应用数学和力学，第17卷 第9期（1996年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类新的KKM定理及其应用*

张石生[1]　　张　宪[2]

（1995年3月15日收到）

摘　　要

本文得到一类新的KKM定理，统一和改进了 [2,3,6,7,11] 中的结果。作为应用，我们得到了几个匹配定理、重合定理、不动点定理、极大极小不等式定理及截口定理。

关键词　KKM定理　匹配定理　不动点　极大极小不等式

一、引言及预备知识

1961年，Fan[6]把著名的KKM定理[9]从有限维空间推广到无穷维空间．近年来，一些作者又对KKM定理作了多种形式的推广．1987年，Horvath[7]引入H-空间的概念，证明了H-KKM定理；1989年Park[11]在凸空间中证明了一类KKM定理．最近作者们在引文[2,3]中分别得到两类广义KKM定理．

本文的目的是证明一类新的KKM定理．作为这一结果的应用，我们得到了几个匹配定理、重合点定理、不动点定理、极大极小定理及截口定理．本文结果是[1～8,10,11]中相应结果的统一和推广．

为方便起见我们先给出如下的定义和引理．

定义1　设E是线性空间，若在E的每一有限维子空间上赋有Euclid拓扑，则称E是**具有限维Euclid拓扑的线性空间**．

定义2　设X是一拓扑空间，$A\subset X$是一子集．若对X中任一紧子集K，$A\cap K$是K中的开集（或闭集），则称A是X**中的紧开集**（相应地**紧闭集**）．

引理1.1　设E是具有限维Euclid拓扑的线性空间，Y是拓扑空间，$A_1,\cdots,A_n$是Y中的n个紧闭集，且$Y=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$．则对任意的$n$个点$u_1,\cdots,u_n\in E$，及对任意的$S\in C(\mathrm{co}\{u_1,\cdots,u_n\},Y)$（映$\mathrm{co}\{u_1\cdots,u_n\}$到$Y$的连续映象的集合），存在$m(1\leqslant m\leqslant n)$及$\{i_1,\cdots,i_m\}\subset\{1,\cdots,n\}$使得

$$S(\mathrm{co}\{u_{i_1},\cdots,u_{i_m}\})\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m}A_{i_j}\right)\neq\phi \tag{1.1}$$

证　设$u_1,\cdots,u_n$是E中任给的n个点，$S\in C(\mathrm{co}\{u_1,\cdots,u_n\},Y)$．令$C=\mathrm{co}\{u_1,\cdots,u_n\}$，则在Eucld拓扑下，$C$是一紧凸空间．当$z\in C$时，令

---

* 国家自然科学基金资助课题．

1 四川大学，成都 610064．　2 安徽师大，芜湖 241000．

$$I(z)=\{i: S(z)\in A_i\}.$$

则$I(z)\neq\phi$. 又定义映象$T: C\to 2^C$如下:

$$T(z)=\mathrm{co}\{u_i: i\in I(z)\}\qquad (z\in C)$$

则$T(z)$是C中的非空闭凸集. 对$z\in C$, 令$U_z=C\setminus S^{-1}(\bigcup_{i\notin I(z)}A_i)$. 因每一$A_i$是紧闭集且$S$连续, 易证$U_z$是开集. 当$i\notin I(z)$时, $S(z)\notin A_i$, 故$S(z)\notin\bigcup_{i\notin I(z)}A_i$, 因而$z\in U_z$. 又对任一$z'\in U_z$, 则$S(z')\notin\bigcup_{i\notin I(z)}A_i$, 故$S(z')\in\bigcup_{i\in I(z)}A_i$, 从而得知$I(z')\subset I(z)$. 因而$T(z')\subset T(z)$. 于是可证$T$是上半连续的. 由Kakutani不动点定理, 存在$z_0\in C$, 使得

$$z_0\in T(z_0)=\mathrm{co}\{u_i;\ i\in I(z_0)\}.$$

由$I(z_0)$的定义知, $Sz_0\in\bigcap_{i\in I(z_0)}A_i$. 引理结论得证.

