

强Duffing系统的局部分岔分析*

毕勤胜¹ 陈予恕¹ 吴志强¹

(1995年3月13日收到)

摘 要

本文通过坐标变化和近恒等变化, 将强 Duffing 方程化成范式, 从而可以得到在不同共振条件下的分岔方程以及其近似解, 应用奇异性理论研究了强 Duffing 在开折参数及物理参数平面上的转迁集及其局部分岔图。

关键词 Normal Form 理论 奇异性理论 普适开折 转迁集 强 Duffing 系统

一、引 言

单自由度 Duffing 方程一般形式可写为

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^n F_i \cos(\Omega_i t + \theta_i) \quad (1.1)$$

Duffing 方程之所以被人们重视, 不仅因为它具有广泛的工程背景, 更因为它的动力学行为在非线形系统中具有典型的代表性, 且 Duffing 方程的动力学行为表现了十分丰富的非线形特性, 同时它又是相对比较简单的方程。几十年来, 人们虽然对 Duffing 方程做了不少工作, Nayfeh^[1]用多尺度法研究了 Duffing 方程的跳跃和滞后现象, Holmes^[2]研究了 Duffing 方程的周期轨道由逐步分岔导致周期倍化从而产生浑沌的特性, 陈予恕^[3]应用 Lyapunov-Schmidt 方法研究了 Duffing 方程的简单分岔, 张健^[4]研究了 Duffing 方程主共振及分数共振的动力学特性, 但至今其分岔特性的完全揭示还远远没有解决, 特别是在高次退化条件下的分岔及复杂动态特性。

本文通过坐标变化和近恒等变化^[3,5], 将强 Duffing 方程化成范式, 得到了在不同共振条件下的分岔方程以及其近似解, 进一步应用奇异性理论^[6]研究了强 Duffing 在开折参数及物理参数平面上的转迁集及其局部分岔图。

二、Duffing 系统的局部分岔研究

考虑如下强 Duffing 方程

* 国家自然科学基金和博士点基金资助项目。

1 天津大学力学与工程测试系, 天津 300072。

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \nu(x) = f(t) \quad (2.1)$$

其中 $\nu(x)$ 含有强非线性项, 为研究方便起见, 设 $\nu(x) = \omega_0^2 x + \alpha x^3$, 其中 α 可以是非小量, $f(t)$ 为外激励项, 设 $f(t) = \varepsilon f \cos \omega t$, ε 为小参数, 改写方程(2.1)有

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = -2\mu x - \omega_0^2 x - \alpha x^3 + \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \quad (2.2a)$$

$$\frac{df_1}{dt} = -i\omega f_1 \quad (2.2b)$$

$$\frac{df_2}{dt} = i\omega f_2 \quad (2.2c)$$

其中 $f_1(t) = \varepsilon f \exp(-i\omega t)$, $f_2(t) = \varepsilon f \exp(i\omega t)$, 由于 ε 是小量, 从而 f_1^3, f_2^3 为 $o(\varepsilon^3)$, 令

$$\lambda_1 = -\mu - ir, \quad \lambda_2 = -\mu + ir \quad (2.3)$$

其中 $r = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$. 在强非线性情况下, 为将(2.2a)化为Jordan标准形, 取变换

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

得到

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + \frac{1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} (f_1 + f_2) + \frac{\alpha}{(\lambda_1 - \lambda_2)} (y_1 + y_2)^3 \quad (2.5a)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 - \frac{1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} (f_1 + f_2) + \frac{\alpha}{(\lambda_1 - \lambda_2)} (y_1 + y_2)^3 \quad (2.5b)$$

为简化标准形(2.5a, b)中的干扰项, 取变换为

$$y_1 = z_1 + \bar{g}f_2 \quad (2.6a)$$

$$y_2 = z_2 + gf_1 \quad (2.6b)$$

其中

$$g = \frac{(\omega + r) - \mu i}{4r[\mu^2 + (r + \omega)^2]} \quad (2.7)$$

设

$$A = -\frac{\alpha i}{2r}, \quad B = \frac{i}{4r} \quad (2.8)$$

则系统(2.5a, b)可化为下述形式

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda_1 z_1 + Bf_1 + A(z_1 + z_2 + gf_1 + \bar{g}f_2)^3 \quad (2.9a)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \lambda_2 z_2 - Bf_2 - A(z_1 + z_2 + gf_1 + \bar{g}f_2)^3 \quad (2.9b)$$

