ISSN 1000-0887
CODEN YSHLEM

应用数学和力学

Applied Matnematics and Mechanics

EI及我国力学类、数学类、物理学类核心期刊

交通部重庆交通学院主办
重 庆 出 版 社 出 版

第17卷 1996年 第9期

ISSN 1000-0887

09>

771000 088008

设 $\nabla\cdot a=0$, $\int_{\Omega}a(x)dx=0$ 及 $\int_{\Omega}f(x,t)dx=0$ (参见[4]).

下面引入Ω上周期函数空间($\forall m\in N$)

$$H^m(\Omega)=\left\{\phi:\phi=\sum_{k\in Z^2}c_k\exp[ik\cdot x],\quad c_k=\overline{c_{-k}},\quad \sum_{k\in Z^2}|k|^{2m}|c_k|^2<+\infty\right\}$$

$$\dot H^m(\Omega)=\{\phi:\phi\in H^m(\Omega),\ c_0=0\}$$

对任意$\alpha\in R$,可按通常的方法,用对偶和插值定义$H^\alpha(\Omega)$.视具体场合的不同,我们用同样的记号来表示向量值或标量值函数空间.同时,引入下面常用的几个空间

$$H=\{\phi\in H^0(\Omega),\ \mathrm{div}\phi=0,\ 在弱意义下\}$$

$$V=\{\phi\in H^1(\Omega),\ \mathrm{div}\phi=0\},\ \dot H=H\cap\dot H^0(\Omega),\ \dot V=V\cap\dot H^1(\Omega)$$

今后,总以$(\cdot,\cdot)$和$((\cdot,\cdot))=(\nabla\cdot,\nabla\cdot)$表示$L^2$和$H_0^1(\Omega)$的内积.对任意$\alpha\in R$,以$\|\cdot\|_\alpha$表示标准的$H^\alpha$范数,特别地,以$\|\cdot\|$表示$L^2$范数.并记$|\!|\!|\phi|\!|\!|=\sup\limits_{t>0}\|\phi(t)\|$.

定义投影算子$P:H^0(\Omega)\to H$,并注意它可与导算子交换

$$Pf=\sum_{k\in Z^2,k\neq 0}\left(I-\frac{k\cdot k^T}{|k|^2}\right)f_k\exp[ik\cdot x]+f_0,\ \forall f=\sum_{k\in Z^2}f_k\exp[ik\cdot x]\in H^0(\Omega)$$

同时定义 Stokes 算子$A:\forall\phi\in D(A)=\{\phi\in\dot H,\ \Delta\phi\in\dot H\}$, $A\phi=-\Delta\phi$. A可延拓为$\dot H$上的正定、自伴算子,从而可定义A的幂,A^α.事实上,$D(A^\alpha)=\{\phi\in\dot H^{2\alpha}(\Omega),\mathrm{div}\phi=0\}$是$\dot H^{2\alpha}(\Omega)$的闭子空间,且$\|A^\alpha\cdot\|$是它的一个等价范数.易知$-\nu A$可产生$\dot H$上的一个解析半群,表示为$\{\exp[-\nu At]\}_{t\geq 0}$,并且存在常数$c$, $\delta>0$使

$$\|A^\alpha\exp[-\nu At]\|\leq c\nu^{-\alpha}t^{-\alpha}\exp[-2\nu\delta t]\qquad(t>0,\ \alpha>0)\tag{1.2}$$

此处δ只依赖于A.在下面的讨论中,不同地方出现的常数c具有不同的意义.

现在,将(1.1)投影到H上,则u满足如下抽象方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{du}{dt}+\nu Au+B(u,u)=Pf\\&u(0)=a\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

同时,p满足$\Delta p=\nabla\cdot f-\nabla\cdot(u\cdot\nabla)u$,其中$B(u,u)=P(u\cdot\nabla)u$.

