应用数学和力学, 第 25 卷 第 2 期(2004 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 02_0150_09

关于微分包含的周期解及其应用*

李国成[1], 薛小平[1], 宋士吉[2]

(1. 哈尔滨工业大学 数学系, 哈尔滨 150001;
2. 清华大学 自动化系, 北京 100084)

(张石生推荐)

摘要: 研究了一类发展包含的周期问题, 其结果应用于建立一类半线性微分包含周期解的存在性定理• 给出了半线性微分包含端点解的存在性定理和强松驰定理, 并且应用于周期反馈控制系统•

关 键 词: 发展包含; 半线性微分包含; 周期解; 连续选择; 紧算子; 不动点

中图分类号: O175.14 文献标识码: A

1 引言及预备知识

关于微分包含周期问题的所有早期工作都是在有限维空间中以及“凸”情形下讨论的, 可参见 Aubin_Cellina[1], Haddad_Lasry[2], Macki_Nistri_Zecca[3] 和 Plaskacz[4]• 对于有限维空间中的“非凸”情形可参见新近的工作 Hu_Papageorgiou[5, 6], De Blasi_G rniewicz_Piangiani[7]• 本文研究了发展包含的周期问题, 并把所得到的结果应用于建立一类半线性微分包含周期解的存在定理• 进一步, 给出了这类半线性微分包含端点解的存在定理和强松驰定理, 并讨论了在某些周期反馈控制系统中的应用•

设 X 是一个可分的 Banach 空间, $T = [0, b]$• 由 $P_{f(c)}(X)$, $P_{(w)k(c)}(X)$ 分别表示 X 的所有非空闭(凸) 子集的全体和所有非空(弱) 紧(凸) 子集的全体• 关于多值函数 $F: T \to P_f(X)$ 的可测性有下述等价条件:

1) 对任意 $y \in X$, $t \to d(y, F(t)) = \inf\left\{ \| y - x \| : x \in F(t)\right\}$ 是可测的;

2) $\mathrm{Gr}F = \left\{(t, x) \in T \times X, x \in F(t)\right\} \in \Sigma \times B(X)$, 这里 Σ 是 T 的 Lebesgue σ_代数, $B(X)$ 是 X 的 Borel σ_代数(图象可测);

3) 存在可测函数序列 $f_n: T \to X$, $n \geqslant 1$, 使得 $F(t) = \overline{\left\{f_n(t): n \geqslant 1\right\}}$, $t \in T$ (Casting 表示)•

用 S_F^1 表示 $F(\cdot)$ 的可积选择全体, 在一般情况下 S_F^1 可以是空的• S_F^1 是非空的充分必要条件是 $t \to \inf\left\{ \| x \| : x \in F(t)\right\}$ 是 L^1_可积的• S_F^1 是闭的, 并且 S_F^1 是凸的充分必要条件是对几乎所有的 $t \in T$, $F(\cdot)$ 是凸的• 利用 S_F^1 可以定义多值函数 $F(\cdot)$ 的积分:

---

* 收稿日期: 2001_07_03; 修订日期: 2003_10_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271035); 国家 973 资助项目(2002CB312205)
作者简介: 李国成(1964—), 男, 河北承德人, 副教授, 博士(E_mail: xyliguocheng@ sohu. com).
薛小平(联系人). Tel: 86_451_86471744(o), 86_451_86416030(h); E_mail: xiaopingxue@ 263. net

$$\int_T F(t)\,\mathrm{d}t = \left\{\int_T f(t)\,\mathrm{d}t : f \in S_F^1\right\}\bullet$$

若 $F(\cdot)$ 可测并且 $|F(t)| = \sup\left\{\|x\| : x \in F(t)\right\}$ 是 L^p_可积的$(p \geqslant 1)$, 则称 $F(\cdot)$ 是 L^p_可积有界的• 在 $P_f(X)$ 上定义 Hausdorff 距离:

$$h(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a - b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|b - a\|\right\}, \qquad A, B \in P_f(X)\bullet$$

如果 $F(\cdot)$ 在 Hausdorff 距离下连续, 则称 $F(\cdot)$ 是 h_连续的• $L^1(T, X)$ 的子集 S 称为可分解的, 若对任意$(f_1, f_2, A) \in S \times S \times \Sigma$, 有 $f_1\chi_A + f_2\chi_{A^c} \in S$, 这里 χ_A 表示 A 的特征函数•

设 Y, Z 是 Hausdorff 拓扑空间• 设 $G: Y \to 2^Z \setminus \varnothing$ 是一多值函数• 我们称 $G(\cdot)$ 是上半连续(下半连续)的, 若对 Z 中的任意非空闭集 $C \subseteq Z$, $G^-(C) = \left\{y \in Y: G(y) \cap C \neq \varnothing\right\}$ $\left(G^+(C) = \left\{y \in Y: G(y) \subseteq C\right\}\right)$ 是 Y 中的闭集• 当 Z 是正规的, 则 $G: Y \to P_f(Z)$ 上半连续蕴含 $G(\cdot)$ 的图象是 $Y \times Z$ 中的闭集, 反之一般是不对的• 若 Y、Z 是两个距离空间, 则上面的下半连续性的定义等价于对任意 $z \in Z$, $y \to d_Z(z, G(y))$ 是上半连续的• 假设$\overline{G(Y)}$ 是紧的, 则 $G(\cdot)$ 上半连续等价于 $G(\cdot)$ 具有闭图象• 详细的可参见 De Blasi_Myjak[8], Klein_Thompson[9]•