引入非线性变换

$$z_1 = u_1 + D_3^1(u_1, u_2, f_1, f_2) \quad (2.10a)$$

$$z_2 = u_2 + D_3^2(u_1, u_2, f_1, f_2) \quad (2.10b)$$

使(2.9)变为范式. 其中 D_3^1, D_3^2 分别为总次数等于3的 u_1, u_2, f_1, f_2 的齐次多项式. 利用矩阵法, 可求得变换中非线性项 D_3^1, D_3^2 的系数, 它们由表1统一给出. 故(2.9)的Normal Form形式为

$$\frac{du_1}{dt} = \lambda_1 u_1 + Bf_1 + 3A(u_1 + gf_1)^2(u_2 + \bar{g}f_2) \quad (2.11a)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \lambda_2 u_2 - B f_2 - 3A(u_2 + g f_2)^2 (u_1 + g f_1) \quad (2.11b)$$

表 1 D_3^1 和 D_3^2 的系数

	D_3^1	D_3^2
1 u_1^3	$\frac{Ai}{2\omega}$	$\frac{-Ai}{4\omega}$
2 $u_1^2 u_2$	0	$\frac{-3Ai}{2\omega}$
3 $u_1^2 f_1$	$\frac{-6A\omega gi + 3AB}{4\omega^2}$	$\frac{12A\omega gi - 3AB}{16\omega^2}$
4 $u_1^2 f_2$	0	$\frac{6\omega \bar{g} Ai + 3AB}{4\omega^2}$
5 $u_1 u_2^2$	$\frac{-3Ai}{2\omega}$	0
6 $u_1 u_2 f_1$	0	$\frac{6A\omega gi}{2\omega^2}$
7 $u_1 u_2 f_2$	$\frac{6A\omega \bar{g} i - 3AB}{2\omega^2}$	0
8 $u_1 f_1^2$	$\frac{3Ag_2 i}{2\omega} - \frac{3ABg}{2\omega^2} - \frac{3iAB_2}{4\omega^2}$	$\frac{-3Ag^2 i}{4\omega} + \frac{3ABg}{8\omega^2} + \frac{3iAB^2}{32\omega^3}$
9 $u_1 f_1 f_2$	0	$\frac{-3A\omega \bar{g} i}{\omega} - \frac{3iAB^2}{2\omega^2}$
10 $u_1 f_2^2$	$\frac{-3A\bar{g}^2 i}{2\omega} + \frac{3AB\bar{g}}{2\omega^2} + \frac{3iAB^2}{4\omega^2}$	0
11 u_2^3	$\frac{-Ai}{4\omega}$	$\frac{Ai}{2\omega}$
12 $u_2^2 f_1$	$\frac{3Ag_i}{2\omega} + \frac{3AB}{4\omega^2}$	0
13 $u_2^2 f_2$	$\frac{3A\bar{g} i}{4\omega} - \frac{i3AB}{16\omega^2}$	$\frac{-3A\bar{g} i}{2\omega} + \frac{3AB}{4\omega^2}$
14 $u_2 f_1^2$	0	$\frac{-3Ag^2 i}{2\omega} + \frac{3ABg}{2\omega^2} + \frac{3iAB^2}{4\omega^3}$
15 $u_2 f_1 f_2$	$\frac{-3A\omega \bar{g} i}{\omega} - \frac{3iAB^2}{4\omega^2}$	0
16 u_2^2	$\frac{-3A\bar{g}^2 i}{4\omega} + \frac{3AB\bar{g}}{8\omega^2} + \frac{3iAB^2}{32\omega^3}$	$\frac{3A\bar{g}^2 i}{2\omega} - \frac{3AB\bar{g}}{2\omega^2} - \frac{3iAB^2}{4\omega^3}$
17 f_1^3	$\frac{-A\bar{g}^3 i}{2\omega}$	$\frac{A\bar{g}^3 i}{4\omega}$
18 $f_1^2 f_2$	0	$\frac{3Ag^2 \bar{g}}{-2i\omega}$
19 $f_1 f_2^2$	$\frac{-3Ag^2 \bar{g}}{2i\omega}$	0
20 f_2^3	$\frac{A\bar{g}^3 i}{4\omega}$	$\frac{-A\bar{g}^3 i}{2\omega}$

