

# 圆柱壳在径向冲击载荷作用下的弹性脉冲屈曲

黄承义<sup>1</sup> 刘土光<sup>1</sup> 郑际嘉<sup>1</sup>

(钱伟长推荐: 1994年7月4日收到, 1996年1月8日收到修改稿)

## 摘 要

当圆柱壳承受径向脉冲载荷时, 如果其径厚比大于一特定值, 圆柱壳将产生弹性动力屈曲。本文根据有关实验结果, 假定变形模态, 采用Lagrange方法分析了有限长薄圆柱壳 ( $a/h=480$ ) 在余弦冲击载荷作用下的弹性脉冲动力屈曲, 导出了动力屈曲方程组, 借助数值方法求解方程, 并与有关计算结果进行了比较。

**关键词** 圆柱壳 冲击载荷 弹性动力屈曲

## 一、引 言

对于比较薄的圆柱壳 (径厚比 $\geq 288$ ) 在均匀径向冲击载荷作用下会产生两种完全不同形式的动力屈曲。当冲击载荷强度较低时 (低于产生脉冲动力屈曲载荷强度), 将产生所谓的自动参数振动屈曲 (autoparametric vibration buckling)。当冲击载荷强度较高时, 则产生脉冲动力屈曲 (pulse dynamic buckling)。随着冲击载荷强度的增加, 振动屈曲将转为脉冲动力屈曲。

Lindberg 和 Florence在他们的专著中<sup>[1]</sup>, 对圆柱壳的这两种屈曲形式以及他们之间的转换条件进行了较为详细的理论分析。根据一些近似理论, 他们认为对于均匀的径向冲击屈曲, 当径厚比 $a/h \geq 288$ 时, 圆柱壳处于弹性屈曲, 而对于余弦冲击载荷作用的脉冲动力屈曲, 径厚比 $a/h$ 必须大于406, 圆柱壳才能处于弹性屈曲状态。对于处于 $288 < a/h < 406$ 范围内的圆柱壳, 在余弦冲击载荷作用下, 其响应部分为弹性运动, 部分为塑性流动运动。

非均匀余弦冲击载荷作用下的圆柱壳脉冲动力屈曲, 由于它的极端复杂性, 目前主要通过实验对其进行研究<sup>[2],[3]</sup>, 根据实验观察到的结果推导相应的理论近似公式。Kirkpatrick<sup>[4]</sup>采用DYNA3D程序对有限长 ( $L/D=1/2$ ) 余弦冲击载荷作用下的铝圆柱壳 ( $a/h=240$ ) 进行了数值计算, 并与实验结果进行了对比。

本文根据文献[2]的实验结果, 设定屈曲模态, 采用Lagrange方法分析了有限长的薄圆柱壳 ( $L/2a=1/2$ ,  $a/h=480$ ) 在余弦冲击载荷作用下的弹性脉冲动力屈曲, 导出了动力方程, 并采用数值方法求解。计算结果表明, 不对称冲击载荷作用下, 圆柱壳的最优屈曲模态

<sup>1</sup> 华中理工大学船海系, 武汉 430074

数比对称情况下明显减少, 最优屈曲模态达到其挠动最大值所需的时间要高于对称载荷冲击下的情况。这些结果与已有的实验结果是吻合的<sup>[5]</sup>。

## 二、理 论 分 析

### 2.1 基本假设

考虑弹性小变形, 前屈曲过程, 壳体变形满足横截面假定。

实验表明<sup>[2]</sup>, 图 1 所示的圆柱壳在余弦载荷作用下, 其响应由加载面的内凹运动和脉冲动力屈曲组成, 加载面的轴向呈现一内凹半波, 最大轴向应变位于加载面的轴向中点处。根据上述观察到的实验现象和结果, 并注意到壳两端的边界条件:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} = v = 0$$

