关于非奇异线性变换依赖于方向的分解

张 慎 学[1]

（钱伟长推荐，1994年8月29日收到，1995年12月4日收到修改稿）

摘 要

本文给出了$n(n\geqslant 3)$维欧氏空间E_n上非奇异线性变换F依赖于任意给定的$p(1\leqslant p\leqslant n-2)$个正交方向的分解，进而证明了$F$依赖于上述$p$个正交方向的$q(q=n-p)$个准主向的存在。作为上述结果的应用，我们推导出了处于均匀变形的物体中任意平面内至少存在两个互相正交的应变主方向，以及该物体内应变能密度在上述线性变换的任意一个准主基下可表为5个实数的函数。

关键词 非奇异 线性变换 准主向 分解

一、引 言

一个实n维欧氏空间E_n上的线性变换(二阶张量或简称张量)F，可有多种分解形式．例如：加法分解、乘法分解（即极分解）等．本文给出了F依赖于事先任意给定的p个正交方向的分解，进而证明了F依赖于这p个正交方向的$q(q=n-p)$个准主向的存在性及其求解途径．

当$p=1$且不计F的整体性刚性转动效应时(例如：后面将指出，应变能密度W作为变形梯度F的函数时便是如此)，F恰好对应于$2n-1$个实数．本文给出的分解，对研究物体的变形等将会带来方便．作为应用的一个简例，我们指出：处于均匀变形的物体中任意一个平面内，至少存在两个互相正交的应变主方向，并且应变能密度W在变形梯度F的准主基$\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3\}$下，可以表示为5个实数的函数．

二、记 号 和 定 义

为了方便，本文采用文[1～2]中的部分记法．设E_n为实的n维欧氏空间$(n\geqslant 3)$，一个物体b在实三维欧氏空间E_3中所佔的区域为V．E_n上的线性变换用英文大写字母A，B，…，R，T，U等表示，E_n中的向量用粗体小写英文字母$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$等表示．如所周知，两个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的并积(本文用$\boldsymbol{ab}$表示)是二阶张量．在给定的笛卡儿正交右手坐标系$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$之下，我们写

$$A=A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,\quad \boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i,\quad AT=A_{ik}T_{kj}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

$$A\boldsymbol{a}=A_{ij}a_j\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{ab}=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,\quad A(\boldsymbol{ab})=(A\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=A_{ik}a_kb_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

1 吉林大学数学系，长春 130023

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_i,\ (\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{cd})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{ad})$$
$$(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}),\ AB\boldsymbol{a}=A(B\boldsymbol{a})=A_{ij}B_{jk}a_k\boldsymbol{e}_i$$

这里，重复的英文下标i，j，k等表示从1到n求和。

三、关于F依赖于方向的分解

任给E_n中的$p(1\leqslant p\leqslant n-2,\ 3\leqslant n)$个互相正交的单位向量$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$，…，$\boldsymbol{g}_p$（即标准正交组），我们来研究$F$依赖于$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$，…，$\boldsymbol{g}_p$的分解．为此，引进下面的概念：如果$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$，…，$\boldsymbol{n}_m(m\geqslant 2)$为$E_n$中标准正交组，则$F\boldsymbol{n}_1$，$F\boldsymbol{n}_2$，…，$F\boldsymbol{n}_m$是$E_n$中的正交组，这时，我们称$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$，…，$\boldsymbol{n}_m$为$F$的准主向．显然，当$m=n$时，上面$F$的准主向即为$F$的主向．含有$F$的准主向的标准正交基，称为$F$的准主基．关于$F$依赖于方向的分解，我们有下面的定理：

定理1 对于E_n上非奇异线性变换F而言，任给E_n中$p(1\leqslant p\leqslant n-2,\ 3\leqslant n)$个互相正交的单位向量$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$，…，$\boldsymbol{g}_p$必有$E_n$中的向量$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，…，$\boldsymbol{b}_p$，正交线性变换$R$和唯一的一组正数$\lambda_{p+1}$，$\lambda_{p+2}$，…，$\lambda_n$及$F$的准主向$\boldsymbol{g}_{p+1}$，$\boldsymbol{g}_{p+2}$，…，$\boldsymbol{g}_n$使$\{\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_p,\ \boldsymbol{g}_{p+1},\ \boldsymbol{g}_{p+2},\cdots,\ \boldsymbol{g}_n\}$为$F$的准主基，且有分解式

$$F=R(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{g}_2+\cdots+\boldsymbol{b}_p\boldsymbol{g}_p+\lambda_{p+1}\boldsymbol{g}_{p+1}\boldsymbol{g}_{p+1}+\lambda_{p+2}\boldsymbol{g}_{p+2}\boldsymbol{g}_{p+2}+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{g}_n\boldsymbol{g}_n) \tag{3.1}$$