为简化范式的形式, 设

$$w_1 = u_1 + g f_1, \quad w_2 = u_2 + g f_2 \quad (2.12)$$

从而有

$$\frac{dw_1}{dt} = \lambda_1 w_1 + [B - g(\lambda_1 + i\omega)] f_1 + 3Aw_1^2 w_2 \quad (2.13a)$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \lambda_2 w_2 + [-B + g(\lambda_2 - i\omega)] f_2 - 3Aw_1^2 w_2 \quad (2.13b)$$

下面研究主共振情形, 即 $\omega \cong \omega_0$ 时的动力学特性. 引入调谐值 σ

$$\sigma = \omega - r \quad (2.14)$$

设 $w_1 = w_0 \exp(-i\omega t)$, $w_2 = \bar{w}_0 \exp(i\omega t)$, 代入(2.13a, b)可得幅频关系式, 由于(2.13a)和(2.13b)互为共轭, 因此, 只需研究(2.13a)即可, 有

$$w_0 = (\lambda_1 + i\omega) w_0 + [B - g(\lambda_1 + i\omega)] \varepsilon f + 3Aw_0^2 \bar{w}_0 \quad (2.15)$$

令 $w_0 = a \exp[i\theta]$, 代入(2.15)有

$$\dot{a} = -\mu a + (R_{11} \cos\theta + R_{12} \sin\theta) \varepsilon f \quad (2.16a)$$

$$a\dot{\theta} = \sigma a - \frac{3\alpha}{2r} a^3 + (R_{12} \cos\theta - R_{11} \sin\theta) \varepsilon f \quad (2.16b)$$

其中 $R_{11} = \text{Re}[B - g(\lambda_1 + i\omega)]$, $R_{12} = \text{Im}[B - g(\lambda_1 + i\omega)]$, 即

$$R_{11} = \frac{2\mu r}{4r[\mu^2 + (\omega + r)^2]}, \quad R_{12} = \frac{1}{4r} + \frac{\omega^2 - r^2 + \mu^2}{4r[\mu^2 + (\omega + r)^2]} \quad (2.17)$$

从而分岔方程为

$$\left[\mu^2 + \left(\sigma - \frac{3\alpha}{2r} a^2 \right)^2 \right] a^2 = (R_{11}^2 + R_{12}^2) (\varepsilon f)^2 \quad (2.18)$$

引理1 在 $(\mu, \sigma, f, a) = (0) \in R^4$ 的领域内, w_0 有解形如 $a \exp[i\theta]$, 其中 a, θ 满足式(2.16).

定理1 在无阻尼时, 即 $\mu = 0$, 在 $(\sigma, f) = (0) \in R^2$ 的领域内, 存在一条曲线 Γ , 将 (f, σ) 平面分为两部分 U_1, U_2 , 使得 w_0 的解在 $(f, \sigma) \in U_1$ 时有唯一解, 而在 $(f, \sigma) \in U_2$ 时有三个解, 如图1, 其中 Γ 的表达式为