$$x = \pm L/2$$

取位移函数为:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(t) \cos \theta \sin \frac{\pi x}{L}, & v &= \frac{1}{n} w_n(t) \sin n \theta \cos \frac{\pi x}{L} \\ w &= [w_0(t) \cos \theta + w_n(t) \cos n \theta] \cos \frac{\pi x}{L}, & w_t &= \delta_n \cos n \theta \cos \frac{\pi x}{L} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式中:

$$\left\{ \begin{aligned} &u_0(t) \text{ 为轴向位移的最大值;} \\ &w_0(t) \text{ 为径向内凹运动的最大值;} \\ &w_n(t), \delta_n \text{ 分别为径向挠动位移及初缺陷, 忽略轴向及切向初缺陷.} \end{aligned} \right.$$

(2.1) 式中切向位移  $v$  的表述式由文献 [6] 提出的非伸展性条件 (the inextensibility condition) 得到。

### 2.2 动力方程推导

在小位移条件下, 动力方程可由 Lagrange 方法求得。

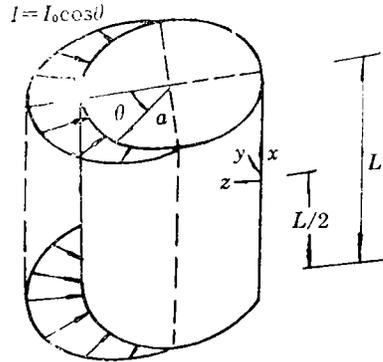
#### 1. 动能计算

当冲击载荷作用在圆柱壳上后, 使加载面产生向内的初始径向速度, 其动能由下式计算:

$$T = \frac{1}{2} \rho a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h/2}^{h/2} (w^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx d\theta dz \quad (2.2)$$

式中:

$$\left\{ \begin{aligned} &\rho \text{ 为材料密度, } a \text{ 为柱壳半径;} \\ &\text{冲击载荷作用范围为 } [-\pi/2, \pi/2] \\ &\text{式中“} \cdot \text{”表示对时间 } t \text{ 求导.} \end{aligned} \right.$$



壳参数: 6061-T6 铝, 壳两端夹支  
 $a/h=480$ ,  $L/2a=1/2$ ,  $I$  沿轴向均布

图 1 圆柱壳的几何坐标与载荷分布图

将(2.1)式代入(2.2)式, 并采用如下无量纲

$$\bar{w}_0 = w_0/a, \bar{w}_n = w_n/a, \bar{u}_0 = u_0/a, \bar{\delta}_n = \delta_n/a, \tau = ct/a \quad (2.3)$$

而

$$c = (E_1/\rho)^{1/2}, E_1 = E/(1-\mu^2)$$

则动能 $T$ 为:

$$T = \frac{1}{4} E_1 a L \left( \frac{\pi}{2} \dot{\bar{u}}_0^2 + \frac{\pi}{2} \frac{n^2+1}{n^2} \dot{\bar{w}}_n^2 + \frac{\pi}{2} \dot{\bar{w}}_0^2 + k_{1n} \dot{\bar{w}}_n \dot{\bar{w}}_0 \right) \quad (2.4)$$

式中:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{"."表示对}\tau\text{求导} \\ k_{1n} = \frac{2}{n+1} \sin \frac{n+1}{2} \pi + \frac{2}{n-1} \sin \frac{n-1}{2} \pi \end{array} \right.$$

## 2. 应变能计算

加载面应变能由下式计算:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta}) dx a d\theta dz \quad (2.5)$$

圆柱壳变形几何方程:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_m + z \left( \frac{w}{a^2} + \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2} \right) \\ \gamma_{x\theta} = \frac{\partial u}{a \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta \partial x} \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