二、KKM 定 理

定理2.1 设X是非空集合, Y是一拓扑空间, E是具有限维 Euclid 拓扑的线性空间, 映象G: $X\to 2^Y$满足条件:

(i) $\forall x\in X$, $G(x)$是紧闭集(或者紧开集);

(ii) 对任意的有限集$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$, 存在相应的$\{u_1,\cdots,u_n\}\subset E$及$S\in C(\mathrm{co}\{u_1,\cdots,u_n\},Y)$, 使得对任意的正整数$m$ $(1\leqslant m\leqslant n)$及$\forall\{i_1,\cdots,i_m\}\subset\{1,\cdots,n\}$有

$$S(\mathrm{co}\{u_{i_1},\cdots,u_{i_m}\})\subset\bigcup_{j=1}^{m}G(x_{i_j})\tag{2.1}$$

则集族$\{G(x): x\in X\}$具有限交性质. 特别当$G(x)$, $x\in X$ 是紧闭集, 且存在$x_0\in X$, 使$G(x_0)$是紧集时, 则$\bigcap_{x\in X}G(x)\neq\phi$.

证 (Ⅰ)当对每一$x\in X$, $G(x)$是紧闭集时, 若结论不成立, 则存在$x_1,\cdots,x_n\in X$, 使得$\bigcap_{i=1}^{n}G(x_i)=\phi$. 由条件(ii), 存在相应的$u_1,\cdots,u_n\in E$及$S\in C(\mathrm{co}\{u_1,\cdots,u_n\},Y)$. 对任意的$m$ $(1\leqslant m\leqslant n)$及任意的$\{i_1,\cdots,i_m\}\subset\{1,\cdots,n\}$, (2.1)成立, 令$C=\mathrm{co}\{u_1\cdots,u_n\}$, 并设$d$是$C$上的Euclid距离. 于是$C$是一紧凸集. 记$A_i=S^{-1}(G(x_i))$ $(i=1,\cdots,n)$. 因 $G(x_i)$ 紧闭且S连续, 可证A_i是C中的闭集. 又因$\bigcap_{i=1}^{n}G(x_i)=\phi$, 故$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\phi$. 对$u\in C$, 令

$$p_i(u)=d(u,A_i)\qquad(i=1,\cdots,n);\quad p(u)=\sum_{i=1}^{n}p_i(u),$$

$$\lambda_i(u)=q_i(u)/p(u)\qquad(i=1,\cdots,n)$$

则$\lambda_i: C\to[0,1]$连续且$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(u)=1$ $(\forall u\in C)$, 而且$\lambda_i(u)>0$, 当而且仅当$u\notin A_i$. 现定义f: $C\to C$如下:

$$f(u)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(u)u_i\qquad(u\in C).$$

则f连续. 由Brouwer不动点定理, 存在$u_0\in C$, 使得

$$u_0=f(u_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(u_0)u_i$$

记$I=\{i:\lambda_i(u_0)>0\}\neq\phi$．由条件(ii)知

$$u_0=\sum_{i\in I}\lambda_i(u_0)u_i\in\text{co}\{u_i;\ i\in I\}\subset\bigcup_{i\in I}S^{-1}(G(x_i)) \tag{2.2}$$

另一方面，对任一$i\in I$，有$u_0\notin A_i$，从而

$$u_0\notin\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}S^{-1}(G(x_i))$$

这与(2.2)相矛盾．由此矛盾知$\{G(x):x\in X\}$具有限交性质．又若存在$x_0\in X$，使$G(x_0)$是紧集，则对任一$x\in X$，$G(x_0)\cap G(x)$是非空紧集．故

$$\bigcap_{x\in X}G(x)=\bigcap_{x\in X}(G(x_0)\cap G(x))\neq\phi.$$

(Ⅱ)当对每一$x\in X$，$G(x)$是紧开集时，如果定理的结论不成立，则存在$x_1,\cdots,x_n\in X$，使得$\bigcap_{i=1}^{n}G(x_i)=\phi$．令$A_i=Y\backslash G(x_i)(i=1,\cdots,n)$，则$A_i$是紧闭集，且$Y=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$．由引理1.1，对任意的$n$个点$u_1,\cdots,u_n\in E$及任一$S\in C(\text{co}\{u_1,\cdots,u_n\},Y)$，存在$m(1\leqslant m\leqslant n)$及$\{i_1,\cdots,i_m\}\subset\{1,\cdots,n\}$使得(1.1)成立．从而存在$u_0\in\text{co}\{u_{i_1},\cdots,u_{i_m}\}$，使得