设 R^N 是实 N_维欧几里德空间• 设

$$W^{1,p}(T, R^N) = \left\{x(\cdot) \in C(T, R^N): x'(\cdot) \in L^p(T, R^N)\right\} \qquad (p = 1, 2)$$

是 Sobolev 空间, 具有范数

$$\|x\|_{1,p} = \left(\int_T \|x(t)\|_p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} + \left(\int_T \|x'(t)\|^p\right)^{1/p},$$

则 $W^{1,1}(T, R^N)$ 可以紧嵌入到 $L^1(T, R^N)$ 中, $W^{1,2}(T, R^N)$ 可以紧嵌入到 $C(T, R^N)$ 中•

2　发展包含的周期问题

设 U 是从 X 到 X 的有界线性算子, 用 $\rho(U)$ 表示 U 的正则集• 设 A 是等度连续有界线性算子半群 $U(t)$, $t \geqslant 0$ 的无穷小生成元, 则存在常数 $\omega \geqslant 0$, $M \geqslant 1$, 使得对于 $t \geqslant 0$, $\|U(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$• 考察定义在 $T \times X$ 上的发展包含的周期问题:

$$\begin{cases} x'(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)), & \text{a.e. 在 } T \text{ 上}, \\ x(0) = x(b), \end{cases} \tag{1}$$

这里 $F: T \times X \to 2^X$ 是一多值函数• 若 $x(\cdot) \in C(T, X)$ 满足:

$$x(t) = U(t)x(0) + \int_0^t U(t - s)f(s)\,\mathrm{d}s, \quad x(0) = x(b), \qquad f \in S^1_{F(\cdot, x(\cdot))},$$

则称 $x(\cdot)$ 为发展包含(1)的 mild 周期解• 下面给出"凸"情形下解的存在定理•

定理 2.1　设 $F: T \to P_{kc}(X)$ 是一多值函数使得: 对每个 $x \in X$, $F(\cdot, x)$ 是图象可测的, 在 T 上几乎处处满足 $F(t, x) \subseteq G(t)$, 这里 $G: T \to P_{wkc}(X)$ 是 L^1_可积有界的; 对每个 $t \in T$, $F(t, \cdot)$ 是弱弱上半连续的; $1 \in \rho(U(b))$• 则问题(1)有解•

证明　设 $\gamma: T \times L^1(T, X) \to X$ 是一个积分算子, 定义如下:

$$\gamma(f)(t) = U(t)[I - U(b)]^{-1}\int_0^b U(b - s)f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t U(t - s)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

则对每个 $t \in T$, $\gamma(\cdot)(t)$ 是从 $L^1(T, X)_w$ 到 X_w 的连续线性算子• 又设 $\Gamma: C(T, X) \to 2^{C(T, X)}$ 是如下定义的多值算子:

$$\Gamma x = \left\{y \in C(T, X): y(t) = \gamma(f)(t), f \in S^1_{F(\cdot, x(\cdot))}\right\}\bullet$$

容易看到: 一个函数 $x(\cdot) \in C(T, X)$ 是问题(1)解的充要条件为它是 Γ 的不动点•

设 $W=\{x(\cdot)\in C(T,X): x(t)=\gamma(f)(t), f\in S_G^1\}$. 我们将证 W 是 $C(T,X_w)$ 中的紧子集. 设 $G_t:[0,t]\to 2^X$, $G_t(s)=U(t-s)G(s)=\{U(t-s)g: g\in G(s)\}$, 容易验证 $G_t(s)\in P_{wkc}(X)$, $G_t(\cdot)$ 在 $[0,t]$ 上 L^1-可积有界. 由 Papageorgiou[10] 定理 2.1 的注(3), 对每个 $x\in W$ 及 $t\in T$ 有:

$$x(t)=\gamma(f)(t)\in U(t)[I-U(b)]^{-1}\int_0^b G_b(s)\,ds+\int_0^t G_t(s)\,ds\in P_{wkc}(X).$$

因此对每个 $t\in T$, $\{x(t): x(\cdot)\in W\}$ 是 X 中的相对弱紧子集. 为了看到 W 的等度连续性, 我们进行如下的推导. 对每个 $x\in W$, $t_1, t_2\in T$, $t_1<t_2$ 有

$$\|x(t_2)-x(t_1)\|\leqslant M_1\|U(t_2)-U(t_1)\|+\int_0^b\|U(t_2-s)-U(t_1-s)\|\cdot|G(s)|\,ds+2Me^{\omega b}\int_{t_1}^{t_2}|G(s)|\,ds,$$