(2.6)式中 $\varepsilon_m$ 为考虑初缺陷情况下圆柱壳中面应变, 可通过微分几何方法得到, 具体求解步骤可参照文献[1], 其值为:

$$\varepsilon_m = \bar{v}' - \bar{w} - \bar{w} \cdot \bar{v}' + \frac{1}{2} (\bar{w}')^2 + \bar{w} \cdot \bar{w}' - \bar{w}_1 \cdot \bar{v}' \quad (2.7)$$

式中“'”表示对角位移 $\theta$ 求导。忽略(2.6)式中其他各项的初缺陷。

圆柱壳物理方程:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_x), \quad \gamma_{x\theta} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{x\theta} \quad (2.8)$$

将(2.6)、(2.8)每式代入(2.5)式, 并注意到(2.3)式得

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} E_1 a h \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ a^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + a^2 a^4 \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)^2 + \varepsilon_m^2 \right. \\ & \left. + a^2 (\bar{w}'' + \bar{w})^2 + 2\mu \left[ a \varepsilon_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + a^2 a^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} (\bar{w}'' + \bar{w}) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (1-\mu) \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} + a \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right]^2 + 2(1-\mu) a^2 a^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial \theta} \right)^2 \right\} d\theta dx \quad (2.9) \end{aligned}$$

式中:  $a^2 = h^2/12a^2$

## 3. 动力方程推导

将(2.1)、(2.7)式代入(2.9)式, 忽略4阶项, 得应变能的表达式为:

$$U = \frac{1}{4} E_1 a h L \left\{ \left( \frac{\pi^3}{2} + \frac{1-\mu}{4} \pi \right) \bar{u}_0^2 + \left[ \frac{\pi^5}{2} \alpha^2 + (1-\mu) \pi^3 \alpha^2 + \frac{\pi}{2} - \frac{8n}{3\pi} \bar{w}_n k_{3n} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{16}{3\pi} k_{5n} \bar{w}_n - \frac{8n}{3\pi} \bar{\delta}_n k_{3n} + \frac{16\mu}{9} \bar{u}_0 \left] \bar{w}_0^2 - \frac{16}{9\pi} \bar{w}_0^3 + \left[ \frac{1}{2} \alpha^2 \pi^5 + \alpha^2 (n^2 - 1)^2 \frac{\pi}{2} \right. \right. \\
& + \mu \alpha^2 \pi^3 (n^2 - 1) + \frac{1-\mu}{4n^2} \pi^3 + (1-\mu) \alpha^2 n^2 \pi^3 - \frac{8}{3\pi} n^2 \left( 1 - \frac{1}{2} k_{4n} \right) \left. \right] \bar{w}_0 \\
& + \frac{16}{3\pi} \left( 1 + \frac{1}{2} k_{4n} \right) \bar{w}_0 - \frac{16}{3} \mu \left( 1 + \frac{1}{2} k_{4n} \right) \bar{u}_0 + \frac{8}{3} \mu n^2 \left( 1 - \frac{1}{2} k_{4n} \right) \bar{u}_0 \left. \right\} \bar{w}_n^2 \\
& + \left[ \alpha^2 \pi^4 k_{1n} + \mu \alpha^2 \pi^2 (n^2 - 1) k_{1n} + 2(1-\mu) \cdot \alpha^2 \pi^2 n k_{2n} - \frac{16}{3\pi} n^2 \bar{\delta}_n \left( 1 - \frac{1}{2} k_{4n} \right) \right. \\
& + \frac{16}{3\pi} \bar{\delta}_n \left( 1 + \frac{1}{2} k_{4n} \right) - \frac{16}{3} \mu k_{5n} \bar{u}_0 + \frac{8}{3} \mu n k_{3n} \bar{u}_0 \left. \right] \bar{w}_0 \bar{w}_n + \frac{\pi}{2n} (1-\mu) k_{2n} \bar{u}_0 \bar{w}_n \\
& - \mu \pi^2 \bar{u}_0 \bar{w}_0 + \frac{8}{3} \mu n \bar{\delta}_n \bar{u}_0 \left[ \bar{w}_0 k_{3n} + 2n \bar{w}_n \left( 1 - \frac{1}{2} k_{4n} \right) \right] - \frac{16}{3} \mu \pi \left( 1 + \frac{1}{2} k_{4n} \right) \bar{\delta}_n \bar{u}_0 \bar{w}_n
\end{aligned} \tag{2.10}$$

在(2.10)式中已用到图1给出的  $L/2a=0.5$  这一条件.

