

不可压缩橡胶类材料裂纹尖端应力应变场*

王振清¹ 史守峡¹

(钱伟长推荐, 1995年6月2日收到)

摘 要

本文对平面应变情况下不可压缩橡胶类材料裂纹尖端弹性场进行了有限变形分析。裂纹尖端场被分为收缩区和扩张区。借助于新的应变能函数和变形模式, 推出了尖端场各区的渐近方程, 得到了尖端场的完整描述。本文对奇异性作了讨论, 得到了不可压缩橡胶类材料裂纹尖端应力及应变分布曲线, 揭示了裂纹尖端应力应变场的特性。

关键词 橡胶类材料 有限变形 裂纹

一、引 言

早期对裂纹问题的研究, 是在线性理论范围内进行的, 即假定应变为无限小。但是, 这样得到的结果, 应变在裂尖处具有奇异性。尽管奇异性包含有大变形区域, 但对于一般的工程材料, 人们仅仅考虑小变形区域。而对于能够承受大变形的橡胶类材料必须用非线性理论来分析奇异场的应力应变特性。Knowles和Sternberg^[1,2]对平面应变情况下的裂尖场给出了系统的分析。但他们的本构方程中有三个弹性常数, 使渐近解变得十分复杂。同时, 由于裂尖场没有分为收缩区和扩张区, 因此必须引入高阶渐近。Gao^[3]引入三个独立的不变量, 然后给出了一个应变能函数

$$U = a(R^n - 3^n) + b(T - I)^m T^{-1} \quad (1.1)$$

从方程(1.1), 我们能够知道, 应力被分成了静水应力部分和偏应力部分, 因此它具有明显的物理意义。借助于这个本构理论, 采用合理的分区思想, 高玉臣等^[4-7]研究了一系列问题, 取得了许多成果。最近, Gao^[8]又提出了一种新的应变能函数

$$U = e[(I_1^n - 3^n) + (I_{-1}^n - 3^n)] \quad (1.2)$$

其中, e, n 为材料常数, I_1 为第一不变量, I_{-1} 为

$$I_{-1} = \mathbf{d}_{-1} : \mathbf{G} \quad (1.3)$$

式中的 \mathbf{d}_{-1} 为Cauchy应变张量 \mathbf{d} 的逆变张量, \mathbf{G} 为单位张量。本文将采用这一本构关系解决不可压缩橡胶类材料受拉伸作用时的有限变形问题。

* 黑龙江省自然科学基金资助项目
1 哈尔滨工程大学, 哈尔滨 150001

二、基本理论

考虑一个三维弹性体, 在变形前和变形后一般物质点的位置向量用 \mathbf{P} 和 \mathbf{p} 表示, 设物质坐标为 $x^I (I=1, 2, 3)$, 则两种局部标架为

$$\mathbf{P}_I = \partial_I \mathbf{P} \quad \mathbf{p}_i = \partial_i \mathbf{p} \quad (2.1)$$

其中 $\partial_I = \partial / \partial x^I$. 定义变形梯度为

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{P}^I \quad (2.2)$$

\mathbf{P}^I 为 \mathbf{P}_I 的逆变基, \otimes 为并矢符号, 今后将省略不写, 求和约定适用于本文.

Green 和 Cauchy 应变张量及其逆应变张量为

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{p}_I \cdot \mathbf{p}_J) \mathbf{P}^I \mathbf{P}^J, \quad \mathbf{d} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = (\mathbf{P}^I \cdot \mathbf{P}^J) \mathbf{p}_I \mathbf{p}_J \quad (2.3)$$

$$\mathbf{D}_{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{p}^I \cdot \mathbf{p}^J) \mathbf{P}_I \mathbf{P}_J, \quad \mathbf{d}_{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T = (\mathbf{P}_I \cdot \mathbf{P}_J) \mathbf{p}^I \mathbf{p}^J \quad (2.4)$$