这里

$$|G(s)|=\sup\{\|u\|: u\in G(s)\},$$

$$M_1=Me^{\omega b}\|[I-U(b)]^{-1}\|\int_0^b|G(s)|\,ds.$$

由 $|G(\cdot)|$ 的绝对连续性和 $U(\cdot)$ 在 T 上的等度连续性, 则 W 是 $C(T,X)$ 中的等度连续集, 从而也是 $C(T,X_w)$ 中的等度连续集. 下证 W 是 $C(T,X_w)$ 中的闭子集. 设 $\{x_\alpha(\cdot)\}\subseteq W$ 是 $C(T,X_w)$ 中的任意网, 使得 $x_\alpha(\cdot)\to x(\cdot)$, 则对每个 α, 有 $x_\alpha(t)=\gamma(f_\alpha)(t)$, $f_\alpha\in S_G^1$. 由[10] 定理 2.1, S_G^1 是弱紧集, 则我们可获得 $\{f_\alpha\}$ 的子网 $\{f_\beta\}$ 使得 $f_\beta\xrightarrow{w} f(\cdot)\in S_G^1$. 因此对每个 $t\in T$, 有 $x_\beta(t)=\gamma(f_\beta)(t)\xrightarrow{w}\gamma(f)(t)$. 但 $x_\alpha(\cdot)\to x(\cdot)$(在 $C(T,X_w)$ 中), 因此 $x(t)=\gamma(f)(t)$, W 是闭集(在 $C(T,X_w)$ 中). 由 Arzelà-Ascoli 定理, W 是 $C(T,X_w)$ 中的紧子集.

因为 X 是可分的, 从而 $L^1(T,X)$ 是可分的, 因此弱紧集 S_G^1 在弱拓扑下是可距离化的(见 Dunford-Schwartz[11], 定理3). 但 W 和 S_G^1 是同构的, 因此 W 是 $C(T,X_w)$ 中的可距离化子集.

设 Γ_1 是 Γ 在 W 上的限制. 则对所有 $x\in W$, $\Gamma_1(x)\in P_{kc}(W)$, 并且 $\Gamma_1: W\to P_{kc}(W)$ 是上半连续的, 这里 W 赋予 $C(T,X_w)$ 中的拓扑. $\Gamma_1(\cdot)$ 的紧性和凸性是明显的. 为了看到 $\Gamma_1(\cdot)$ 的非空性, 进行如下的推导. 设 $x\in W$, $\{s_n\}$ 是阶梯函数, 使得 $s_n(t)\to x(t)$, 则由 $F(\cdot,x)$ 的图象可测性, 对任意 $n\geqslant 1$, $F(\cdot,s_n(\cdot))$ 存在可测选择 $f_n(\cdot)\in S_G^1$, 由 S_G^1 的弱紧性, 可以假定 $f_n\xrightarrow{w} f$, 则从[12] 的定理 3.1, 以及 $F(t,\cdot)$ 的弱弱上半连续, 有

$$f(t)\in\overline{\mathrm{conv}}\,w-\overline{\lim}\{f_n(t)\}\subseteq\overline{\mathrm{conv}}\,w-\overline{\lim}F(t,s_n(t))\subseteq F(t,x(t)),\quad \text{a.e. 在 } T \text{ 上},$$

因此 $f\in S^1_{F(\cdot,x(\cdot))}$, 这就证明了 $\Gamma_1(\cdot)$ 取值的非空性. 为了验证 $\Gamma_1(\cdot)$ 的上半连续性, 我们需要证明 $\Gamma_1(\cdot)$ 具有闭图象. 设 $\{x_n\},\{y_n\}\subseteq W$, 且 $x_n\to x$, $y_n\to y$, 这里 $y_n\in\Gamma_1(x_n)$, $y_n(t)=\gamma(f_n)(t)$, $f_n(\cdot)\in S^1_{F(\cdot,x_n(\cdot))}$. 由 S_G^1 的弱紧性, 可以假定 $f_n\xrightarrow{w} f$, $f(\cdot)\in S_G^1$. 根据 Mazur 定理, 我们可以找到 $z_n(\cdot)\in\mathrm{conv}\bigcup_{k\geqslant n}f_k(\cdot)$, 使得 $z_n\to f(\cdot)$. 不妨假定 $z_n(t)\to f(t)$, $t\in T\setminus N$, $\mu(N)=0$, 这里 μ 是 Lebesgue 测度. 固定 $t\in T\setminus N$, 由 $F(t,\cdot)$ 弱弱上半连续性, 对于 X 中的零点闭凸弱邻域 V, 存在正整数 n, 当 $k\geqslant n$ 时, 有

$$F(t,x_k(t))\subseteq F(t,x(t))+V\Rightarrow\overline{\mathrm{conv}}\bigcup_{k\geqslant n}F(t,x_k(t))\subseteq F(t,x(t))+V\Rightarrow f(t)\in F(t,x(t))+V.$$

但 V 是任意的, 因此对每个 $t\in T\setminus N$, $f(t)\in F(t,x(t))\Rightarrow f(\cdot)\in S^1_{F(\cdot,x(\cdot))}$. 因此 $\Gamma_1(\cdot)$

具有闭图象, 这表明 $\Gamma_1(\cdot)$ 是上半连续的. 应用Kakutani不动点定理, 存在 $x(\cdot) \in W$, 使得 $x \in \Gamma_1(x)$, 因此 $x(\cdot)$ 是(1) 的解. □

下面我们给出"非凸"结果.

定理2.2　设 $F: T \to P_{wk}(X)$ 是一多值函数使得: $(t, x) \to F(t, x)$ 是图象可测的, 在 T 上几乎处处满足 $F(t, x) \subseteq G(t)$, 这里 $G: T \to P_{wkc}(X)$ 是 L^1_可积有界的; 对每个 $t \in T$, $F(t, \cdot)$ 从 X_w 到 X 是下半连续的; $1 \in \rho(U(b))$. 则问题(1) 有解.