其中:

$$\left\{ \begin{aligned}
k_{1n} &= \frac{2}{n+1} \sin \frac{n+1}{2} \pi + \frac{2}{n-1} \sin \frac{n-1}{2} \pi \\
k_{2n} &= \frac{2}{n-1} \sin \frac{n-1}{2} \pi - \frac{2}{n+1} \sin \frac{n+1}{2} \pi \\
k_{3n} &= \frac{1}{n-2} \sin \frac{n-2}{2} \pi - \frac{1}{n+2} \sin \frac{n+2}{2} \pi \\
k_{4n} &= \frac{1}{2n+1} \sin \frac{2n+1}{2} \pi + \frac{1}{2n-1} \sin \frac{2n-1}{2} \pi \\
k_{5n} &= \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+2} \sin \frac{n+2}{2} \pi + \frac{1}{n-2} \sin \frac{n-2}{2} \pi \right)
\end{aligned} \right.$$

将动能(2.4)式及应变能(2.10)式代入Lagrange方程:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$$

则可得动力响应方程.

将  $\bar{u}_0, \bar{w}_0, \bar{w}_n$  分别替换上式中  $x_i$ , 注意到  $\bar{w}_n \ll \bar{w}_0$ ,  $\bar{\delta}_n \ll \bar{w}_0$ , 以及忽略位移平方项与  $\bar{w}_n \cdot \bar{\delta}_n$  项, 即可分别得到轴向运动方程、径向内凹运动方程以及屈曲运动方程为:

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_0 + \left( \pi^2 + \frac{1-\mu}{2} \right) \bar{u}_0 + \frac{1}{\pi} \left( -\frac{16}{3} k_{5n} + \frac{8}{3} \mu n k_{3n} \right) \bar{w}_0 \bar{w}_n + \frac{1}{2n} (1-\mu) k_{2n} \bar{w}_n \\
- \pi \mu \bar{w}_0 + \frac{8}{3\pi} \mu n \bar{\delta}_n k_{3n} \bar{w}_0 = 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{w}_0 + \frac{k_{1n}}{\pi} \ddot{w}_n + 2 \left[ \frac{\pi^4}{2} \alpha^2 + (1-\mu) \pi^2 \alpha^2 + \frac{1}{2} - \frac{8n}{3\pi^2} \bar{w}_n k_{3n} + \frac{16}{3\pi^2} k_{5n} \bar{w}_n \right. \\
\left. - \frac{8n}{3\pi^2} \bar{\delta}_n k_{3n} + \frac{16}{9\pi} \mu \bar{u}_0 \right] \bar{w}_0 + \left[ \alpha^2 \pi^3 k_{1n} + \mu \alpha^2 \pi (n^2 - 1) k_{1n} \right.
\end{aligned}$$

$$+2(1-\mu)\alpha^2\pi^4nk_{2n} - \frac{16}{3\pi}k_{5n}\bar{u}_0 + \frac{8}{3\pi}\mu nk_{3n}\bar{u}_0 \Big] \bar{w}_n - \frac{16}{3\pi^2}\bar{w}_0^2 \\ - \mu\pi\bar{u}_0 + \frac{8}{3\pi}\mu n^2\bar{u}_0k_{3n} - \frac{16}{3}\mu\left(1 + \frac{1}{2}k_{4n}\right)\bar{\delta}_n\bar{u}_0 = 0 \quad (2.12)$$