讨论中,将多次用到三线性形式$b(u;\ v,\ w)=\int_{\Omega}(u\cdot\nabla)v\cdot wdx$的如下性质[4][5]

$$\left.\begin{aligned}&b(u;\ v,\ w)=-b(u;\ w,\ v) &&(\forall u\in\dot V,\ v,\ w\in V)\\&b(u;\ u,\ Au)=0 &&(\forall u\in D(A))\\&b(w;\ u,\ Au)+b(u;\ w,\ Au)+b(u;\ u,\ Aw)=0 &&(\forall u,\ w\in D(A))\end{aligned}\right\}\tag{1.4}$$

及,对$s_i=m_i+\alpha_i$, $m_i=[s_i]$ $(i=1,2,3)$,若$\sum_{i=1}^3 s_i>1$或$\sum_{i=1}^3 s_i=1$但s_1, s_2, $s_3\neq 1$,成立

$$\left.\begin{aligned}&|b(u;\ v,\ w)|\leq c\|u\|_{s_1}\|v\|_{s_2+1}\|w\|_{s_3}\\&|b(u;\ v,\ w)|\leq c\|u\|_{m_1}^{1-\alpha_1}\|u\|_{m_1+1}^{\alpha_1}\|v\|_{m_2+1}^{1-\alpha_2}\|v\|_{m_2+2}^{\alpha_2}\|w\|_{m_3}^{1-\alpha_3}\|w\|_{m_3+1}^{\alpha_3}\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

另外,为以后讨论的方便,这里给出(1.3)的弱形式

$$\left.\begin{aligned}&(u_t,\phi)+\nu((u,\phi))+b(u;u,\phi)=(Pf,\phi)\ (\forall\phi\in\dot V)\\&u(x,0)=a(x)\qquad\qquad(\forall x\in\Omega)\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

本文将仅在无散度空间中展开讨论，即仅涉及u的分析。

二、Fourier非线性Galerkin逼近及其解的适定性

给定n，$N\in\mathscr{N}$，满足$n\ll N$. 首先引入几个有限维子空间

$$s_N=\left\{\phi:\phi=\sum_{-N\leqslant k_1,k_2\leqslant N}\exp[ik\cdot x]\right\},$$

$$F_N=S_N\times S_N,\quad V_N=V\cap F_N,\quad \dot{V}_N=\dot{V}\cap F_N$$

同时定义L^2意义下$L^2(\Omega)^2$到F_N的正交投影算子P_N，并记$Q_N=I-P_N$. 易知对任意的$0\leqslant\mu\leqslant m$，$\phi\in H^m(\Omega)$，存在如下关系

$$\|P_N\phi\|_m\leqslant cN^{m-\mu}\|\phi\|_\mu,\quad \|Q_N\phi\|_\mu\leqslant cN^{\mu-m}\|\phi\|_m \tag{2.1}$$

若$n\ll N$，对$\dot{V}_N$进行如下正交分解

$$\dot{V}_N=\dot{V}_n\oplus\dot{V}_N^n,\quad 其中\dot{V}_n=P_n\dot{V}_N,\quad \dot{V}_N^n=(I_N-P_n)\dot{V}_N=Q_{Nn}\dot{V}_N \tag{2.2}$$

Fourier 非线性 Galerkin 方法旨在求(1.6)的有限维逼近

$$u_N=v^n+w_N^n,\quad v^n\in\dot{V}_n,\quad w_N^n\in\dot{V}_N^n$$

使满足

$$\left.\begin{array}{ll}(v_t^n,\phi)+\nu((v^n,\phi))+b(v^n+w_N^n;\ v^n+w_N^n,\phi)=(Pf,\phi) & (\forall\phi\in\dot{V}_n)\\ \nu((w_N^n,\chi))+b(v^n;\ v^n,\ \chi)=Pf,\phi) & (\forall\chi\in\dot{V}_N^n)\\ v^n(x,0)=P_na(x) & (\forall x\in\Omega)\end{array}\right\} \tag{2.3}$$

利用半群$\exp[-\nu At]_{t\geqslant0}$，可形式地得到对应于(2.3)抽象形式的解

$$\left.\begin{array}{l}v^n(t)=\exp[-\nu At]P_na-\int_0^t\exp[-\nu A(t-s)]P_n\{B(v^n+w_N^n,v^n+w_N^n)-Pf\}ds\\ w_N^n(t)=\nu^{-1}A^{-1}Q_{Nn}\{Pf-B(v^n,v^n)\}\end{array}\right\} \tag{2.4}$$

注：2.1：若$N>2n$，则易于验证$B(v^n,\ v^n)\in\dot{V}_{2n}$，从而$w^n{}_N=\eta+\xi$，其中$\eta\in\dot{V}_{2n}$，$\xi=\nu^{-1}A^{-1}Q_{Nn}Pf\in\dot{V}^c{}_{2n}$，这里$\dot{V}^c{}_{2n}$是$\dot{V}_{2n}$在$\dot{V}$中的补空间. 可见，无论$N$取何值，包括$N=+\infty$，(2.3)和(2.4)总是有限维系统，其计算量主要由n决定. 对自治系统尤其如此.