式中上标“ T ”表示转置, 上标“-1”表示逆. 用 \mathbf{G} 表示二阶单位张量, 则可引入如下不变量

$$I_1 = \mathbf{D} : \mathbf{G} = \mathbf{d} : \mathbf{G}, \quad I_2 = \mathbf{D}^2 : \mathbf{G} = \mathbf{d}^2 : \mathbf{G}, \quad I_3 = \mathbf{D}^3 : \mathbf{G} = \mathbf{d}^3 : \mathbf{G} \quad (2.5)$$

$$I_{-1} = \mathbf{D}_{-1} : \mathbf{G} = \mathbf{d}_{-1} : \mathbf{G} \quad (2.6)$$

体应变 k 为

$$k = \frac{1}{6} (I_1^3 - 3I_1 I_2 + 2I_3) \quad (2.7)$$

由(1.2)式, 我们能够求得 Kirchhoff 应力和 Cauchy 应力为

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{D}} = 2ne [I_1^{-1} \mathbf{G} - I_2^{-1} \mathbf{D}^{-2}] \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\tau} = k^{-\frac{1}{2}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T = 2nek^{-\frac{1}{2}} [I_1^{-1} \mathbf{d} - I_2^{-1} \mathbf{d}_{-1}] \quad (2.9)$$

考虑无体力作用下的弹性体的平衡, 则平衡方程可写为

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (2.10)$$

式中 $\mathbf{v} = \mathbf{p}^I \partial_I$

三、扩张区

本文考虑平面应变情况下半无限体 I 型裂纹, 如图1所示.

对于二维问题, 选择第三个坐标轴 Z 垂直于所考虑的平面. 取 (R, Θ) 为 Lagrange 坐标, 原点位于变形前的裂纹尖端. (r, θ) 为 Euler 坐标, 原点位于变形后的裂纹尖端. 显然, (r, θ) 是 (R, Θ) 的函数.

由于裂纹尖端附近变形很大, 因此我们假定裂纹尖端场是由三个区域组成的. 这三个区域是一个扩张区 (称之为 E 区), 两个收缩区 (称之为 N 区). 假定变形前位于裂纹前方很狭窄的区域, 变形后变得十分宽广, 几乎充满整个空间, 这就是扩张区; 而位于扩张区两侧的区域, 变形前极其宽广, 几乎充满整个区域, 变形

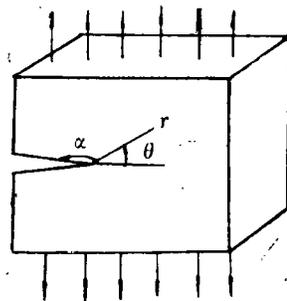


图1 受力模型

后却变得十分狭窄, 这就是收缩区。由于上下对称, 我们仅仅考虑其上半部分。

对于扩张区, 设变形模式为

$$\left. \begin{aligned} r &= R^{1+\beta} \rho(\xi) \\ \theta &= \frac{\pi}{2} - \omega(\xi) \end{aligned} \right\} \quad \xi = \Theta R^{-\alpha} \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (3.1)$$

式中, β, α 为材料常数, $0 \leq \Theta \leq \Theta_0$, Θ_0 为一非常小的正数。

由(2.1)式可得扩张区的局部基矢量为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_R &= R^\beta \{ [(1+\beta)\rho - \alpha\xi\rho'] \mathbf{e}_r + \alpha\xi\rho\omega' \mathbf{e}_\theta \} \\ \mathbf{p}_\theta &= R^{\beta-\alpha+1} (\rho' \mathbf{e}_r - \rho\omega' \mathbf{e}_\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

式中

$$\mathbf{e}_r = \partial_r \mathbf{p} \quad \mathbf{e}_\theta = \partial_\theta \mathbf{p} \quad (3.3)$$

将(3.2)代入(2.3)式, 略去高阶量, 并注意

$$\mathbf{P}_R \cdot \mathbf{P}_R = 1, \quad \mathbf{P}_R \cdot \mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_\theta \cdot \mathbf{P}_R = 0, \quad \mathbf{P}_\theta \cdot \mathbf{P}_\theta = R^2 \quad (3.4)$$