当$p=1$时，恰有一个正常正交线性变换（即其行列式为1）和一个非正常正交线性变换（即其行列式为-1）满足(3.1)。

证明 令

$$A=F(I-\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1-\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_2-\cdots-\boldsymbol{g}_p\boldsymbol{g}_p) \tag{3.2}$$

式中I为E_n上的恒等线性变换，则有正交线性变换R和唯一的非负（半正定和对称）线性变换U_p[1]，使

$$A=RU_p \tag{3.3}$$

对于$\alpha=1,2,\cdots,\ p$，我们有

$$U_p\boldsymbol{g}_\alpha=[R^TF(I-\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1-\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_2-\cdots-\boldsymbol{g}_p\boldsymbol{g}_p)]\boldsymbol{g}_\alpha=0 \tag{3.4}$$

故存在U_p的主基$\{\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_p,\ \boldsymbol{g}_{p+1},\ \boldsymbol{g}_{p+2},\cdots,\ \boldsymbol{g}_n\}$为$E_n$中的标准正交基，且有

$$U_p\boldsymbol{g}_i=\lambda_i\boldsymbol{g}_i\qquad(i=1,2,\cdots,\ n;\ \text{对}i\text{不求和}) \tag{3.5}$$

式中

$$\lambda_\alpha=0\qquad(\alpha=1,\ 2,\cdots,\ p) \tag{3.6a}$$
$$\lambda_\beta>0\qquad(\beta=p+1,\ p+2,\cdots,\ n) \tag{3.6b}$$

于是

$$\begin{aligned}F&=F(\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_2+\cdots+\boldsymbol{g}_p\boldsymbol{g}_p)+A\\&=R\{R^TF(\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_2+\cdots+\boldsymbol{g}_p\boldsymbol{g}_p)+U_p\}\\&=R(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{g}_2+\cdots+\boldsymbol{b}_p\boldsymbol{g}_p+\lambda_{p+1}\boldsymbol{g}_{p+1}\boldsymbol{g}_{p+1}+\lambda_{p+2}\boldsymbol{g}_{p+2}\boldsymbol{g}_{p+2}\\&\quad+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{g}_n\boldsymbol{g}_n)\end{aligned} \tag{3.7}$$

式中

$$\boldsymbol{b}_\alpha=R^TF\boldsymbol{g}_\alpha\qquad(\alpha=1,\ 2,\cdots,\ p) \tag{3.8}$$

易见

$$(F\boldsymbol{g}_\beta)\cdot(F\boldsymbol{g}_\gamma)=[R(\lambda_\beta\boldsymbol{g}_\beta)]\cdot[R(\lambda_\gamma\boldsymbol{g}_\gamma)]$$

$$=\lambda_\beta\lambda\delta_{\gamma\beta\gamma}\qquad(\beta,\ \gamma=p+1,\ p+2,\cdots,\ n)\tag{3.9}$$

即$\{\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_p,\ \boldsymbol{g}_{p+1},\ \boldsymbol{g}_{p+2},\cdots,\ \boldsymbol{g}_n\}$为$F$的准主基.

下面，首先证明，在分解式(3.7)中，数组 $\{\lambda_\beta,\ \beta=p+1,\ p+2,\cdots,n\}$ 的唯一性. 为此，设有一组数$\{\lambda'_\beta,\ \beta=p+1,\ p+2,,\ \cdots,n\}$和$E_n$中一个标准正交基$\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_p,\boldsymbol{g}'_{p+1},\boldsymbol{g}'_{p+2},\cdots,\boldsymbol{g}'_n\}$以及正交线性变换$R'$满足

$$F=R'(\boldsymbol{b}'_1\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{b}'_2\boldsymbol{g}_2+\cdots+\boldsymbol{b}'_p\boldsymbol{g}_p+\lambda'_{p+1}\boldsymbol{g}'_{p+1}\boldsymbol{g}'_{p+1}+\lambda'_{p+2}\boldsymbol{g}'_{p+2}\boldsymbol{g}'_{p+2}+\cdots+\lambda'_n\boldsymbol{g}'_n\boldsymbol{g}'_n)\tag{3.10}$$