为讨论方便，今后总以$u=v+w$表示(2.3)的解，以$x=y+z$表示(1.6)的解，其中$y=P_nx, z=Q_nx$. 下面先给出一个有用的不等式[8].

引理2.1 设T,α和β是正常数，$0<\theta<1$. 则对连续函数$f:[0,T]\to[0,+\infty)$且

$$f(t)\leqslant\alpha+\beta\int_0^t(t-s)^{-\theta}f(s)ds\qquad(0\leqslant t\leqslant T)$$

我们有

$$f(t)\leqslant c\alpha\exp\{c\beta^{1/(1-\theta)}t\}\qquad(0\leqslant t\leqslant T)$$

这里c是仅依赖于θ的正常数. 特别的，$\alpha=0$时，$f(t)=0$.

定理2.1 设$a\in D(A^{1/2})$，$f\in C([0,\infty),\ \dot{H})$且存在常数$C_f>0$使$\|f\|\leqslant C_f$. 则存在$n_0\in N$，当$n_0\leqslant n\ll N\leqslant+\infty$时，(2.3)存在唯一解$u=v+w$，并且存在与$t,n,N$及$u$无关的常数$C_0>0$使$\|A^{1/2}u\|<C_0$.

证明 显然(2.3)的第二式定义了如下一个映射：

$$\Phi: v\in \dot{V}_n \to w=\Phi(v)\in \dot{V}_N^n \tag{2.5}$$

事实上，Φ的图即通常所说的非线性Galerkin形式的近似惯性流形.下面我们用 Schauder 不动点定理来证明(2.3)解的存在性. 为此，首先定义集合.

$$K=\{\phi\in C([0,\infty),\dot{V}_n),\ \|A^{1/2}\phi\|\leqslant\rho\}\subset C([0,\infty),\dot{V}_n) \tag{2.6}$$

其中$\rho>0$为某一常数. 考虑如下系统定义的映射Ψ: $K\to C([0,\infty),\ \dot{V}_n)$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{给定}\lambda\in K,\ \text{使}(v,w)\in C([0,\infty),\ \dot{V}_n)\times C([0,\infty),\ \dot{V}_N^n)\text{使} & \\ (v_t,\phi)+\nu((v,\phi))+b(v+w;\ v+w,\phi)=(Pf,\phi) & (\forall\phi\in\dot{V}_n)\\ \nu((w,\chi))+b(\lambda;\ \lambda,\chi)=(Pf,\chi) & (\forall\chi\in\dot{V}_N^n)\\ v(x,0)=P_na(x) & (\forall x\in\Omega)\end{array}\right\} \tag{2.7}$$

由(2.7)第二式及$\|A^{1/2}\lambda\|\leqslant\rho$立即可得

$$\|A^{3/4}w\|\leqslant\nu^{-1}n^{-1/4}(n^{-1/2}C_f+\rho^2)\qquad(\forall t\geqslant0) \tag{2.8}$$

现在在(2.7)的第一式中取$\phi=Av$并注意性质(1.4)～(1.5)及(2.8)，我们可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A^{1/2}v\|^2+\nu\|Av\|^2&=(Pf,Av)-b(w;\ w,Av)-b(v;\ w,Av)-b(w;\ v,Av)\\ &\leqslant C_f\|Av\|+cn^{-1}\|A^{3/4}w\|^2\|Av\|+cn^{-1/2}\|A^{3/4}w\|\|Av\|^2\\ &\leqslant\nu^{-1}C_f^2+\frac{\nu}{4}\|Av\|^2+cn^{-2}\nu^{-1}\|A^{3/4}w\|^4+cn^{-1/2}\|A^{3/4}\|\|wAv\|^2\\ &\leqslant\nu^{-1}C_f^2+\frac{\nu}{4}\|Av\|^2+cn^{-3}\nu^{-5}(C_f+\rho^2)^4+cn^{-3/4}\nu^{-1}(C_f+\rho^2)\|Av\|^2\end{aligned}$$