可得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d} &= R^{2(\beta-\alpha)} [\rho'^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \rho^2 \omega'^2 \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta - \rho\rho'\omega' (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r)] \\ I_1 &= \mathbf{d} : \mathbf{G} = R^{2(\beta-\alpha)} u(\xi) \\ k &= R^{4\beta-2\alpha} [v(\xi)]^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

式中

$$u(\xi) = \rho'^2 + \rho^2 \omega'^2, \quad v(\xi) = -(1+\beta)\rho^2 \omega' \quad (3.6)$$

对于不可压缩材料, 体应变 $k \equiv 1$, 即

$$\alpha = 2\beta, \quad v^2 = 1 \quad (3.7)$$

同理可求得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}_{-1} &= R^{-2\beta} [\rho'^2 \omega'^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \rho'^2 \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \rho\rho'\omega' (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r)] \\ I_{-1} &= \mathbf{d}_{-1} : \mathbf{G} = I_1 = R^{-2\beta} u(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

将上述各式代入(2.9)式, 可得本构方程为

$$\boldsymbol{\tau} = 2ne\nu n^{-1} R^{-2\beta n} [(\rho'^2 - \rho^2 \omega'^2) (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta) - 2\rho\rho'\omega' (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r)] \quad (3.9)$$

因为

$$\left. \begin{aligned} \partial_r &= \frac{R^{-\beta}}{(1+\beta)\rho} \partial_R \\ \frac{1}{r} \partial_\theta &= R^{-\beta} [-\rho' \partial_R + R^{-1} (1+\beta) \rho \partial_\xi] \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

将(3.9)式代入(2.10)式, 经过极其复杂的推导可得

$$\left. \begin{aligned} \omega'' &= \frac{\rho'\omega'}{\rho} \left[\frac{3-4n}{(1+\beta)\Delta} \cdot 2\beta n u - 2 \right] \\ \rho'' &= \rho\omega'^2 \left[\frac{2\beta n u}{(1+\beta)\rho^2 \omega'^2 \Delta} (\rho'^2 - \rho^2 \omega'^2) + 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

式中

$$\Delta = 2\rho'^2 (1-2n^2) - 2(2n-1)\rho^2 \omega'^2 \quad (3.12)$$

由该问题的对称性可知, 在 $\Theta=0$ 上的点只有 r 方向的位移, 而无 θ 方向的位移。根据(3.1)式, 我们有边界条件 (当 $\xi=0$)

$$\rho'(0)=0, \omega(0)=\pi/2 \quad (3.13)$$

由问题本身我们知道, 在 $\xi \rightarrow \infty$ 即 $\Theta \rightarrow \pi/2$ 时有

$$\omega(\infty)=0 \quad (3.14)$$

若 $\rho_1(\xi)$ 和 $\omega_1(\xi)$ 是基本方程的一组解, 则由(3.11)、(3.12)式可知

$$\rho_2(\xi)=a^{\frac{1}{2}}\rho_1(a\xi), \omega_2(\xi)=\omega_1(a\xi) \quad (3.15)$$

也是方程的解。因此, 我们可以把 a 作为自由参数, 在知道典型解 $\rho_1(\xi)$, $\omega_1(\xi)$ 后, 通过变换(3.15)式, 可以得到方程的其它解。 a 的大小反映了场的强弱。我们取 $a=1$ 对应的解为典型解, 即 $\rho_1(0)=1$, 来进行数值计算。因此可得另一边界条件

$$\rho(0)=1 \quad (3.16)$$

通过调节 $\omega'(0)$ 来满足方程(3.11), 得到不同材料常数时的 ρ , ω 的变化曲线。

四、收 缩 区

设 Θ_0 为一非常小的正常数, 对于 N 中的任一角度 Θ 满足 $\Theta_0 < \Theta \leq \pi$, 设变形模式为

$$r=R^{1-\delta}\varphi(\Theta), \theta=\frac{\pi}{2}-R^\gamma\psi(\Theta), z=Z \quad (4.1)$$