$$\ddot{\bar{w}}_n + \frac{n^2k_{1n}}{\pi(n^2+1)}\ddot{\bar{w}}_0 + \frac{2n^2}{n^2+1}\left[\frac{1}{2}\alpha^2\pi^4 + \frac{1}{2}\alpha^2(n^2-1)^2 + \mu\alpha^2\pi^2(n^2-1)\right. \\ \left. + \frac{1-\mu}{4n^2}\pi^2 + (1-\mu)\alpha^2n^2\pi^2 - \frac{8}{3\pi^2}n^2\left(1 - \frac{1}{2}k_{4n}\right)\bar{w}_0 + \frac{16}{3\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2}k_{4n}\right)\right. \\ \left. - \frac{16}{3\pi}\mu\left(1 + \frac{1}{2}k_{4n}\right)\bar{u}_0 + \frac{8}{3\pi}\mu n^2\left(1 - \frac{1}{2}k_{4n}\right)\bar{u}_0\right]\bar{w}_n \\ + \frac{n^2}{n^2+1}\left[\alpha^2\pi^3k_{1n} + \mu\alpha^2\pi(n^2-1)k_{1n} + 2(1-\mu)\alpha^2\pi nk_{2n}\right. \\ \left. - \frac{16}{3\pi^2}n^2\bar{\delta}_n\left(1 - \frac{1}{2}k_{4n}\right) + \frac{16}{3\pi^2}\bar{\delta}_n\left(1 + \frac{1}{2}k_{4n}\right) - \frac{16}{3}k_{5n}\bar{u}_0 + \frac{8}{3}\mu nk_{3n}\bar{u}_0\right]\bar{w}_0 \\ + \frac{n^2}{n^2+1}\left[\frac{1-\mu}{2n}\bar{u}_0k_{2n} + \frac{16}{3\pi}\mu n^2\bar{\delta}_n\bar{u}_0\left(1 - \frac{1}{2}k_{4n}\right)\right] = 0 \quad (2.13)$$

(2.11)、(2.12)、(2.13)式即为不对称余弦冲击载荷作用下圆柱壳弹性脉冲屈曲方程组，从上述三式可以看到，轴向位移 $\bar{u}_0$ ，径向内凹位移 $\bar{w}_0$ 及径向挠曲位移 $\bar{w}_n$ 是相互联系相互影响的，每一位移的求解必须联立求解上述三个方程。求解过程可用数值方法进行。

### 三、算例及结果分析

为便于同已有的对称屈曲计算结果进行比较，取与文献[1]中相同的参数： $a/h=480$ ， $V_0=40\text{m/s}$ ， $c=5100\text{m/s}$ ， $\mu=0.35$ 。

其中 $V_0$ 值比文献[1]中要大一倍。由文献[5]，圆柱壳处于弹性屈曲状态时，余弦冲击载荷强度要高于对称冲击载荷强度一倍，圆柱壳才能产生脉冲动力屈曲。初缺陷取壳厚的1%，即 $\bar{\delta}_n=0.01h/a=0.01/480$ 。

采用4阶龙格库塔法求解(2.11)、(2.12)、(2.13)式，初始条件取为：

$$\{\bar{u}_0, \dot{\bar{u}}_0, \bar{w}_0, \dot{\bar{w}}_0, \bar{w}_n, \dot{\bar{w}}_n\}^T = \{0, 0, 0, 40/5100, 0, 0\}^T$$

计算结果表明：轴向位移 $\bar{u}_0$ ，径向位移 $\bar{w}_0$ 不随模态数 $n$ 值的变化而变化，它们只是时间 $\tau$ 的函数， $\bar{u}_0, \bar{w}_0$ 随 $\tau$ 变化曲线如图2所示。从该图中可以看出它们呈现一种振荡函数的性态，并且 $\bar{w}_0$ 可近似为正弦函数分布。而且 $\bar{w}_0$ 的值要大于 $\bar{u}_0$ 的值，这说明圆柱壳的径向位移值要大于轴向位移值。这一点与[2]的实验结果是一致的。