只要取$n_0\geqslant c\nu^{-8/3}(C_f+\rho^2)^{4}$(事实上,更精确一些,$n_0$可估计到对任意小的$\varepsilon>0,n_0\geqslant c\nu^{-(2+\varepsilon)}$)，则当$n\geqslant n_0$时，我们有

$$\frac{d}{dt}\|A^{1/2}v\|^2+\nu\|Av\|^2\leqslant2\nu^{-1}C_f^2+c\nu^3\qquad(\forall t\geqslant0)$$

注意到$\nu\|Av\|^2\geqslant\lambda_1c\nu\|A^{1/2}v_1\|^2\triangleq\nu\|A^{1/2}v\|^2$,其中$\lambda_1>0$为一常数. 则上式可化为关于$\|A^{1/2}v\|^2$的微分不等式，然后在$[0,t]$上积分，若记$\|A^{1/2}a\|^2+2\nu^{-2}C_f^2+c\nu^2$为$M_0^2$，则有

$$\|A^{1/2}v(t)\|\leqslant M_0\quad(\forall t\geqslant0) \tag{2.9}$$

显然，若取$\rho<M_0$，则可知Ψ是K到K的映射. 另外，由(2.8)～(2.9)可得

$$\|A^{1/2}(v+w)\|\leqslant c\nu^3C_f(C_f+M_0^2)^{-2}+M_0+c\nu\triangleq C_0 \tag{2.10}$$

由于$\dot{V}_n$是有限维的，事实上$\dot{V}_n\subset C^\infty(\Omega)^2$. 易于验证$C^1([0,\infty),\ C^\infty(\Omega)^2\cap\dot{V}_n)$紧嵌入$C([0,\infty),\ \dot{V}_n)$. 从而$\Psi$还是全连续的. 由 Schauder 不动点定理，可知Ψ在 K 中存在不动点，即(2.3)在K中至少存在一个解.

设(v_1,w_1)，(v_2,w_2)是(2.3)的两组解，记$v=v_1-v_2,w=w_1-w_2$，则由(2.4)可得

$$v(t)=-\int_0^t\exp[-\nu A(t-s)]P_n\{B(v+w,v_1+w_1)+B(v_2+w_2,v+w)\}ds$$

利用性质(1.2)及(1.5)，并利用(2.4)第二式，最终我们有

$$\|v(t)\|\leqslant C_1\int_0^t(t-s)^{-3/4}\exp[-2\nu\delta(t-s)]\|v(s)\|ds \tag{2.11}$$

其中C_1是依赖于M_0，C_f，a及ν的常数. 令$g(t)=e^{2\nu\delta t}\|v(t)\|$，我们有

$$g(t)\leqslant C_1\int_0^t(t-s)^{-3/4}g(s)ds \tag{2.12}$$

利用引理2.1，立即可得$g(t)=0$，即$\|v(t)\|=0$对$t\geqslant0$成立. 再注意 (2.5)，我们可以断定

$(v_1,w_1)=(v_2,w_2)$，即(2.3)的解在L^2意义下是唯一的。 **证毕.**

三、误差估计

我们先给出几个先验估计。

引理3.1[6]设$a\in D(A)$，若i)$f=0$，则存在依赖于a的常数$k_0(a)$，使得

$$\|Ax(t)\|\leqslant k_0(a)\|Aa\|\exp[-2\nu_1\delta t]\qquad (t\geqslant 0)\tag{3.1}$$

ii) $f\in C([0,+\infty),\dot{H}^1(\Omega))$，则存在依赖于$t$的数$L(t)$使

$$\|Ax(t)\|\leqslant L(t)\qquad (t\geqslant 0)\tag{3.2}$$

参见[6][7]，我们立即可得下面估计。

引理3.2 设$a\in D(A)$，若i)$f=0$，则存在依赖于a的常数$k_1(a)$，使

$$\|A^{1/2}x_t(t)\|\leqslant k_1(a)\exp[-\nu_1 t]\qquad (t\geqslant 1)\tag{3.3}$$