$$S(u_0)\in\bigcap_{j=1}^{m}A_{i_j}=Y\backslash\bigcup_{j=1}^{m}G(x_{i_j}).$$

故$S(u_0)\notin\bigcup_{j=1}^{m}G(x_{i_j})$．这与条件(ii)相矛盾．定理得证．

注 (1).在定理2.1中，若取X是E中的子集，$Y=E$；又在条件(ii)中对任给的$x_1,\cdots,x_n\in X$，取$u_i=x_i(i=1,\cdots,n)$，取S为恒等映象，则得Fan在[6]中FKKM定理；

(2) 在定理2.1中取$Y=E$，$X\subset E$，S为恒等映象则得[2]中的广义KKM定理；

(3) 在定理2.1中令E是凸空间，$X\subset E$，$S\in C(X,Y)$是一给定的映象并在条件(ii)中取$(u_1,\cdots,u_n)=(x_1,\cdots,x_n)$，则得Park[11]之定理4，定理8；

(4) 在定理2.1中取Y为H-空间$(Y,\{\Gamma_A\})$(其空义和性质见[3,7])，$X\subset Y$，在条件(ii)中，对$x_1,\cdots,x_n\in X$取E中的$(n-1)$-单形$u_1u_2\cdots u_n$及连续映象使$S:u_1u_2\cdots u_n\to Y$，使

$$S(u_{i_1}\ u_{i_2}\cdots u_{i_m})\subset\Gamma_{\{x_{i_1},\cdots,x_{i_m}\}},$$

其中$\{i_1,\cdots,i_m\}$是$\{1,\cdots,n\}$中任一非空子集．则得Horvath[7]中的H-KKM定理；

(5) 在定理2.1中取Y为H-空间$(Y,\{\Gamma_A\})$，在条件(ii)中对$x_1,\cdots,x_n\in X$，在Y中取相应的$y_1,\cdots,y_n$，又取E中的$(n-1)$-单形$u_1u_2\cdots u_n$及连续映象$S:u_1\cdots u_n\to Y$，使得

$$S(u_{i_1}\cdots u_{i_m})\subset\Gamma_{\{y_{i_1},\cdots,y_{i_m}\}}\subset\bigcup_{j=1}^{m}G(x_{i_j}),$$

其中 $\{i_1,\cdots,i_m\}$是$\{1,\cdots,n\}$的任一非空子集．则得Chang-Ma[3]中的H-KKM定理．

以上的分析表明，定理2.1统一和推广了[2,3,6,7,11]中多种形式的KKM定理，且证明的方法也更为直观和简洁．

由定理2.1可得下面的推论．

推论2.1 设E是具有限维Euclid拓扑的线性空间，$X\subset E$，Y是一拓扑空间，映象$G:X\to 2^Y$满足条件：

(i) $\forall x\in X,G(x)$是是紧闭（或紧开）集；

(ii) 对任意的有限集$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，存在$S\in C(\text{co}\{x_1,\cdots,x_n\},Y)$，使得$\forall m(1\leqslant m$

$\leqslant n$)及任意的$\{i_1,\cdots,i_m\}\subset\{1,\cdots,n\}$有

$$S(\mathrm{co}\{x_{i_1},\cdots,x_{i_m}\})\subset\bigcup_{j=1}^{m}G(x_{i_j}).$$

则$\{G(x):x\in X\}$有有限交性质．进一步，在条件“$\forall x\in X,G(x)$是紧闭”下，如果存在$x_0\in X$，使得$G(x_0)$是紧集，则有$\bigcap_{x\in X}G(x)\neq\phi$．

推论2.2 设X是非空集，Y是具有限维Euclid 拓朴的拓扑线性空间（即Y是一拓扑线性空间，且在E每一有限维子空间的诱导拓扑是 Euclid 拓扑)$G:X\to 2^Y$是一映象满足条件：