证明　考虑定理2.1 中的集 W. 我们已经看到 W 是 $C(T, X_w)$ 的紧距离化子集. 下面考察多值Nemitsky算子 $N: W \to 2^{L^1(T,X)}$, $N(x) \in S^1_{F(\cdot, x(\cdot))}$, 我们将证明 $N(\cdot)$ 具有非空闭可分解值并且从 W 到 $L^1(T, X)$ 是下半连续的, 这里 W 赋予 $C(T, X_w)$ 中的拓扑.

$N(\cdot)$ 取值的非空性、闭性、可分解性是容易验证的. 为了验证 $N(\cdot)$ 的下半连续性, 我们需要证明对于任意 $u \in L^1(T, X)$, 定义在 W 上的实值函数 $x \to d(u, N(x))$ 是上半连续的. 下面的等式是需要的:

$$d(u, N(x)) = \inf[\|u - v\|_1: v \in N(x)] =$$
$$\inf\left[\int_0^b \|u(t) - v(t)\| \mathrm{d}t: v \in N(x)\right] =$$
$$\int_0^b \inf[\|u(t) - v\|: v \in F(t, x(t))] \mathrm{d}t =$$
$$\int_0^b d(u(t), F(t, x(t))) \mathrm{d}t \qquad (\text{见}[13] \text{ 的定理 } 2.2).$$

我们将证明对于任意的 $\lambda \geqslant 0$, 截集 $U_\lambda = \left\{x \in W: d(u, N(x)) \geqslant \lambda\right\}$ 在 W 中是闭集. 为此设 $\left\{x_n\right\}_{n \geqslant 1} \subseteq U_\lambda$, $x_n \to x$ (在 $C(T, X_w)$ 中), 则 $x_n(t) \xrightarrow{w} x(t)$ 在 T 上处处成立. 由于 $F(t, \cdot)$ 是从 X_w 到 X 是下半连续的, 则 $x \to d(u(t), F(t, x))$ 在 X_w 上是上半连续的, 因此由 Fatou 引理, 有

$$\lambda \leqslant \overline{\lim}\, d(u, N(x_n)) = \overline{\lim} \int_0^b d(u(t), F(t, x_n(t))) \mathrm{d}t \leqslant$$
$$\int_0^b \overline{\lim}\, d(u(t), F(t, x_n(t))) \mathrm{d}x \leqslant$$
$$\int_0^b d(u(t), F(t, x_n(t))) \mathrm{d}t = d(u, N(x)).$$

因此 $x \in U_\lambda$, 这就证明了 $N(\cdot)$ 是下半连续的. 根据 Bressan_Colombo[14] 的连续选择定理2.1.3, 获得了连续选择 $r: W \to L^1(T, X)$, 使得对任意 $x \in W$, $r(x) \in N(x)$. 令 $\Phi(x)(t) = \gamma(r(x))(t)$. 注意到 $\Phi(x)$ 是绝对连续的, $x \to \Phi(x)(\cdot)$ 是从 W 到 W 连续的. 根据Tichonoff不动点定理, 存在 $x \in W$, 使得 $x = \Phi(x)$, 则 $x(\cdot)$ 是(1) 的解. □

3　半线性微分包含的周期问题

作为发展包含的一个特例, 在有限维空间 R^N 中讨论下述半线性微分包含的周期问题:

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) \in F(t, x(t)), & \text{a.e. 在 } T \text{ 上}, \\ x(0) = x(b), \end{cases} \tag{2}$$

利用定理2.1~2.2, 我们可以直接得到下述两个定理:

定理3.1　设 $F: T \times R^N \to P_{kc}(R^N)$ 是一多值函数使得: 对任意 $x \in R^N$, $F(\cdot, x)$ 是图象可测的, 且在 T 上几乎处处满足 $F(t, x) \subseteq G(t)$, 这里 $G: T \to P_{kc}(R^N)$ 是 L^2_可积有界的;

$F(t,\cdot)$ 是上半连续的;则问题(2) 的解集是 $C(T,R^N)$ 中的非空有界闭子集•

定理 3.2　设 $F: T\times R^N \to P_k(R^N)$ 是一多值函数使得:$(t,x)\to F(t,x)$ 是图象可测的,且在 T 上几乎处处满足 $F(t,x)\subseteq G(t)$,这里 $G: T\to P_{kc}(R^N)$ 是 L^1_可积有界的;$x\to F(t,x)$ 是上半连续的;则问题(2) 有解 $x(\cdot)\in W^{1,1}(T,R^N)$•

下面研究端点问题:

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)\in \operatorname{ext}F(t,x(t)), & \text{a. e. 在 } T \text{ 上}, \\ x(0)=x(b), \end{cases} \tag{3}$$

这里 $\operatorname{ext}F(t,x)$ 表示 $F(t,x)$ 的端点集•　我们有下述定理:

定理 3.3　设 $F: T\times R^N\to P_{kc}(R^N)$ 是一多值函数使得:对任意 $x\in R^N$, $t\to F(t,x)$ 是可测的,且在 T 上几乎处处满足 $F(t,x)\subseteq G(t)$,这里 $G: T\to P_{kc}(R^N)$ 是 L^2_可积有界的;对所有的 $t\in T$, $x\to F(t,x)$ 是 h_连续的,则问题(3) 有解 $x(\cdot)\in W^{1,2}(T,R^N)$•