ii) $f\in C^1([0,+\infty),\dot{H}^0(\Omega))$，则存在依赖于$t$的数，不妨仍记为$L(t)$，使

$$\|A^{1/2}x_t(t)\|\leqslant L(t)\qquad (t\geqslant 1)\tag{3.4}$$

今后，我们记$\sigma=\min\left\{\frac{1}{4},\delta\right\}$。我们首先考虑齐次方程的误差估计。

定理3.1 若$a\in D(A)$，$f=0$，那么存在$n_0\in\mathscr{N}$，使得当$n\geqslant n_0$时，对任意的$\varepsilon\in(0,1)$，存在在依赖于ε的正常数$C_\varepsilon>0$使得

$$\|A^{1/2}(v-y)(t)\|\leqslant C_\varepsilon n^{\varepsilon-1}(n^{-2}+N^{-1})\exp[-\sigma\nu_1 t]\qquad (t\geqslant 1)\tag{3.5}$$

证明：在(2.3)中取$\phi=Av$，$\chi=Aw$，并将两式相加，利用性质(1.4)，有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A^{1/2}v\|^2+\nu\|A(v+w)\|^2=b(v;\ w,\ Aw)+b(w;v,\ Aw)=-b(w;\ w,\ Av)\tag{3.6}$$

由定理2.1可知，存在$n_1\in\mathscr{N}$，当$n\geqslant n_1$时有$\|A^{1/2}(v+w)\|\leqslant C_0$。利用(1.5)及 Agmon 不等式，我们可得

$$|b(w;\ w,\ Av)|\leqslant c\|w\|\|A^{1/2}w\|\|Av\|^{1/2}\|A^2v\|^{1/2}\leqslant cC_0n^{-1}\|A(v+w)\|^2$$

因此，只要取$n_0>\max\{n_1,\ c\nu^{-1}C_0^{-1}\}$，则当$n\geqslant n_0$时，我们有

$$\frac{d}{dt}\|A^{1/2}v\|^2+4\nu_1\|A^{1/2}v\|^2\leqslant 0\qquad (t\geqslant 0)\tag{3.7}$$

从而

$$\|A^{1/2}v\|\leqslant\|A^{1/2}a\|\exp[-2\sigma\nu_1 t]\qquad (t\geqslant 0)$$
$$\|A^{1/2}w\|\leqslant c\|A^{1/2}a\|\exp[-4\sigma\nu_1 t]\qquad (t\geqslant 0)\tag{3.8}$$

下面我们着手进行误差估计。为此，先引进一些记号

$$e=x-u,\quad e_v=y-v,\quad e_w=z-w$$

显然，$e=e_v+e_w$。另一方面，注意e_w有如下分解

$$e_w=P_Ne_w+Q_Ne_w=P_Ne_w+Q_Nz\tag{3.9}$$

那么，$\forall\chi\in\dot{V}_N^n$，有

$$\nu((P_Ne_w,\ \chi))=-(z_t,\chi)-b(e_v;\ y,\chi)-b(v;\ e_v,\chi)-b(y;\ z,\ \chi)-b(z;\ x,\chi)$$

并且，利用引理3.1、3.2及估计(3.8)，对上式右端各项，有如下估计

$$|(z_t,\chi)|\leqslant\|z_t\|\|\chi\|\leqslant k_1n^{-2}\exp[-2\sigma\nu_1 t]\|A^{1/2}\chi\|$$

$$|b(e_v;\ y,\ \chi)|\leqslant c\|A^{1/2}e_v\|\|A^{1/2}y\|\|A^{1/4}\chi\|$$
$$\leqslant k_0\|Aa\|n^{-1/2}\exp[-2\sigma\nu_1 t]\|A^{1/2}e_v\|\|A^{1/2}\chi\|$$
$$|b(v;\ e_v,\chi)|\leqslant c\|A^{1/2}v\|\|A^{1/2}e_v\|\|A^{1/4}\chi\|$$
$$\leqslant c\|Aa\|n^{-1/2}\exp[-2\sigma\nu_1 t]\|A^{1/2}e_v\|\|A^{1/2}\chi\|$$
$$|b(y;\ z,\ \chi)|\leqslant c\|Ay\|\|A^{1/2}z\|\|\chi\|\leqslant k_0^2\|Aa\|^2n^{-2}\exp[-2\sigma\nu_1 t]\|A^{1/2}\chi\|$$
$$|b(z;\ x,\ \chi)|\leqslant c\|A^{1/4}z\|\|Ax\|\|\chi\|\leqslant k_0^2\|Aa\|^2n^{-5/2}\exp[-2\sigma\nu_1 t]\|A^{1/2}\chi\|$$