(i) $\forall x\in X$，$G(x)$是紧闭的；或$G(x)$是紧开的；

(ii) 对任意的有限集$\{x_1,\cdots x_n\}\subset X$,存在相应的$\{y_1,\cdots,y_n\}\subset Y$及$S\in C(\mathrm{co}\{y_1,\cdots,y_n\},Y)$，使得对任意的$m(1\leqslant m\leqslant n)$及任意的$\{i_1,\cdots,i_m\}\subset\{1,\cdots,n\}$有

$$S(\mathrm{co}\{y_{i_1},\cdots,y_{i_m}\})\subset\bigcup_{j=1}^{m}G(x_{i_j}).$$

则$\{G(x):x\in X\}$具有限交性质．如果对任一$x\in X$，$G(x)$是紧闭的，且存在$x_0\in X$，使得$G(x_0)$是紧集．则$\bigcap_{x\in X}G(x)\neq\phi$．

三、若 干 应 用

（Ⅰ） **首先我们应用定理2.1研究匹配问题**

定理3.1（匹配定理） 设X是一非空集，Y是一拓扑空间，E是具有限维 Euclid拓扑的线性空间，设映象$F:X\to 2^Y$满足下列之一条件：

(i) $\forall x\in X,F(x)$是紧开的，且存在有限集 $\{\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_k\}\subset X$，使得 $Y=\bigcup_{i=1}^{k}F(\bar{x}_i)$；

(ii) $\forall x\in X$，$F(x)$是紧闭的，且存在有限集$\{\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_k\}\subset X$，使得$Y=\bigcup_{i=1}^{k}F(\bar{x}_i)$；

(iii) Y是紧拓扑空间，$\forall x\in X$，$F(x)$是紧开的且$Y=F(X)$

则存在有限集$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，使得对任意的$n$个点$u_1,\cdots,u_n\in E$及任意的 $S\in C(\mathrm{co}\{u_1,\cdots,u_n\},Y)$，存在 $m(1\leqslant m\leqslant n)$，和 $\{i_1,\cdots,i_m\}\subset\{1,\cdots,n\}$ 及点 $u_0\in\mathrm{co}\{u_{i_1},\cdots,u_{i_m}\}$ 使得 $S(u_0)\in\bigcap_{j=1}^{m}F(x_{i_j})$．

证 对$x\in X$，令$G(x)=Y\backslash F(x)$．在条件(i)～(iii)下，$G(x)$分别为紧闭，紧开和闭的．若结论不成立，则对任意的有限集 $\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，存在 $u_1,\cdots,u_n\in E$ 及 $S\in C(\mathrm{co}\{u_1,\cdots,u_n\},Y)$，使得$\forall m(1\leqslant m\leqslant n)$和任意的$\{i_1,\cdots,i_m\}\subset\{1,\cdots,n\}$有

$$S(\mathrm{co}\{n_{i_1},\cdots,n_{i_m}\})\cap(\bigcap_{j=1}^{m}F(x_{i_j}))=\phi.$$

故$S(\mathrm{co}\{u_{i_1},\cdots,u_{i_m}\})\subset\bigcup_{j=1}^{m}G(x_{i_j})$．由定理2.1知 $\{G(x):x\in X\}$ 具有限交性质．于是对于情形(i)，(ii)，我们有$\bigcap_{i=1}^{k}G(\bar{x}_i)\neq\phi$．从而 $Y\backslash\bigcup_{i=1}^{k}F(\bar{x}_i)=\bigcap_{i=1}^{k}(Y\backslash F(\bar{x}_i))=\bigcap_{i=1}^{k}G(\bar{x}_i)\neq\phi$． 故 $Y\neq\bigcup_{i=1}^{k}F(\bar{x}_i)$这与条件(i)，(ii)都矛盾．

对情形(iii)，因Y紧，故得$\bigcap_{x\in X}G(x)\neq\phi$，从而$Y\neq\bigcup_{x\in X}F(x)=F(X)$。这又与条件(iii)相矛盾．定理得证．

定理3.2 设E是具有限维Euclid拓扑的线性空间，$X\subset E$，Y是拓扑空间，$F:X\to 2^Y$满足下之一条件：

(i) $\forall x\in X$，$F(x)$紧开，且存在有限集$\{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_k\}\subset X$，使得$Y=\bigcup_{i=1}^{k}F(\bar{x}_i)$；

(ii) $\forall x\in X$，$F(x)$紧闭，且存在有限集$\{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_k\}\subset X$，使得$Y=\bigcup_{k=1}^{k}F(\bar{x}_i)$；