$$R_{12}^2 (\varepsilon f)^2 = \frac{8r}{81\alpha} \sigma^3 \quad (2.19)$$

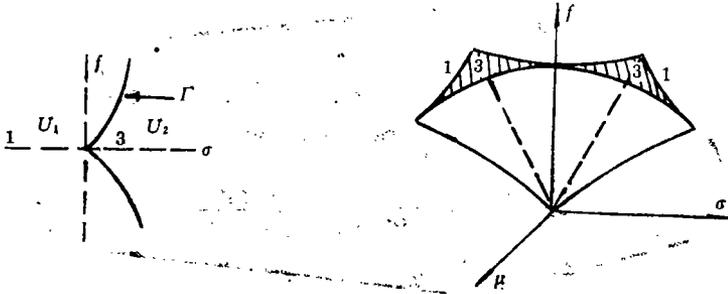


图 1

图 2

证明 当 $\mu = 0$ 时, 由(2.17)知, $R_{11} = 0$, 由(2.1a)可知, $\sin\theta = 0$, 故 $\cos\theta = \pm 1$, 从而分岔方程(2.18)可改写为

$$H(f, a, \sigma) = \sigma a - \frac{3\alpha}{2r} a^3 \pm R_{12} \varepsilon f = 0 \quad (2.20)$$

令 $\frac{\partial H}{\partial a} = 0$, 有 $a^2 = \frac{2r}{9\alpha} \sigma$, 代入上式有

$$R_{12}^2 (\varepsilon f)^2 = \frac{8r}{81\alpha} \sigma^3$$

得证.

引理2 在 $(\mu, \sigma, f, a) = (0) \in R^4$ 的领域内, w_0 有解形如 $a \exp[i\theta]$, 满足

$$a \leq (\sigma^{\frac{1}{2}} + f^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{1}{2}}) \quad (2.21)$$

引入比例尺度

$$a = \lambda \rho, \quad \sigma = \lambda^2 \sigma^*, \quad \mu = \lambda^2 \mu^*, \quad f = \lambda^3 f^* \quad (2.22)$$

其中 λ 为小参数, 代入式(2.16)有

$$G_1 = -\mu^* \rho + (R_{11} \cos \theta + R_{12} \sin \theta) \varepsilon f^* \quad (2.23a)$$

$$G_2 = \sigma^* \rho - \frac{3a}{2r} \rho^3 + (R_{12} \cos \theta - R_{11} \sin \theta) \varepsilon f^* \quad (2.23b)$$

为分析其分岔特性, 进而考虑上式的多解性, 对 $\lambda=0$, 定义

$$\Delta = \frac{\mathfrak{a}(G_1, G_2)}{\mathfrak{a}(\rho, \theta)} = \rho \left[\mu^{*2} + \left(\sigma^* - \frac{9a}{r} \rho^2 \right) \left(\sigma^* - \frac{3a}{r} \rho^2 \right) \right] \quad (2.24)$$

从上式可知, 对于 $\lambda=0$, $\operatorname{sgn}\left(\frac{a}{r}\right) = -1$, 如果 σ^* 为正数, 显然 $\Delta=0$ 的充要条件为 $\rho=0$. 又

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \rho} = 135 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \rho^4 + 36 \frac{a}{r} \sigma^* \rho^2 + (\mu^{*2} + \sigma^{*2}) \quad (2.25)$$

当 σ^* 为负数, 而 $\sigma^{*2} \leq \frac{5}{7} \mu^{*2}$ 时, $\frac{\partial \Delta}{\partial \rho} = 0$ 没有实解. 由 $\Delta=0$, 可求出 ρ (非零解部分)

$$\rho^2 = \frac{r}{9a} (-2\sigma^* \pm \sqrt{\sigma^{*2} - 3\mu^{*2}}) \quad (2.26)$$

将(2.26)代入(2.25)中, 并令 $\partial \Delta / \partial \rho = 0$, 可得到 (f^*, μ^*, σ^*) 三维空间中的分岔曲面方程, 即

$$\left[\mu^{*2} + \left(\sigma^* - \frac{3a}{2r} \rho^2 \right)^2 \right] \rho^2 = (R_{11}^2 + R_{12}^2) (\varepsilon f^*)^2 \quad (2.27)$$

其中 ρ 满足式(2.26), 从而主共振条件下分岔曲面方程为

$$\left[\mu^2 + \left(\sigma - \frac{3a}{2r} a^2 \right)^2 \right] a^2 = (R_{11}^2 + R_{12}^2) (\varepsilon f)^2 \quad (2.28)$$

其中

$$a^2 = \frac{r}{9a} (-2\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 3\mu^2}) \quad (2.29)$$

在 (σ, μ, f) 坐标系中画出其分岔曲面 Σ , 进而给出 $(\sigma, \mu, f) = (0) \in R^3$ 的 ζ 领域中对应于解个数不同的区域, 如图2.