挠曲位移 $\bar{w}_n$ 的解要复杂一些。当 $n$ 取奇数值时( $n=3, 5, 7, \dots$ )， $\bar{w}_n$ 的值非常微小，为 $10^{-22}$ 量级，接近于零。当 $n$ 取( $n=4, 8, 12, 16, \dots$ )值时， $\bar{w}_n$ 的解呈周期振荡函数性质，亦不是屈曲函数解。当 $n$ 取( $n=6, 10, 14, 18, \dots$ )值时， $\bar{w}_n$ 值显示出屈曲函数特性解。并在 $n=6$ 时， $\bar{w}_n$ 值取为最大值。随着 $n$ 值的增加， $\bar{w}_n$ 急剧减小，最后当 $n$ 取( $n=22, 26, \dots$ )值时， $\bar{w}_n$ 亦变为周期振荡函数。需要指出的是，由于 $k_{1n}, k_{2n}, k_{3n}, k_{4n}, k_{5n}$ 出现在动力方程组中，当 $n$ 取不同值时，使它们的正负号不断发生跳跃，破坏了 $\bar{w}_n$ 函数解的特性，使 $\bar{w}_n$ 只能在一些孤立的 $n$ 值上取得指数函数解的特性。 $\bar{w}_n$ 函数的解如图3所示。

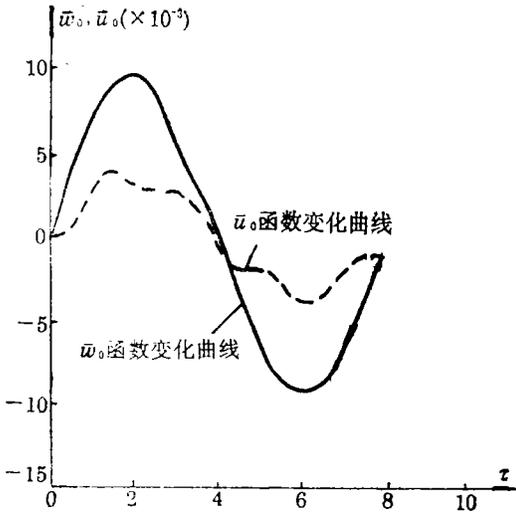
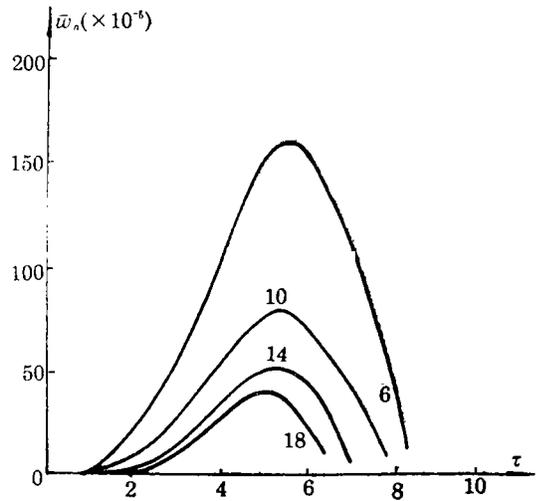


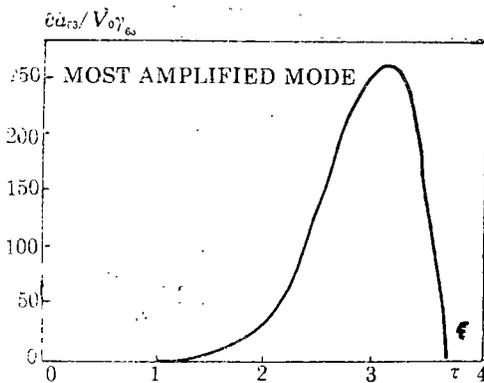
图2  $u_0, w_0$  函数解曲线



图中数字表所取的模态数  $n$   
图3  $w_n$  函数解曲线

图4是文献[1]给出的具有相同参数无限长圆柱壳或圆环的最优模态放大曲线，其放大曲线是由速度挠动求得的，但根据[1]中以及本文计算结果表明：由速度挠动与形状初缺陷挠动计算得到的屈曲性态是完全相同的，所不同的是 $w_n$ 的幅值有所变化，因而它们之间仍具有一定的可比性。