式中材料常数 $\delta, \gamma > 0$ 。可求得局部基矢量为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_R &= R^{-\delta}\varphi[(1-\delta)\mathbf{e}_r - \gamma R^\gamma\psi\mathbf{e}_\theta] \\ \mathbf{p}_\theta &= R^{1-\delta}[\varphi'\mathbf{e}_r - R^\gamma\varphi\psi'\mathbf{e}_\theta] \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

同扩张区的推导一样, 我们可以求得Cauchy应变 \mathbf{d} , 不变量 I_1 , 体应变 k 为

$$\mathbf{d}=R^{-2\delta}\bar{\mathbf{d}}, I_1=R^{-2\delta}A, k=R^{2\gamma-4\delta}\cdot B^2 \quad (R \ll 1) \quad (4.3)$$

式中

$$\bar{\mathbf{d}}=A\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r+R^{2\gamma}D\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta-R^\gamma C(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta+\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_r) \quad (4.4)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= (1-\delta)^2\varphi^2+\varphi'^2 \\ B &= \varphi[\gamma\varphi'\psi-(1-\delta)\varphi\psi'] \\ C &= \varphi[(1-\delta)\gamma\varphi\psi+\varphi'\psi'] \\ D &= \varphi^2(\gamma^2\psi^2+\psi'^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

对于不可压缩材料, $k=1$, 即

$$\gamma=2\delta, B=\varphi[\gamma\varphi'\psi-(1-\delta)\varphi\psi']=1 \quad (4.6)$$

同理我们可求得

$$\mathbf{d}_{-1}=R^{2\delta}\bar{\mathbf{d}}_{-1}, I_{-1}=R^{2\delta-2\gamma}A=I_1 \quad (R \ll 1) \quad (4.7)$$

式中

$$\bar{\mathbf{d}}_{-1}=D\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r+R^{-\gamma}C(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta+\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_r)+AR^{-2\gamma}\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta \quad (4.8)$$

代入本构方程(2.9)

$$\boldsymbol{\tau}=2n\mathbf{e}A^{n-1}R^{-2\delta(n-1)}[R^{-2\delta}\bar{\mathbf{d}}-R^{2\delta}\bar{\mathbf{d}}_{-1}] \quad (4.9)$$

同样由(4.1)式可求得

$$\left. \begin{aligned} \partial_r &= \varphi R^\delta[-\psi'\partial_R+\gamma\psi R^{-1}\partial_\theta] \\ \frac{1}{r}\partial_\theta &= R^{\delta-\gamma}[-\varphi'\partial_R+(1-\delta)R^{-1}\varphi\partial_\theta] \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

从上式可见, 当 $R \rightarrow 0$ 时, ∂_θ/r 与 $R^{-\nu}\partial_r$ 具有相同的奇异性, 记作

$$\frac{1}{r}\partial_\theta \sim R^{-\nu}\partial_r = R^{-2\delta}\partial_r \quad (4.11)$$

比较平衡方程(2.10)中的两个式子, 可知

$$\tau^{\theta\theta} \sim R^\nu \tau^{r\theta} \sim R^{2\nu} \tau^{rr} \quad (4.12)$$

对于受拉情况下的裂纹问题, \mathbf{d} 和 \mathbf{d}_{-1} 中的 $\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta$ 项必须是相互协调的. 再由(4.12)式可知, 在(4.1)这样变形模式情况下, \mathbf{d}_{-1} 不起作用, 即我们只能取

$$\bar{\mathbf{d}}_{-1} = 0 \quad (4.13)$$

$$\therefore \tau = 2neA^{n-1}R^{-2\delta n} [A\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r - R^{2\delta}C(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r) + R^{4\delta}D\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta] \quad (4.14)$$