证明　设 $W_P^{1,1}(T,R^N)=\left\{x\in W^{1,1}(T,R^N): x(0)=x(b)\right\}$, $L(x)=x'+x$, $x\in W_P^{1,1}(T,R^N)$•　类似于 Li_xue[15] 的定理 3.1 中的证明,$L: W_P^{1,1}(T,R^N)\to L^1(T,R^N)$ 存在逆算子 $L^{-1}: L^1(T,R^N)\to L^1(T,R^N)$,且 L^{-1} 是全连续的•　令 $K=L^{-1}(S_G^1)$,同[15] 定理 4.1 中的证明一样,K 是 $C(T,R^N)$ 中的紧凸子集•　利用 Tolstonogov[16] 的结论 5.2,可以获得一个连续选择 $g: K\to L^1(T,R^N)$,使得对于任意 $x\in K$, $g(x)(t)\in \operatorname{ext}F(t,x(t))$ 在 T 上几乎处处成立,则 $L^{-1}g: K\to K$ 是一个紧算子•　利用 Schauder 不动点定理得到 $x\in K$ 使得 $x=L^{-1}g(x)$,则 $x(\cdot)\in W^{1,2}(T,R^N)$ 是(3) 的一个解•　□

如果加强关于 F 的假定,可以证明问题(3) 的解集在问题(2) 的解集中稠密(取 $C(T,R^N)$_拓扑),即强松驰定理•　为今后方便,用 S、S_e 分别表示(2) 和(3) 的解集•

定理 3.4　设 $F: T\times R^N\to P_{kc}(R^N)$ 是一多值函数使得:对任意 $x\in R^N$, $t\to F(t,x)$ 是可测的,且在 T 上几乎处处满足 $F(t,x)\subseteq G(t)$,这里 $G: T\to P_{kc}(R^N)$ 是 L^2_可积有界的;$h(F(t,x_2),F(t,x_1))\leqslant k\|x_2-x_1\|$, $0\leqslant k<1$,则 S_e 是非空的,且 $\overline{S_e}=S$•

证明　S_e 的非空性可从定理 3.3 得到•　下证稠密性•　设 $x\in S$,则由定义我们可以找到 $f\in L^1(T,R^N)$, $f(t)\in F(t,x(t))$ 在 T 几乎处处成立并且满足:

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)=f(t), & \text{a. e. 在 } T \text{ 上}, \\ x(0)=x(b), \end{cases}$$

设 $K=L^{-1}(S_G^1)$,则 K 是 $C(T,R^N)$ 的紧凸子集•　给定 $y\in K$ 和 $\varepsilon>0$,定义多值函数:

$$\Gamma_\varepsilon(t)=\left\{u\in F(t,y(t)): \|f(t)-u\|<\varepsilon+d(f(t),F(t,y(t)))\right\}•$$

显然对任意 $t\in T$, $\Gamma_\varepsilon(t)\neq\varnothing$,由 $F(\cdot,x)$ 的可测性及 $F(t,\cdot)$ 的 h_连续性可知,$t\to F(t,y(t))$ 是可测的•　因此 $(t,u)\to \varepsilon+d(f(t),F(t,y(t)))-\|f(t)-u\|$ 是 Caratheodory 函数,即关于 t 可测,关于 u 连续,从而是联合可测的,进而 Γ_ε 是图象可测的•　应用 Aumann 选择定理(见 Wagner[17],定理 5.10),可得可测函数 $v_\varepsilon: T\to R^N$ 使得 $v_\varepsilon(t)\in\Gamma_\varepsilon(t)$ 在 T 上几乎处处成立•　从而可定义多值函数

$$R_\varepsilon(y)=\left\{v\in S_{F(\cdot,y(\cdot))}: \|f(t)-v(t)\|<\varepsilon+d(f(t),F(t,y(t))),\ \text{a. e. 在 } T \text{ 上}\right\}•$$

显然 $R_\varepsilon: K\to 2^{L^1(T,R^N)}$ 具有非空可分解值•　进一步地,从 Bressan_Colombo[14] 的命题 4 可知 $R_\varepsilon(\cdot)$ 是下半连续的•　因此 $y\to\overline{R_\varepsilon(y)}$ 是下半连续的,并且具有闭可分解值•　因此利用[14] 的定理 1.3 可得连续选择 $u_\varepsilon: K\to L^1(T,R^N)$ 使得 $u_\varepsilon(y)\in\overline{R_\varepsilon(y)}$, $y\in K$•　又从 Tolstonogov[16] 的定理 5.1 我们可以找到连续映射 $v_\varepsilon: K\to L^1(T,R^N)$ 使得 $v_\varepsilon(y)(t)\in$

$\operatorname{ext} F(t, y(t))$ 在 T 上几乎处处成立, 并且 $\| u_\varepsilon(y) - v_\varepsilon(y) \|_1 \leqslant \varepsilon$ 对所有 $y \in K$ 一致成立.