则易见

$$\boldsymbol{b}'_\alpha=(R')^TF\boldsymbol{g}_\alpha\qquad(\alpha=1,\ 2,\cdots,p)\tag{3.11}$$

从而

$$\begin{aligned}&R'(\lambda'_{p+1}\boldsymbol{g}'_{p+1}\boldsymbol{g}'_{p+1}+\lambda'_{p+2}\boldsymbol{g}'_{p+2}\boldsymbol{g}'_{p+2}+\cdots+\lambda'_n\boldsymbol{g}'_n\boldsymbol{g}'_n)\\&\quad=F(I-\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1-\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_2-\cdots-\boldsymbol{g}_p\boldsymbol{g}_p)\\&\quad=A=RU_p\qquad[\text{见}(3.2),\ (3.3)]\end{aligned}\tag{3.12}$$

根据文[1]，在A的极分解中，关于U_p的唯一性，易见，$\{\lambda'_\beta,\ \beta=p+1,\ p+2,\cdots,\ n\}$ 必为U_p的一组非零特征值，即为数组$\{\lambda_\beta,\ \beta=p+1,\ p+2,\cdots,n\}$. 用证明(3.9)的类似途径，可知，标准正交基$\{\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\cdots,\ \boldsymbol{g}_p,\ \boldsymbol{g}'_{p+1},\ \boldsymbol{g}'_{p+2},\cdots,\boldsymbol{g}'_n\}$ 必为F的准主基，这就说明了在分解式(3.7)中，数组$\{\lambda_\beta,\ \beta=p+1,\ p+2,\cdots,n\}$的唯一性.

其次，我们来证明，如果$p=1$，在满足分解式(3.7)的R中，恰有两个，其一是正常正交线性变换，其二是非正常正交线性变换. 事实上，如果有正交线性变换R满足

$$A=F(I-\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1)=RU_1\tag{3.13}$$

则必有

$$A=QU_1\tag{3.14}$$

式中

$$Q=R(I-2\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1)\tag{3.15}$$

且R，Q 中有一个是正常正交线性变换，另一个是非正常正交线性变换. 这说明至少存在一个正常正交线性变换和一个非正常正交线性变换满足A的极分解式. 现在证明，恰有一个正常正交线性变换和一个非正常正交线性变换满足A的极分解式. 为此，设有满足条件

$$\det Q>0,\ \det S>0\tag{3.16}$$

的正交线性变换Q，S使

$$A=QU_1=SU_1\tag{3.17}$$

此时，在(3.7)，(3.8)中($p=1$)，分别令$R=Q$，$R=S$均成立，再记

$$T=S^TQ\tag{3.18}$$

则有

$$TU_1=S^TQU_1=S^TA=U_1\tag{3.19}$$

$$(TU_1)\boldsymbol{g}_\beta=U_1\boldsymbol{g}_\beta=\lambda_\beta\boldsymbol{g}_\beta\qquad(\beta=2,3,\cdots,n)\tag{3.20}$$

$$(TU_1)\boldsymbol{g}_\beta=T(U_1\boldsymbol{g}_\beta)=\lambda_\beta T\boldsymbol{g}_\beta\qquad(\beta=2,3,\cdots,n)\tag{3.21}$$

由于$\lambda_\beta>0(\beta=2,3\cdots,n)$故(3.20)，(3.21)给出

$$T\boldsymbol{g}_\beta=\boldsymbol{g}_\beta\qquad(\beta=2,3,\cdots,n)\tag{3.22}$$

但因正交线性变换T变标准正交基为标准正交基，故有

$$T\boldsymbol{g}_1=\pm\boldsymbol{g}_1\tag{3.23}$$

由此

$$T=I\text{或}T=I-2\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1 \tag{3.24}$$

又由于$\det T=\det S^T\cdot\det Q>0$，所以

$$T=I \tag{3.25}$$

即

$$Q=S \tag{3.26}$$

这就证明了恰有一个正常正交线性变换满足A的极分解．同理可证，恰有一个非正常正交线性变换满足A的极分解．由此，不难看出满足分解式(3.7)的R中，恰有两个，其一是正常正交线性变换，其二是非正常正交线性变换．事实上，只需注意到，对任何标准正交基$\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}'_2, \boldsymbol{g}'_3, \cdots, \boldsymbol{g}'_n\}$而言

$$\begin{aligned}A&=F(I-\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1)=RU_1\\&=R(\lambda_2\boldsymbol{g}'_2\boldsymbol{g}'_2+\lambda_3\boldsymbol{g}'_3\boldsymbol{g}'_3+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{g}'_n\boldsymbol{g}'_n)\end{aligned} \tag{3.27}$$