于是我们有

$$\|A^{1/2}P_Ne_w\|\leqslant M_1n^{-2}\exp[-2\sigma\nu_1 t]+M_2n^{-1/2}\exp[-2\sigma\nu_1 t]\|A^{1/2}e_v\|$$

其中 $M_1=c(k_1+k_0^2\|Aa\|^2)$，$M_2=(k_0^2\|Aa\|+1)\|Aa\|$，从而

$$\|A^{1/2}e_w\|\leqslant M_1(n^{-2}+N^{-1})\exp[-2\sigma\nu_1 t]+M_2n^{-1/2}\exp[-2\sigma\nu_1 t]\|A^{1/2}e_v\| \tag{3.10}$$

进一步，利用y和v的形式解，可得

$$A^{1/2}e_v=-\int_1^t A^{1/2}\exp[-\nu A(t-s)]P_n\{B(e_v,y)+B(v,e_v)+B(e_v,z)+B(v,e_w)$$
$$+B(z,e_v)+B(e_w,v)+B(e_w,z)+B(z,e_w)\}ds$$
$$=-\int_1^t A^{1-\varepsilon/3}\exp[-\nu A(t-s)]\left\{\sum_{i=1}^{8}I_i\right\}ds$$

利用(1.2)，我们可得

$$\|A^{1/2}e_v\|\leqslant c\int_1^t(t-s)^{\varepsilon/3-1}\exp[-2\sigma\nu_1(t-s)]\left\{\sum_{i=1}^{8}\|I_i\|\right\}ds \tag{3.11}$$

下面，我们对$\|I_i\|$进行估计

$$\|I_1\|=\|A^{\varepsilon/3-1/2}P_nB(e_v,y)\|\leqslant\|Ay\|\|A^{1/2}e_v\|\leqslant k_0\|Aa\|\exp[-2\sigma\nu_1(t)]\|A^{1/2}e_v\|$$
$$\|I_2\|=\|A^{\varepsilon/3-1/2}P_nB(v,e_v)\|\leqslant\|A^{1/2}v\|\|A^{1/2}e_v\|\leqslant\|Aa\|\exp[-2\sigma\nu_1(t)]\|A^{1/2}e_v\|$$
$$\|I_3\|=\|A^{\varepsilon/3-1/2}P_nB(e_v,z)\|\leqslant\|Az\|\|A^{1/2}e_v\|\leqslant k_0\|Aa\|\exp[-2\sigma\nu_1(t)]\|A^{1/2}e_v\|$$
$$\|I_4\|=\|A^{\varepsilon/3-1/2}P_nB(v,e_w)\|\leqslant n^{\varepsilon}\|A^{1/2}v\|\|e_w\|\leqslant\|Aa\|n^{\varepsilon-1}\exp[-2\sigma\nu_1(t)]\|A^{1/2}e_w\|$$
$$\|I_5\|=\|A^{\varepsilon/3-1/2}P_nB(z,e_v)\|\leqslant\|Az\|\|A^{1/2}e_v\|\leqslant k_0\|Aa\|\exp[-2\sigma\nu_1(t)]\|A^{1/2}e_v\|$$
$$\|I_6\|=\|A^{\varepsilon/6-1/2}P_nB(e_w,v)\|\leqslant n^{\varepsilon}\|A^{1/2}v\|\|e_w\|\leqslant Aa\|n^{\varepsilon-1}\exp[-2\sigma\nu_1(t)]\|A^{1/2}e_w\|$$
$$\|I_7\|=\|A^{\varepsilon/3-1/2}P_nB(e_w,z)\leqslant n^{\varepsilon}\|A^{1/2}z\|\|e_w\|\leqslant k_0\|n^{\varepsilon-1}\exp[-2\sigma\nu_1(t)]\|A^{1/2}e_w\|$$
$$\|I_8\|=\|A^{\varepsilon/3-1/2}P_nB(w,e_w)\|\leqslant n^{\varepsilon}\|A^{1/2}w\|\|e_w\|\leqslant\|Aa\|n^{\varepsilon-1}\exp[-2\sigma\nu_1(t)]\|A^{1/2}e_w\|$$