令 $\varepsilon_n \downarrow 0$, $u_n = u_{\varepsilon_n}$, $v_n = v_{\varepsilon_n}$. 考察下列周期问题:

$$\begin{cases} x_n'(t) + x_n(t) = v_n(x_n)(t), & \text{a.e. 在 } T \text{ 上}, \\ x_n(0) = x_n(b), \end{cases} \tag{4}$$

我们看到 $L^{-1}v_n: K \to K$ 是紧算子(L^{-1} 同定理3.3), 则由 Schauder 不动点定理可得(4) 的解 $x_n \in W^{1,1}(T, R^N)(n \geqslant 1)$. 又因为$\{x_n'\}_{n \geqslant 1}$ 是一致可积的, 并且$\{x_n\}_{n \geqslant 1} \subseteq K$, 则我们可以假定 $x_n \to \hat{x}$ (在 $C(T, R^N)$ 中), $x_n \xrightarrow{w} \hat{x}$ (在 $W^{1,1}(T, R^N)$ 中), 显然 $\hat{x}(0) = \hat{x}(b)$. 进一步地, 有下面的推导:

$$\begin{aligned} & x'(t) + x(t) - (x_n'(t) + x_n(t)) = f(t) - v_n(x_n)(t) \Rightarrow \\ & (x'(t) - x_n'(t), x(t) - x_n(t)) + \| x(t) - x_n(t) \|^2 = \\ & \quad (f(t) - v_n(x_n)(t), x(t) - x_n(t)) \Rightarrow \\ & \int_0^b (x'(t) - x_n'(t), x(t) - x_n(t)) \mathrm{d}t + \int_0^b \| x(t) - x_n(t) \|^2 \mathrm{d}t = \\ & \quad \int_0^b (f(t) - v_n(x_n)(t), x(t) - x_n(t)) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5}$$

注意(5) 的右端

$$\begin{aligned} & \int_0^b (f(t) - v_n(x_n)(t), x(t) - x_n(t)) \mathrm{d}t = \\ & \quad \int_0^b (f(t) - u_n(x_n)(t), x(t) - x_n(t)) \mathrm{d}t + \\ & \quad \int_0^b (u_n(x_n)(t) - v_n(x_n)(t), x(t) - x_n(t)) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

我们又知道 $\| u_n(x_n) - v_n(x_n) \|_1 \leqslant \varepsilon_n$, 因此 $u_n(x_n) - v_n(x_n) \to 0$(在 $L^1(T, R^N)$ 中) 从而

$$\int_0^b (u_n(x_n)(t) - v_n(x_n)(t), x(t) - x_n(t)) \mathrm{d}t \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{6}$$

注意到

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^b (f(t) - u_n(x_n)(t), x(t) - x_n(t)) \mathrm{d}t \right| \leqslant \\ & \quad \int_0^b \| f(t) - u_n(x_n)(t) \| \cdot \| x(t) - x_n(t) \| \mathrm{d}t \leqslant \\ & \quad \int_0^b (\varepsilon_n + h(F(t, x(t)), F(t, x_n(t)))) \cdot \| x(t) - x_n(t) \| \mathrm{d}t \leqslant \\ & \quad \int_0^b (\varepsilon_n + k \| x(t) - x_n(t) \|) \| x(t) - x_n(t) \| \mathrm{d}t \to \\ & \quad k \int_0^b \| x(t) - \hat{x}(t) \|^2 \mathrm{d}t \qquad (n \to \infty), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\int_0^b (x'(t) - x_n'(t), x(t) - x_n(t)) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \| x(t) - x_n(t) \|^2 \Big|_0^b = 0. \tag{8}$$

在(5) 中利用(6)、(7)、(8), 当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\int_0^b \| x(t) - \hat{x}(t) \|^2 \mathrm{d}t \leqslant k \int_0^b \| x(t) - \hat{x}(t) \|^2 \mathrm{d}t < \int_0^b \| x(t) - \hat{x}(t) \|^2 \mathrm{d}t.$$

因为 $k < 1$, 我们推出 $x = \hat{x}$, 因此 $x_n \to x$(在 $C(T, R^N)$ 中), 最后注意到 $x_n \in S_e$, $n \geqslant 1$. 从而 $S \subseteq S_e$. 注意到 S 是 $C(T, R^N)$ 中的闭子集(见定理3.1), 因此 $S = S_e$(在 $C(T, R^N)$ 中取

闭包)• □

4 在周期反馈控制中的应用

在这一节我们将证明第 3 节所得到的结果可以应用于研究周期反馈控制系统• 有约束系统如下:

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = f(t, x(t), u(t)), & \text{a.e. 在 } T = [0, b] \text{ 上}, \\ x(0) = x(b), \\ u(t) \in U(t, x(t)), & \text{a.e. 在 } T = [0, b] \text{ 上•} \end{cases} \tag{9}$$

所谓可接受“状态_控制对”是指存在函数 $x(\cdot)$、$u(\cdot)$ 使得 $(x, u) \in W^{1,1}(T, R^N) \times L^1(T, R^m)$, 并且满足(9) 的所有约束条件• 在适当的假定下, 我们将证明系统(9) 存在可接受“状态_控制对”• 我们需要下面的假定:

H(U) $U: T \times R^N \to P_K(R^m)$ 是一多值函数使得:

1) $(t, x) \to U(t, x)$ 是图象可测的;

2) 对于所有 $t \in T$, $x \to U(t, x)$ 是下半连续的;