(iii) Y紧，$\forall x\in X$，$F(x)$开，且$F(x)=Y$。

则存在有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset X$，使得对任意的$S\in C(\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}, Y)$，存在$m$ $(1\leqslant m\leqslant n)$和$\{i_1,\cdots,i_m\}\subset\{1, \cdots, n\}$及$x_0\in\mathrm{co}\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}\}$有$S(x_0)\in\bigcap_{j=1}^{m}F(x_{i_j})$。

(Ⅱ) 下面给出对重合问题和不动点问题的应用

定理3.3（重合点定理） 设E是具有限维Euclid拓扑的线性空间，X是E中的凸集，Y是一拓扑空间；设F，G：$X\to 2^Y$是二映象，使得$\forall x\in X$，$F(x)\subset G(x)$，$\forall y\in Y$，$G^{-1}(y)$是凸的．再设定理3.1的条件(i)，(ii)，(iii)中之一被满足．则存在有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset X$，使得对任一$S\in C(\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}, Y)$，存在$x_0\in\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}$使得$S(x_0)\in G(x_0)$。又若$E$是具有限维Euclid拓扑的拓扑线性空间，则对任一$S\in C(X, Y)$，存在$x_0\in\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}$使得$S(x_0)\in G(x_0)$。

证 由定理3.2，存在有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset X$，使得对任一$S\in C(\mathrm{co}\{x_1,\cdots, x_n\},Y)$，存在$m(1\leqslant m\leqslant n)$，$\{i_1, \cdots, i_m\}\subset\{1,\cdots,n\}$及$x_0\in\mathrm{co}\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}\}$使得$S(x_0)\in\bigcap_{j=1}^{m}F(x_{i_j})$，从而$S(x_0)\in\bigcap_{j=1}^{m}G(x_{i_j})$。故$x_{i_j}\in G^{-1}(S(x_0))(j=1, 2, \cdots, m)$。因$G^{-1}(S(x_0))$凸，故$x_0\in G^{-1}(S(x_0))$。于是有$S(x_0)\in G(x_0)$。得证．

注 定理3.3推广了著名的Browder不动点定理．

定理3.4(不动点定理) 设E是具有限维Euclid拓扑的线性空间，X是E中的凸集，Y是一拓扑空间，映象A，B：$Y\to 2^X$满足条件：$\forall y\in Y$，$A(y)\subset B(y)$，$B(y)$凸．如果下之一条件成立：

(i) $\forall x\in X$，$A^{-1}(x)$紧开，且存在有限集$\{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_k\}\subset X$，使得$Y=\bigcup_{i=1}^{k}A^{-1}\bar{x}_i$；

(ii) $\forall x\in X$，$A^{-1}(x)$紧闭，且存在有限集$\{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_k\}\subset X$，使得$Y=\bigcup_{i=1}^{k}A^{-1}\bar{x}_i$；

(iii) Y紧，$\forall x\in X$，$A^{-1}(x)$开且$\forall y\in Y$，$A(y)\neq\phi$。

则存在有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset X$，使对任一$S\in C(\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}, Y)$，存在$x_0\in\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}$满足$x_0\in B(S(x_0))$．又若$X$是具有限维Euclid拓扑的拓扑线性空间，则$\forall S\in C(X,Y)$，存在$x_0\in\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}$，使得$x_0\in B(S(x_0))$。

证 令$F(x)=A^{-1}(x)$，$G(x)=B^{-1}(x)$，并应用定理3.3可证．

(Ⅱ) 对极大极小问题和变分不等式问题的应用

定理3.5(极大极小不等式定理) 设E是具有限维 Euclid 拓扑的线性空间，X是E中的凸集，$\mathscr{F}(X)$表X的一切非空有限集的族，Y是一拓扑空间；设函数φ,ψ: $X\times Y\to R\cup\{\pm\infty\}$满足条件：

(i) $\varphi(x, y)\leqslant\psi(x, y)\quad(\forall(x, y)\in X\times Y)$；

(ii) $x\mapsto\psi(x, y)$拟凹；

(iii) $y\mapsto\varphi(x, y)$下半连续（或者上半连续）.