当 $R \rightarrow 0$ 时, $\tau^{rr} \gg \tau^{\theta\theta}$, 因此平衡方程(2.10)的第一式简化为

$$\partial_r \tau^{rr} + \frac{1}{r} \partial_\theta \tau^{r\theta} + \frac{1}{r} \tau^{rr} = 0 \quad (4.15)$$

将(4.14)式代入(4.15)式, 经过非常繁杂的推导后, 可得最后方程为

$$[\varphi'' + (1-\delta)^2\varphi] \left[1 + \frac{2(n-1)}{A} \varphi'^2 \right] + 2\delta(1-n)(1-\delta)\varphi = 0 \quad (4.16)$$

由于裂纹表面为自由表面($\Theta = \pi$), 不受外力作用, 故应有应力边界条件

$$\tau^{\theta\theta}(\pi) = R^{R\theta}(\pi) = 0 \quad (4.17)$$

由(2.3)、(2.9)可得

$$\mathbf{p}_\theta = 0, \quad \Theta = \pi \quad (4.18)$$

从(4.2)式可知, 下式可渐近地满足(4.18)式

$$\varphi'(\pi) = 0 \quad (4.19)$$

在 $\Theta \rightarrow 0$ 处, 由收缩区在 $\Theta \rightarrow 0$ 时的方程与扩张区在 $\xi \rightarrow \infty$ 时的方程相一致, 即可得另一边条件为

$$\varphi(0) = 0 \quad (4.20)$$

五、数值分析与计算

对于收缩区, 最后控制方程为(4.16)式, 边界条件为(4.19)、(4.20)式, 我们可以进行数值计算. 计算结果表明, 对不同的 n 值, 有唯一确定的 δ 值, 且 $\delta = 1/2n$. 在计算中我们发现, 无论 $\varphi'(0)$ 取什么值, 都不影响 $\varphi'(\pi) = 0$, 只是 φ 的值不同而已, 因此计算中为了方便, 我们取 $\varphi'(0) = 1$. 图2给出了 $n=2$ 时, $\varphi, \varphi' \sim \Theta$ 的关系曲线.

由变形模式, 我们知道当 $\xi \rightarrow \infty$ 时, $\theta \rightarrow \pi/2$. 因此, 收缩区在变形后几乎变成一条直线, 而扩张区在变形后则几乎充满整个空间. 所以, 我们只需计算扩张区的应力、应变, 实际上就是整个尖端场的应力、应变, 只是应力、应变当 $\theta \rightarrow \pi/2$ 时不适用.

将扩张区的应力(4.11)写成坐标 r, θ 的函数

$$\tau^{ij} = r^{-i} T^{ij}(\theta) \quad (5.1)$$

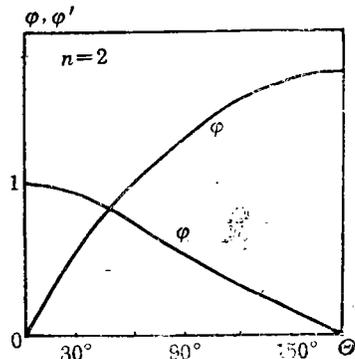


图2 $\varphi, \varphi' \sim \Theta$ 关系曲线

可求得

$$t=2\beta n/(1+\beta) \quad (5.2)$$

即

$$T^{ij}(\theta)=\rho^t \tau^{ij}(\xi) \quad (5.3)$$

同理我们可得

$$e^{ij}(\theta)=\rho^\lambda d^{ij}(\xi) \quad (5.4)$$

式中

$$\lambda=2\beta/(1+\beta) \quad (5.5)$$

这样, 对于 ξ 从 $0 \rightarrow \infty$, 我们就可以计算出与 θ 对应的应力 $T^{ij}(\theta)$, 应变 $d^{ij}(\theta)$ 。图3给出了 $n=2$ 时的应力 $T^{ij}(\theta)$, 应变 $d^{ij}(\theta)$ 与 θ 变化的关系曲线。