3) $|U(t, x)| = \sup[\|u\|: u \in U(t, x)] \leqslant c(t)$, $c(\cdot) \in L^1(T, R)$•

H(f) $f: T \times R^N \times R^m \to R^N$ 是一函数使得:

1) $(t, x, u) \to f(t, x, u)$ 是图象可测的;

2) 对于所有 $t \in T$, $(x, u) \to f(t, x, u)$ 是连续的;

3) $\|f(t, x, u)\| \leqslant a(t) + c_1\|u\|$ 在 T 上几乎处处成立, $a(\cdot) \in L^1(T, R)$•

定理 4.1 若假定 H(f)、H(U) 满足, 则系统(9) 有可接受“状态_控制对”•

证明 设 $F: T \times R^N \to P_k(R^N)$ 定义如下:

$$F(t, x) = f(t, x, U(t, x)) = \bigcup\left\{f(t, x, u): u \in U(t, x)\right\}•$$

由 Novikov 定理(见 Brown_Purves[18] 的定理 1), 我们知道 $(t, x) \to F(t, x)$ 是图象可测的, 类似于 Kravvaritis_Papageorgiou[19] 定理 6.1 的证明, $x \to F(t, x)$ 是下半连续的• 由假定 H(f) 3) 和H(U) 3), $|F(t, x)| \leqslant \varphi_1(t)$ 在 T 上几乎处处成立, 这里 $\varphi_1(t) = a(t) + c(t)c_1$• 设 $G(t) = \left\{y \in R^N: \|y\| \leqslant \varphi_1(t)\right\}$, 根据可测性等价条件(1) 我们可以验证 $G(\cdot)$ 是可测的• 又注意到 $G(t) \in P_{kc}(R^N)$ 在 T 上几乎处处成立, $F(t, x) \subseteq G(t)$, 则这里的 F 满足定理 3.1 中的所有假定, 由定理 3.1, 我们知道问题(2) 至少有一个解 $x(\cdot) \in W^{1,1}(T, R^N)$• 设

$$\Gamma(t) = \left\{u \in U(t, x(t)): x'(t) + x(t) = f(t, x(t), u)\right\}•$$

我们容易看到 Γ 是图象可测的, 利用 Aumann 可测选择定理得到可测函数 $u: T \to R^N$ 使得 $u(t) \in \Gamma(t)$ 在 T 上几乎处处成立, 则 (x, u) 就是(9) 的可接受“状态_控制对”• □

下面考虑控制系统:

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = g(t, x(t))u(t), & \text{a.e. 在 } T \text{ 上}, \\ x(0) = x(b), \\ u(t) \in U(t, x(t)), & \text{a.e. 在 } T \text{ 上•} \end{cases} \tag{10}$$

可接受“状态_控制对” $(x, u) \in W^{1,2}(T, R^N) \times L^1(T, R^m)$ 被称为是“端点” 的, 假如 $u(t) \in \operatorname{ext} U(t, x(t))$ 在 T 上几乎处处成立• 关于系统(10) 的假定如下:

H$(U)_1$ $U: T \times R^N \to P_{kc}(R^m)$ 是一多值函数使得:

1) $t \to U(t, x)$ 是可测的;

2) $x \to U(t, x)$ 是 h_连续的;

3) $|U(t,x)| \leqslant c_1,\ c_1 > 0$•

$H(g)$ $g: T\times R^N \to R^{N\times m}$ 是一多值函数使得:

1) $t \to g(t,x)$ 是可测的;

2) $x \to g(t,x)$ 是连续的;

3) $|g(t,x)| \leqslant \varphi(t)$ 对所有 $t\in T,\ x\in R^N$ 成立, $\varphi(\cdot)\in L^2(T,R)$•

关于“端点”可接受“状态_控制对”我们有下述结果•

定理 4.2　若假定 $H(U)_1$、$H(g)$ 满足, 则系统(10) 存在“端点”可接受“状态_控制对”•

证明　设 $F(t,x) = g(t,x)U(t,x)\in P_{kc}(R^N)$•　直接地由假定 $H(U)_1$ 和 $H(g)$, $t\to F(t,x)$ 是可测的, $x\to F(t,x)$ 是 h_连续的, 并且 $|F(t,x)|\leqslant c_1\varphi(t)$, 同定理 4.1 一样构造 $G(\cdot)$, 从而 F 满足定理 3.3 中的所有假定•　由定理 3.3, 问题(3) 至少有一个解 $x(\cdot)\in W^{1,2}(T,R^N)$, 即

$$x'(t)+x(t)\in \operatorname{ext}F(t,x(t)) = \operatorname{ext}g(t,x(t))U(t,x(t))\subseteq g(t,x(t))\operatorname{ext}U(t,x(t)),\qquad \text{a.e. 在 } T \text{ 上}•$$

设

$$\Gamma(t) = \left\{u\in \operatorname{ext}U(t,x(t)): x'(t)+x(t) = g(t,x(t))u,\ \text{a.e. 在 } T \text{ 上}\right\},$$

由 $H(g)$ 1) ~ 2) 我们可以容易地看到 Γ 是图象可测的•　根据 Aumann 可测选择定理, 可得控制 $u(\cdot)\in L^1(T,R^m)$ 使得 $u(t)\in \operatorname{ext}U(t,x(t))$ 在 T 上几乎处处成立, 则 (x,u) 是所找的“端点”可接受“状态_控制对”•　□