则 $\sup\limits_{B\in\mathscr{F}(x)}\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x\in B}\varphi(x, y)\leqslant\sup\limits_{B\in\mathscr{F}(x)}\inf\limits_{S\in C(\mathrm{co}\{B\},Y)}\sup\limits_{x\in\mathrm{co}\{B\}}\psi(x, S(x))$.

证 记 $\alpha=\sup\limits_{B\in\mathscr{F}(x)}\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x\in B}\varphi(x, y)$,

$\beta=\sup\limits_{B\in\mathscr{F}(x)}\inf\limits_{S\in C(\mathrm{co}\{B\},Y)}\sup\limits_{x\in\mathrm{co}\{B\}}\psi(x, S(x))$

如果$\alpha>\beta$，取$r\in R$，使$\beta<r<\alpha$. 定义F，G: $X\to 2^Y$,

$F(x)=\{y\in Y: \phi(x, y)>r\}$(或$\{y\in Y: \varphi(x, y)\geqslant r\}$),

$G(x)=\{y\in Y: \psi(x, y)\geqslant r\}$.

于是 $\forall x\in X$，$F(x)\subset G(x)$. 由条件(ii)，$\forall y\in Y$，$G^{-1}(y)$是凸的；由(iii)，$\forall x\in X$，$F(x)$是开（或闭）集. 另由r的定义，存在有限集$B=(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_k)\in\mathscr{F}(X)$，使得

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in B}\varphi(x, y)>r,$$

从而对任一$y\in Y$，存在$\bar{x}_i\in B$，使得$\varphi(\bar{x}_i, y)>r$，即$y\in F(\bar{x}_i)$. 故$Y=\bigcup\limits_{i=1}^{k}F(\bar{x}_i)$. 由定理3.3，存在$\tilde{B}\in\mathscr{F}(X)$，对任一$S\in C(\mathrm{co}\{\tilde{B}\}, Y)$，存在 $x_0\in\mathrm{co}\{\tilde{B}\}$，使得 $S(x_0)\in G(x_0)$，即$\psi(x_0, S(x_0))\geqslant r$. 由此得知

$\beta=\sup\limits_{B\in\mathscr{F}(x)}\inf\limits_{S\in C(\mathrm{co}\{B\},Y)}\sup\limits_{x\in\mathrm{co}\{B\}}\psi(x, S(x))\geqslant r$.

这与所设$r>\beta$相矛盾. 因而定理的结论得证.

定理3.6 设E是具有限维Euclid拓扑的线性空间，X是E的凸子集，Y是紧拓扑空间，φ，ψ: $X\times Y\to R\cup\{\pm\infty\}$满足条件

(i) $\varphi(x, y)\leqslant\psi(x, y)\quad(\forall(x, y)\in X\times Y)$；

(ii) $x\mapsto\psi(x, y)$拟凹；

(iii) $y\mapsto\varphi(x, y)$下半连续；

则存在$\bar{y}\in Y$，使得

$$\begin{aligned}\sup_{x\in X}\varphi(x, \bar{y})&=\min_{y\in Y}\sup_{x\in X}\varphi(x, y)\\&\leqslant\sup_{B\in\mathscr{F}(X)}\inf_{S\in C(\mathrm{co}\{B\},Y)}\sup_{x\in\mathrm{co}\{B\}}\psi(x, S(x)).\end{aligned}$$

证 令$r=\sup\limits_{B\in\mathscr{F}(X)}\inf\limits_{S\in C(\mathrm{co}\{B\},Y)}\sup\limits_{x\in\mathrm{co}\{B\}}\psi(x, S(x))$.

如果$\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x\in X}\varphi(x, y)>r$，定义映象$F$，$G$: $X\to 2^Y$如下：

$$F(x)=\{y\in Y: \varphi(x, y)>r\}\qquad(x\in X)$$
$$G(x)=\{y\in Y: \psi(x, y)>r\}\qquad(x\in X)$$

则显然$\forall x\in X$，$F(x)$是开的；$\forall y\in Y$，$G^{-1}(y)$是凸的，且$F(x)\subset G(x)$. 另外，由r的取法