结合(3.10)式，我们有

$$\sum_{i=1}^{8}\|I_i\|\leqslant M_3\exp[-2\sigma\nu_1 s]\|A^{1/2}e_v\|+M_4\exp[-4\sigma\nu_1 s]n^{\varepsilon-1}(n^{-2}+N^{-1}) \tag{3.12}$$

此处$M_3=(k_0+1)(M_2+1)\|Aa\|$，$M_4=(k_0+1)M_1\|Aa\|$.将(3.12)代入(3.11)，有

$$\|A^{1/2}e_v\|\leqslant M_3\int_1^t(t-s)^{\varepsilon/3-1}\exp[-2\sigma\nu_1(t-s)]\|A^{1/2}e_v\|ds$$
$$+M_4e^{-2\sigma\nu t}n^{\varepsilon-1}(n^{-2}+N^{-1})\int_1^t(t-s)^{\varepsilon/3-1}\exp[-2\sigma\nu_1 s]ds \tag{3.13}$$

令$g(t)=\exp[2\sigma\nu_1 t]\|A^{1/2}c_v\|$，则(3.13)变为

$$g(t)\leqslant M_3\int_0^t(t-s)^{\varepsilon/3-1}g(s)ds+M_4n^{\varepsilon-1}(n^{-2}+N^{-1})\int_0^t(t-s)^{\varepsilon/3-1}\exp[-2\sigma\nu_1 s]ds \tag{3.14}$$

易知$\int_0^t (t-s)^{\varepsilon/3-1}\exp[-2\sigma\nu_1 s]\,ds \leqslant \frac{3}{\varepsilon}+\frac{1}{2\sigma\nu_1} \triangleq \frac{\tilde{C}_\varepsilon}{M_4}$.

利用引理2.1，可得

$$\|A^{1/2}e_v\| \leqslant \tilde{C}_\varepsilon n^{\varepsilon-1}(n^{-2}+N^{-1})\exp\{M_3^{3/\varepsilon}-2\sigma\nu_1\}t \qquad (t\geqslant 1) \tag{3.15}$$

上式是对$t\geqslant 1$得出的，若对$t\geqslant t_0>1$，则M_3是$u(t_0)$的函数，且由M_3的定义及引理3.1的估计(3.1)可知，一定存在$t_0>1$使$M_3^{3/\varepsilon}\leqslant\sigma\nu_1$，因此可以断定存在某个仅依赖于$a$，$f,\nu,\sigma$和$\varepsilon$的常数$\bar{C}_\varepsilon>0$使得

$$\|A^{1/2}e_v\| \leqslant \tilde{C}_\varepsilon \bar{C}_\varepsilon n^{\varepsilon-1}(n^{-2}+N^{-1})\exp\{-\sigma\nu_1 t\}, \qquad (t\geqslant 1)$$

若记$C_\varepsilon=\tilde{C}_\varepsilon\bar{C}_\varepsilon$，则可得(3.5)。 **证毕**

推论3.1 在定理3.1的条件下，我们有$\|A^{1/2}(z-w)\|\leqslant c(n^{-2}+N^{-1})\exp[-\sigma\nu_1 t]$.