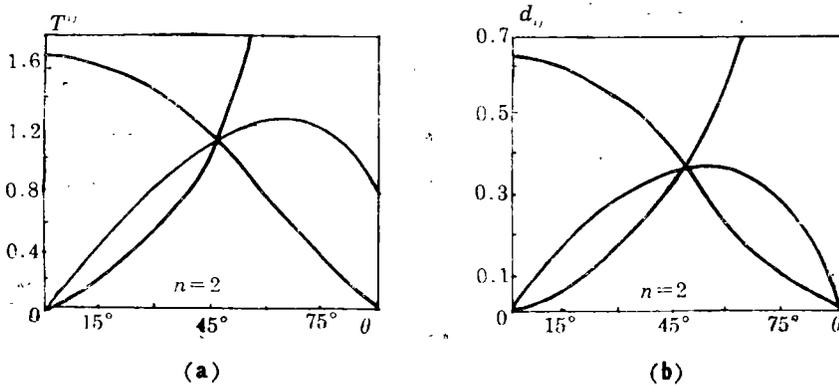


图3 $T^{ij}, d^{ij} \sim \theta$ 的关系曲线

六、结 论

1. 本文采用的新的一类橡胶材料的本构模型, 尽管本构关系中只包含两项, 但却能充分反映材料的特性, 因而得到合理的解答。而且, 在研究奇异性场方面具有很大的优越性。

2. 对于不可压缩类橡胶材料, 裂纹尖端场是由两个收缩区和一个扩张区组成。变形前几乎充满整个空间的收缩区, 变形后却变得极为狭窄, 几乎变成为一条线; 而变形前很狭窄的扩张区, 变形后却变得十分宽大, 几乎占满整个裂尖端周围。

3. 裂纹尖端各区具有相同的奇异性 r^{-t} ,

其中

$$t=2\beta n/(1+\beta)$$

在裂纹表面($\theta=\pi$)时, $\delta=1/2n$, δ 仅仅是材料常数 n 的函数。

参 考 文 献

- [1] J.K. Knowles and E. Sternberg, An asymptotic finite-deformation analysis of the elastic field near the tip of a crack, *J. Elasticity*, 3(2) (1973), 67—108.
- [2] J. K. Knowles and E. Sternberg, Finite-deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack; Reconsideration and high-order results, *J. Elasticity*, 4(3), (1974), 201—233.

- [3] Y. C. Gao, Elastostatic field near the crack tip in a rubber-like media, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 14 (1990), 219—231.
- [4] Shi Zhifei and Gao Yuchen, Stress-strain field near the notch tip of a rubber sheet, *Acta Mechanica Sinica*, 11(2) (1995), 169—177.
- [5] T. S. Gao, A rubber wedge under the tension of a line load at its tip, *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I*, 318 (1994), 1—6.
- [6] T. S. Gao and Y. C. Gao, A rubber wedge under the compression of a line load, *Internat. J. Solids and Structures*, 31 (1994), 2393—2406.
- [7] Y. C. Gao and B. Liu, A rubber cone under the tension of a concentrated force, *Int. J. Solids Structures*, 32(11) (1995), 1485—1493.
- [8] 王振清, 受拉情况下一类橡胶材料缺口顶端的大变形分析, 工学博士学位论文, 哈尔滨工程大学 (1994).

Stress-Strain Field near the Crack-Tip of an Incompressible Rubber-Like Material

Wang Zhenqing Shi Shouxia

(Harbin Engineering University, Harbin 150001, P. R. China)

Abstract

This paper contains an asymptotic finite-deformation analysis about the elastostatic field near the crack-tip in an incompressible rubber-like material. The crack-tip field is divided into two narrowing sectors and one expanding sector. By the new strain energy function and deformation pattern, we derive and solve the asymptotic equations for each sector of the tip field. The singularity of the crack-tip field is discussed. The curves of stress-strain of the crack-tip field for an incompressible rubber-like material are given and the dominant behaviors of stress and strain near the crack-tip are revealed.

Key words rubber-like material, finite-deformation, crack