定理2 在 $(\sigma, \mu, f) = (0) \in R^3$ 的 ζ 领域中, 主共振时有分岔曲面 Σ , 其方程为式(2.28), 如图2, 对应于解的个数也在图中注明.

利用奇异性理论分析分岔方程(2.18)的拓扑分类图. 为研究方便, 我们令

$$\lambda = \frac{2r}{3a} \sigma, \quad \delta = \pm 1, \quad \alpha_1 = \left(\frac{2r}{3a} \right)^2 \mu^2 \quad (2.30)$$

$$\alpha_2 = - \left(\frac{2r}{3a} \right)^2 (\varepsilon f)^2 \left\{ \left(\frac{2\mu r}{4r[\mu^2 + (\omega + r)^2]} \right)^2 + \left(\frac{1}{4r} + \frac{\omega^2 - r^2 + \mu^2}{4r[\mu^2 + (\omega + r)^2]} \right)^2 \right\} \quad (2.31)$$

从而有

$$F(\lambda, \alpha, a) = a^2[(\lambda + \delta a^2)^2 + a_1] + a_2 = 0 \quad (2.32)$$

其中 $\alpha = (a_1, a_2) \in R^2$, 这是余维为二的分岔系统, 有

(1) 分岔集 $B: \{(a_1, a_2) \in R^2, a_2 = 0\}$

(2) 滞后点集 $H: \{(a_1, a_2) \in R^2,$

$$a_1 = \frac{3}{4} a_2^{\frac{4}{3}}, a_2 \leq 0\}$$

(3) 双极限集: $DL = \Phi$

图3和图4(a, b, c, d, e, f)给出了分岔方程的变迁集及其分岔响应图。

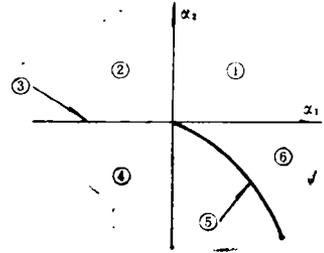
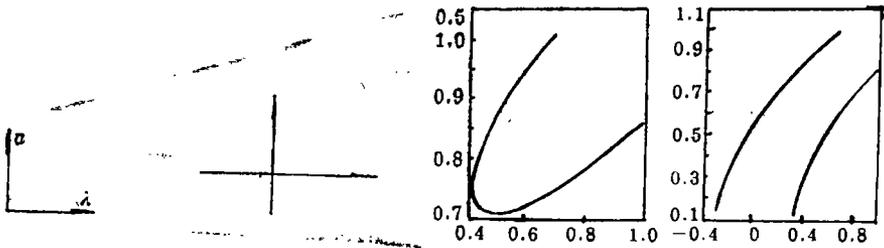


