3] H. Nijmeijer and A. J. Van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag (1990).

[4] J. C. Willems, Systems theoretic models for the analysis of physical systems, *Ricerche di Automatica (special issue on systems)*, **10**(2) (1979).

[5] A. J. Van der Schaft, System theoretic descriptions of physical systems, Doct. Dissertation, University of Groningen (1983).

[6] H. Nijimeijer and A. J. Van der Schaft, Controlled invariance for nonlinear systems, *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC—27**(4) (1982).

[7] H. Nijimeijer, On the theory of nonlinear control systems, *Lectures Notes in Control & Informations*, (135), Springer-Verlag (1989).

[8] A. J. Van der Schaft, Controllability and observability for aftine nonlinear Hamiltonian systems, *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC—27** (1982), 490—492.

[9] H. J. Sussmann, Existence & uniqueness of minimal realizations of nonlinear systems, *Math. Sys. Theory*, **10** (1977), 263—284.

[10] H. J. Sussmann, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, *Trans. Amer. Math. Society*, **180** (1973), 171—188.

[11] R. Hermann and A. T. Krener, Nonlinear controllability and observability, *IEEE, Trans, Auto. Control*, **AC—22**(5) (1977).

[12] H. J. Sussmann, Lie brackets, real analyticity and geometric control, Progress

in Math., *Differential Geometric Control Theory*, MA Birkhauser (1983).

[13] H. J. Sussmann and V. Jurdjevic, Controllability of nonlinear systems, *J. Diff. Equ.*, 12 (1972).

[14] 慕小武，一般非线性控制系统和力学控制系统的统一纤维丛框架及其实现理论，北京大学 博士学位论文 (1991).

[15] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 2nd ed. Springer-Verlag (1989).

[16] 慕小武，纤维丛上一般非线性系统的能观性与能控性，《中国控制会议论文集》，科学 出 版社 (1995).

Geometric Framework and Minimal Realizations of Nonlinear Systems on Fibre Bundle

Mu Xiaowu

(*Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou* 450052, *P. R. China*)

Abstract

The definition of nonlinear control systems on fibre bundles proposed by Brockett and Willems in incomplete from the mathematical view. A new geometric framework is proposed and a minimal realization theory is developed for nonlinear control systems on fibre bundles which is elaborated as a natural generalization of Sussmann's theory and differs essentially from Van der Schaft's approach. Limitations of realization theory given by Van der Schaft are also discussed.

Key words fibre bundle, controllability, observability, minimality