对于非齐次情形，我们可用完全类似的方法得到如下误差估计。

定理3.2 设$a\in D(A)$，$f\in C([0,\infty),\dot{H}^1(\Omega))\cap C^1([0,\infty),\dot{H}^0(\Omega))$，则任意的$\varepsilon\in(0,1)$存在不依赖于$n,N$的常数，不妨仍记为$L(t)$，使

$$\left.\begin{aligned} &\|A^{1/2}(y-v)\| \leqslant L(t)n^{\varepsilon-1}(n^{-2}+N^{-1}) \qquad (t\geqslant 1)\\ &\|A^{1/2}(z-w)\| \leqslant L(t)(n^{-2}+N^{-1}) \qquad (t\geqslant 1)\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

注3.1 由定理3.1，3.2及推论3.1，我们发现，在用 Fourier 非线性 Galerkin 方法处理周期边界条件 Navier-Stokes 方程时，低频分量的精度要优于高频分量。换句话说，整个方法的精度主要取决于高频分量精度。如何进一步提高对高频分量的逼近程度，是构造算法的关键。

注3.2 参见 E. Weinan 的文章[6]，在用 Fourier-Galerkin 方法处理这一问题时，作者得到如下误差估计：

$$\left.\begin{aligned} &\|A^{1/2}(x-u_g)(t)\| \leqslant CN^{-1}\exp\{-\sigma t\} \quad (t\geqslant 0\text{齐次情形})\\ &\|A^{1/2}(x-u_g)(t)\| \leqslant C(t)N^{-1}, \qquad (t\geqslant 0\text{非齐次情形})\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

其中u_g是(1.6)在V_N中的 Fourier-Galerkin 逼近解。由(3.17)可知，其逼近程度是$O(N^{-1})$，并且在整个$1\sim N$的频率域内求解的是一个非线性发展方程。而由定理3.1，3.2及推论3.1我们知道，用 Fourier 非线性 Galerkin 方法来处理，要达到同样的精度，只需取$n=O(N^{1/2})$。同时注意(2.3)的形式，在$(n+1)\sim N$这一大频率范围内，我们求解的实际上是一个定常的 Stokes 问题，而且由注 2.1 可知（特别是对自治系统），实际上我们只需在$(n+1)\sim 2n$的范围内求解；而在$1\sim n$这一相对很小的范围内求解的才是一个非线性发展方程。众所周知，在对非线性发展方程进行数值模拟时，其计算复杂度主要来自于问题的非定常性及非线性性。因而，正如上面说明的，Fourier 非线性 Galerkin 方法对减小计算复杂度是显而易见的。换言之，即在相当的复杂度下，Fourier 非线性 Galerkin 方法能获得更高的精度，这也就为在目前的计算能力下，直接数值模拟湍流创造了可能。另外，该方法对低频分量事实上可获得更高的逼近程度（见(3.5)及(3.16)的第一式）。

致谢 感谢导师李开泰教授在本文的写作过程中所给予的悉心指导和仔细的审阅。

参 考 文 献

[1] C.Foias, O. Manley and R. Temam, Modelization of the interaction of small and large eddies in two dimensional turbulent flows, *Math. Mod. Numer. Anal. M²AN*. 22 (1988), 93—114.

[2] M. Marion and R. Temam, Nonlinear Galerkin methods, *SIAM J. Numer.*

Anal., 26 (1989), 1139—1157.

[3] M. Marion and R. Temam, Nonlinear Galerkin methods, the finite case elements case, *Numer. Math.*, 57 (1990), 205—225.

[4] R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland Publishing Company, 3rd revised edition (1984).

[5] R. Temam, Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis, *CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math.*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA (1983).

[6] E. Weinan, Convergence of Fourier methods for the Navier-Stokes equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 2 (1993), 650—674.

[7] J. G. Heywood and R. Rannacher, Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem. I. Regularity of solutions and second-order error estimates for spatial dis-cretization, *SIAM J. Numer. Anal.*, 19 (1982), 275—311.

[8] H. Okamoto, On the semi-discrete finite element approximation for the non-stationary Navier-Stokes equation, *J. Fac. Sci.*, Univ. of Tokyo Sec. IA Math, 29 (1982), 613—652.

Fourier Nonlinear Galerkin Approximation for the Two Dimensional Navier-Stokes Equations

Hou Yanren

(Research Centre for Applied Mathematics, Xi'an Jiaotong Uniuersity, Xi'an 710049, *P. R. China)*

Abstract

In this paper, for viscous incompressible Navier-stokes equations with periodic boundary conditions, we prove the existence and uniqueness of the solution corresponding to its Fourier nonlinear Galerkin approximation. At the same time, we give its error estimates.

Key words Navier-Stokes equations, nonlinear Galerkin methods, Fourier methods