图3 (α_2, α_1) 平面上的变迁集

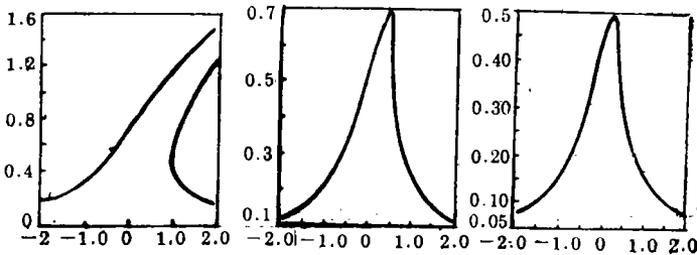


(a~f)的坐标

(a) 区域①

(b) 区域②

(c) 区域③

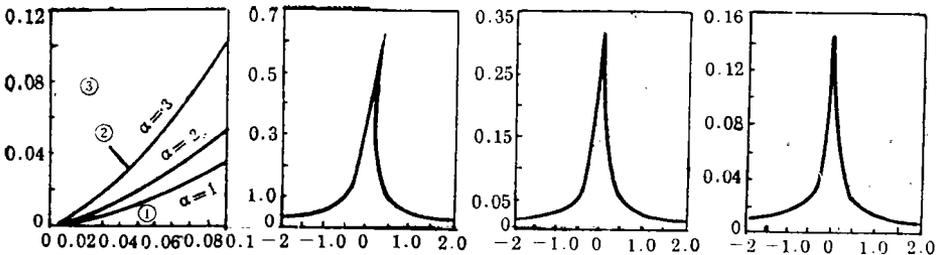


(d) 区域④

(e) 区域⑤

(f) 区域⑥

图 4



(a) (f, μ) 参数平面上的变迁集

(b) 区域①

(c) 区域②

(d) 区域③

图 5

返回物理参数平面, 图5(a, b, c, d)展示了物理参数平面上的变迁集和分岔特性。

三、主共振分岔方程的普适形折

利用奇异性理论研究分岔方程(2.18)的普适开折, 取芽 g

$$g(\lambda, z) = z \left[\left(\lambda + \frac{3\alpha}{2r} \right)^2 z \right] \tag{3.1}$$

其中 $z = a^2$, 展开 g 有

$$g = Az^3 + B\lambda z^2 + Cz\lambda^2 \tag{3.2}$$

其中 $A = \left(\frac{3\alpha}{2r} \right)^2 > 0$, $B = 2 \left(\frac{3\alpha}{2r} \right)$, $C = 1$, 作变换, 令

$$x = z + \frac{B}{3A} \lambda \tag{3.3}$$

则(3.2)可变为

$$g = \varepsilon(x^3 + 3c\lambda^2 x + 2d\lambda^3) \tag{3.4}$$

其中 $\varepsilon = \text{sgn} A$, 在此, $\varepsilon = \pm 1$

$$c = \frac{1}{3} \left(\frac{C}{A} - \frac{B^2}{3A^2} \right) \tag{3.5a}$$

$$d = \frac{1}{2} \left(\frac{2B^3}{27A^3} - \frac{BC}{3A^2} \right) \tag{3.5b}$$

假设分岔问题(3.18)的 $j^3 g$ 是非退化的, 则当 $d = 0$ 时, g 等价于

$$h(x, \lambda) = \varepsilon(x^3 + \delta\lambda^2 x) \tag{3.6}$$

其中, $\delta = \text{sgn}(c)$, 当 $d \neq 0$ 时, g 等价于

$$h_m(x, \lambda) = \varepsilon(x^3 - 3m\lambda^2 x + 2\delta\lambda^3) \tag{3.7}$$

其中 $\delta = \text{sgn}(d)$

$$m = -\frac{c}{d^{\frac{2}{3}}} \tag{3.8}$$

(3.6) 对应于(3.7)中 $m \rightarrow \pm\infty$ 的情形, 已知分岔方程 (3.18) 三次非退化等价于 Normal Form(3.6)或(3.7), ε, δ 表示符号, m 是实数, 在图6中画出模圈, 分别对应于 $\varepsilon = +1$ 和 $\varepsilon = -1$, 右边对应于 $\delta = -1$, 左边对应于 $\delta = +1$, 且在 $m = \pm\infty$ 时连接。我们称 $m = \pm\infty, m = 1, m = 0$ 为模点, 这些点把模圈分成几段, 而在每一段上, 芽的拓扑结构是等价的, 并有相同的扰动集, 即普适开折是等价的, 而在这些模点之间的不同段上, 普适开折不是等价的。这些模点可以分为两类, 一类是常规点, 此时 $m = 0$ 或 $m = \infty$, 芽的平方项和线性项消失, 而立方项对应于相同的 ε, δ, m , 任何具有适当符号的芽等价于(3.6)或(3.7)。而当 $m = 1$ 时,