比较图3与图4可知，对称冲击与不对称冲击的最优模态数发生了较大的变化，分别为63和6。在余弦冲击载荷情况下，其最优屈曲模态达到挠动位移 $w_n$ 最大值所需的时间要高于对称冲击载荷作用的情况，其时间值分别为5.6和3.1。也就是说余弦冲击载荷作用的圆柱壳其屈曲时间滞后于对称冲击载荷作用的圆柱壳。这些结果与已有的实验现象及计算结果是吻合的。



$(V_0/c=0.004, a/h=480, \gamma_{e3}=0.01)$

图4 对称冲击载荷作用下最优模态 $n=63$ 放大函数图

#### 四、结 论

本文通过设定屈曲模态函数，采用Lagrange方法推导出余弦冲击载荷作用下脉冲弹性

屈曲动力方程,应用龙格库塔方法求解方程,得到了最优屈曲模态.计算结果表明,轴向及径向内凹位移与屈曲模态数 $n$ 无关,具有周期振荡函数特性.挠曲位移 $w_n$ 在 $n$ 取某些值时,呈现出屈曲函数特性.与对称冲击相比,屈曲的模态数大幅度减小,最优屈曲模态挠曲函数 $w_n$ 达到最大值的时间大幅度增加,这些结果与已有的实验和计算结果是相符的.

### 参 考 文 献

- [1] H. E. Lindberg and A. L. Florence, *Dynamic Pulse Buckling*, Martinus Nijhoff, The Netherland (1987), 104—136.
- [2] Paul R. Gefken, Steven W. Kirkpatrick and Bayard S. Holmes, Response of impulsively loaded cylindrical shells, *Int. J. Impact Engng.*, 7(2) (1988), 213—227.
- [3] W. S. Strickland, J. E. Milton, C. A. Ross and L. J. Mente, Failure of aluminum cylindrical shells subjected to transverse blast loadings, *Shock Vib. Bull.*, 47(4) (1977), 111—120.
- [4] Steven W. Kirkpatrick and Bayard S. Holmes, Structural response of thin cylindrical shells subjected to impulsive external loads, *AIAA Journal*, 26(1) (1988), 96—103.
- [5] H. E. Lindberg and A. L. Florence, *Dynamic Pulse Buckling*, Martinus Nijhoff, The Netherland (1987), 140—149.
- [6] J. N. Goodier and I. K. McIvor, The elastic cylindrical shell under uniform radial impulse, *ASME Trans., J. Appl. Mech., Series E*, 86(31) (1964), 259—266.

## Elastic Pulse Buckling of Cylindrical Shells under Radial Impulsive Loading

Huang Chengyi    Liu Tuguang    Zheng Jijia

(Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, P. R. China)

### Abstract

When a cylindrical shell is subjected to dynamic impulsive loading in radial direction and the ratio of radius-to-thickness exceeds a special value, the cylindrical shell will produce elastic dynamic buckling. This paper which is based on the results of some relative experiments, assumes deformation mode and utilizes Lagrange method to analyse the elastic pulse buckling of a thin cylindrical shell with a finite length under a cosine impulse. The dynamic buckling equations are derived and solved by numerical method. The results of calculation are compared with some relative calculation results obtained by other authors.

**Key words** cylindrical shells, impulsive loading, elastic dynamic buckling