知，存在$x_* \in X$，使得对一切$y \in Y$有$\varphi(x_*, y) > r$，即$Y = F(X)$。于是由定理3.3，存在$B \in \mathscr{F}(x)$，对任给的$S \in C(\mathrm{co}\{B\}, Y)$，存在$x_0 \in \mathrm{co}\{B\}$，使得$S(x_0) \in G(x_0)$，即$\psi(x_0, S(x_0)) > r$，故有

$$\sup_{B \in \mathscr{F}(X)} \inf_{S \in C(\mathrm{co}\{B\}, Y)} \sup_{x \in \mathrm{co}\{B\}} \psi(x, S(x)) > r.$$

矛盾。由此矛盾得证$\inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} \varphi(x, y) \leqslant r$。因$y \mapsto \varphi(x, y)$下半连续，故$\sup\limits_{x \in X} \varphi(x, y)$关于$y$下半连续。因$Y$紧，故存在$\bar{y} \in Y$，使得$\sup\limits_{x \in X} \varphi(x, \bar{y}) = \inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} \varphi(x, y) = \min\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} \varphi(x, y)$。结论得证。

（Ⅳ）对截口问题的应用

定理3.7 设E是具有限维Euclid拓扑的线性空间，$X \subset E$，Y是紧拓扑空间，$B \subset X \times Y$满足条件：

（i） $\forall x \in X$，$\{y \in Y: (x, y) \in B\}$是闭的；

（ii） 对任意的有限集$\{x_1, \cdots, x_n\} \subset X$，存在$S \in C(\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n\}, Y)$使得对任意的非空集$I \subset \{1, \cdots, n\}$及任一$x_0 \in \mathrm{co}\{x_i: i \in I\}$，存在$i \in I$，使得$(x_i, S(x_0)) \in B$。则存在$\bar{y} \in Y$，使得$(x, \bar{y}) \in B$，$\forall x \in X$。

证 定义映象$G: X \to 2^Y$，$G(x) = \{y \in Y: (x, y) \in B\}$。易证$G$满足推论2.1的条件。于是由推论2.1，$\{G(x): x \in X\}$具有限交性质。因$Y$紧，故$\bigcap\limits_{x \in X} G(x) \neq \phi$。取$\bar{y} \in \bigcap\limits_{x \in X} G(x)$，则有$(x, \bar{y}) \in B$，$\forall x \in X$。证毕。

参 考 文 献

[1] C. Bardaro and R. Ceppitelli, Some further generalization of Kuaster-Kuratoowski-Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **132** (1988), 484—490.

[2] Chang Shihsen and Zhang Ying, Generalized KKM theorem and variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **159** (1991), 208—223.

[3] Chang Shihsen and Ma Yihai, Generalized KKM theorem on H-space with applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **163** (1992), 406—421.

[4] 张石生，《变分不等式和相补问题理论及应用》，上海科技文献出版社，上海(1991).

[5] Ky Fan, Some properties of convex sets related to fixed point theorems, *Math. Ann.*, **266** (1984), 519—537.

[6] Ky Fan, A generalization of Tychonoff's fixed point theorems, *Math. Ann.*, **42** (1961), 303—310.

[7] C. Horvath, Some results on multi-valued mappings and inequalities without convexity, in *Nonlinear and Convex Analysis, Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* Series V. **107**, Springer Verlag(1987).

[8] W.K. Kim, Some applications of the Kakutani fixed point theorem, *J. Math. Anal. Appl.*, **121** (1987), 119—122.

[9] B. Knaster, B. Kuratowski and S. Mazurkiewicz, Ein beweis des fixpunktsatzas fur *n*-dimensionale simplexe, *Fund. Math.*, **14** (1929), 132—137.

[10] M. Lassonde, On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and

related topic, *J. Math. Anal. Appl.*, 97 (1983), 151—201.
[11] S. Park, Generalizations of Ky Fan's matching theorems and their applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 141 (1989), 164—176.

On a Class of New KKM Theorem with Applications

Zhang Shisheng

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu* 610064, *P.R, China*)

Zhang Xian

(*Department of Mathematics, Anhui Normal Uniuersity, Wuhu* 241000, *P.R. China*)

Abstract

In this paper, a class of new KKM theorem is obtained which unifies and improves the corresponding results in[2, 3, 6, 7, 11]. As applications, we utilize our result to obtain some matching theorem, coincidence theorem, fixed point theorem, mini-max inequality theorem and section theorem.

Key words KKM theorem, matching theorem, fixed point, minimax inequality