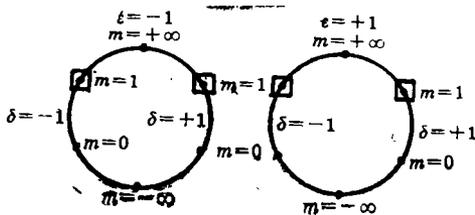


图6 模圈

此时为连接点, 此时芽是退化的, 如 $h(x, \lambda) = x^3 - 3\lambda^2 x + 2\delta\lambda^3$, 在 $j^3 g$ 的情况下, h 具有余维五, 如当 $\varepsilon = 1$, $\delta = -1$, $m = 1$ 时, 芽可表示为

$$g = (x^3 - 3x\lambda^3 - 2\lambda^3) + \lambda^4 \quad (3.9)$$

此时 g 的普适开折为

$$g = (x^3 - 3x\lambda^3 - 2\lambda^3) + \lambda^4 + a_1 + a_2\lambda + a_3x + a_4\lambda x + a_5x\lambda^2 \quad (3.10)$$

当 $\varepsilon = 1$, $\delta = -1$ 和 $\varepsilon = -1$, $\delta = 1$ 在 $m = 1$ 连接时芽等价于

$$g = x^4 + (-x^2\lambda + \lambda^3) \quad (3.11)$$

此时 g 的普适开折为

$$g = x^4 + (-x^2\lambda + \lambda^3) + a_1 + a_2\lambda + a_3x + a_4x^3 + a_5\lambda^2 \quad (3.12)$$

当 $n = 1$ 时, g 的普适开折为

$$g(x, \lambda, a_1, a_2, a_3, a_4, n) \\ = (x^3 - 3nx^2\lambda + 2\delta\lambda^3) + a_1 + a_2\lambda + a_3x + a_4\lambda x \quad (3.13)$$

其中 n 为模参数, 在此为准开折参数.

在 $m = 1$ 的退化情况下, 普适开折的余维数 ≥ 4 , 具有十分丰富的动力学行为, 一般难于在二维参数空间上表示出来, 再考虑式 (3.8), 经分析可知, 在主共振条件下 Duffing 方程三次近似的分岔对应于 $m = 1$ 情形, 即 $c + d^{\frac{2}{3}} = 0$, 随着余维数的增大, 会出现更一般更丰富的动力学特性.

需要指出的是, 以上的这些扰动集从普适开折的理论来讲是可能存在的, 但具体到各个方程参数选择的不同形式, 不一定都可实现.

四、结 论

本文给出了一种求强 Duffing 方程范式的方法, 从而可以得到在不同共振条件下的分岔方程以及其近似解, 应用奇异性理论研究了强 Duffing 系统在开折参数及物理参数平面上的转迁集及其局部分岔图. 并证明在某些特殊情况下, 有高阶退化存在, 因而有更丰富的动力学行为.

参 考 文 献

- [1] A. H. Nayfeh, D. T. Mook and S. Sridhar, Nonlinear analysis of the forced response of structural elements, *J. Acoust. Soc. Am.*, 55 (1974), 281-291.
- [2] P. J. Holmes, Averaging and chaotic motion in forced oscillations, *SIAM, J. Appl. Math.*, 38 (1980), 65-80.
- [3] 陈予恕, 《非线性振动系统的分岔和混沌理论》, 高等教育出版社 (1993)
- [4] 张建, 《周期激励下 Duffing 系统复杂动力学行为研究》, 天津大学硕士论文 (1991).
- [5] L. Jezequel and C. H. Lamarque, Analysis of nonlinear dynamical systems by normal form theory, *J. Sound Vib.*, 149 (1991), 429-459.
- [6] S. N. Chow and J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag (1982).

Local Bifurcation Analysis of Strongly Nonlinear Duffing System

Bi Qinsheng Chen Yusu Wu Zhiqiang

(Dept. of Mechanics, Tianjin Univ., Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract

By using coordinate and nearly identical transformations, the strongly nonlinear Duffing system is reduced to normal form in this paper, and then the bifurcation equations with different resonant conditions and their solutions are obtained. The local bifurcation diagrams and the transition sets on unfolding parameter and physical parameter plane are analyzed by singularity theory.

Key words normal form theory, singularity theory, universal unfolding, transition set, strongly nonlinear Duffing system