在“端点”可接受“状态_控制对” (x,u) 中, 状态轨道 x 被称为“端点”状态轨道•　如果加强关于 g 和 U 的假定, 有更进一步的结论•　我们需要下面的假定:

$H(g)_1$ $g: T\times R^N\to R^{N\times m}$ 是一映射满足:

(i) $t\to g(t,x)$ 是可测的;

(ii) $\|g(t,x_2)-g(t,x_1)\|\leqslant k_1\|x_2-x_1\|,\ k_1>0$;

(iii) $|g(t,x)|\leqslant a,\ a>0$•

$H(U)_2$ $U: T\times R^N\to P_{kc}(R^N)$ 是一多值函数使得:

(i) $t\to U(t,x)$ 是可测的;

(ii) $h(U(t,x_2),U(t,x_2))\leqslant k_2\|x_2-x_1\|,\ k_2>0$;

(iii) $|U(t,x)|\leqslant c,\ c>0,\ ak_2+ck_1<1$•

利用定理 3.4, 得到下列结果:

定理 4.3　若假定 $H(g)_1$、$H(U)_2$ 满足, $y(\cdot)\in W^{1,2}(T,R^N)$ 是系统(10) 的状态轨道, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在(10) 的“端点”状态轨道 $x(\cdot)\in W^{1,2}(T,R^N)$, 使得 $\|x-y\|_C<\varepsilon$•

[参　考　文　献]

[1] Aubin J P, Cellina A. Differential Inclusions[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1984.

[2] Haddad G, Lasry J M. Periodic solution of functional differential inclusions and fixed point of σ_seleetionable correspondences[J]. J Math Anal Appl, 1983, **96**(2): 295—312.

[3] Macki J, Nistri P, Zecca P. The existence of periodic solutions to nonautonomou differential inclusions[J]. Proc Amer Math Soc, 1988, **104**(3): 840—844.

[4] Plaskacz S. Periodic solutions of differential inclusions on compact subsects of R^N[J]. J Math Anal Appl, 1990, **148**(1): 202—212.

[5] Hu S, Papageorgiou N S. On the existence of periodic solutions for nonconvex valued differential in-

clusions in R^N[J]. Proc Amer Math Soc, 1995, **123**(10): 3043—3050.
[6] Hu S, Papageorgiou N S. Periodic solutions for nonconvex differential inclusions[J]. Proc Amer Math Soc, 1999, **127**(1): 89—94.
[7] De Blasi F S, G rniewicz L, Painigiani G. Topological degree and periodic solutions of differential inclusions[J]. Nonlinear Anal, 1999, **37**(2): 217—245.
[8] De Blasi F S, Myjak J. On continuous approximations for multifunctions[J]. Pacific J Math, 1986, **123**(1): 9—31.
[9] Klein E, Thompson A. Theory of Correspondences[M]. New York: Wiley, 1984.
[10] Papageorgiou N S. A stability result for differential inclusions in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1986, **118**(1): 232—246.
[11] Dunford N, Schwartz J. Linear Operators[M]. New York: Wiley_Interscience, 1957.
[12] Papageorgiou N S. Convergence theorems for Banach space valued integrable multifunctions[J]. Internat J Math Sci, 1987, **10**(2): 433—442.
[13] Hiai F, Umegaki H. Integrals. Conditional expectations and martingales of multivalued functions[J]. J Multivariate Anal, 1977, **7**(1): 149—182.
[14] Bressan A, Colombo G. Extensions and selections of maps with decomposable values[J]. Studia Math, 1988, **90**(1): 69—85.
[15] LI Guo_cheng, XUE Xiao_ping. On the existence of periodic solutions for differential inclusions[J]. J Math Anal Appl, 2002, **276**(1): 168—183.
[16] À½ÃÄÀ¿À´À³ . ¶ÁÂ¶ÂÎ³¿Î¶ Ã¶½¶¼ÄÀÂÎ ¾¿À´À¹¿±É¿ÎÇ ÀÄÀ²Â±¶¿º» Ã ¿¶³ÎÊÅ¼½Î ¾º, оЂа оА к, а щ к к оаВЂокГ к[J]. ±Ä¶¾±Äº É¶Ã¼» ²ÀÂ¿º¼, 1996, **187**(5): 121—142.
[17] Wagner D. Survey on measurable selection theorems[J]. SIAM J Control Optim, 1977, **15**(5): 859—903.
[18] Brown L D, Purves R. Measurable selections of extreme[J]. Ann Statist, 1973, **1**(2): 902—912.
[19] Kravvaritis D, Papageorgiou N S. Boundary value problems for nonconvex differential inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1994, **185**(1): 146—160.

On the Periodic Solutions of Differential Inclusions and Applications

LI Guo_cheng[1], XUE Xiao_ping[1], SONG Shi_ji[2]
(1. Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China;
2. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China)

Abstract: The periodic problem of evolution inclusion is studied and its results are used to establish existence theorems of periodic solutions of a class of semi_linear differential inclusion. Also existence theorem of the extreme solutions and the strong relaxation theorem are given for this class of semi_linear differential inclusion. An application to some feedback control systems is discussed.

Key words: evolution inclusion; semi_linear differential inclusion; periodic solution; continuous selector; compact operator; fixed point