必要且只要下面两式成立：

$$\left.\begin{aligned}F&=R(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{g}_1+\lambda_2\boldsymbol{g}'_2\boldsymbol{g}'_2+\lambda_3\boldsymbol{g}'_3\boldsymbol{g}'_3+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{g}'_n\boldsymbol{g}'_n)=RB\\B&=\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{g}_1+\lambda_2\boldsymbol{g}'_2\boldsymbol{g}'_2+\lambda_3\boldsymbol{g}'_3\boldsymbol{g}'_3+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{g}'_n\boldsymbol{g}'_n\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{b}_1=R^{-1}F\boldsymbol{g}_1 \tag{3.29}$$

四、关于分解式(3.7)在均匀变形中的应用

考虑均匀变形

$$\boldsymbol{y}=F\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}\qquad \boldsymbol{x}\in V \tag{4.1}$$

其中F为非奇异线性变换，$\boldsymbol{u}$是点$\boldsymbol{x}$的位移．

任取V中的一个截面π，设π的法向单位向量为$\boldsymbol{g}_1$，令

$$A=F(I-\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1) \tag{4.2}$$

则有正交线性变换R和唯一的非负线性变换U_1使

$$A=RU_1 \tag{4.3}$$

于是，根据(3.7)，令$p=1$，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}&=F\boldsymbol{x}\\&=R(\lambda_2x_2\boldsymbol{g}_2+\lambda_3x_3\boldsymbol{g}_3+x_1\boldsymbol{b}_1),\qquad \boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{g}_i\in V\end{aligned} \tag{4.4}$$

从分解式(4.4)，易见

1．(a) 平行于$\boldsymbol{g}_1$的所有直线均为平行于$R\boldsymbol{b}_1$的直线，且按同一比例系数$|\boldsymbol{b}_1|$伸缩，(即$|y_1|=|\boldsymbol{b}_1||x_1|$)；

(b) 以$\boldsymbol{g}_1$为法线的所有平面均变为以$(R\boldsymbol{g}_2)\times(R\boldsymbol{g}_3)$为法线的平面；

(c) 变球面（设其方程为$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\rho^2$）为椭球面[方程为$y_1^2/(|\boldsymbol{b}_1|\rho)^2+y_2^2/(|\boldsymbol{b}_2|\rho)^2+y_3^2/(|\boldsymbol{b}_3|\rho)^2=1$]．

2．π平面上半径为r的圆Ω：$\boldsymbol{x}=r\cos\varphi\boldsymbol{g}_2+r\sin\varphi\boldsymbol{g}_3$变为半轴分别为$a=\lambda_2r$，$b=\lambda_3r$的椭圆

$$\Omega'\text{：}\ \boldsymbol{y}=\lambda_2r\cos\varphi R\boldsymbol{g}_2+\lambda_3r\sin\varphi R\boldsymbol{g}_3$$

这里第1条是熟知的事实[3]，不过，此处从分解式(4.4)出发，证明要容易得多；第2条提供了变形后椭圆两个半轴的求解方法，并证明了π上F的准主向必变为椭圆的轴向，π平面

上互相垂直的两个方向$\boldsymbol{g}_1$和$\boldsymbol{g}_2$为该均匀变形的应变主方向，即它们只有伸缩变形和随物体τ的整体刚性转动，而没有纯剪切变形，故有

定理2 处于均匀变形(4.1)的物体τ中任意一个平面π内，均至少存在两个互相正交的应变主方向．同时，π上F的任意准主向也必为该均匀变形的应变主方向．

五、在F的准主基下关于均匀变形的应变能密度

在研究弹性体τ变形时，应变能密度W是变形梯度$F=\nabla\boldsymbol{y}$的函数，$W=W(F)$，利用应变能密度W与物质标架无关的条件（客观性原理[4]）：

$$W(QF)=W(F),\qquad Q^TQ=I \tag{5.1}$$

故在F的准主基$\{\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_3\}$之下，当$\tau$处于均匀变形时应变能密度可以表示为5元数组的函数[此时(3.7)中$p=1$]

$$W(F)=W(RB)=W(B)=\widetilde{W}(\lambda_2,\ \lambda_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3) \tag{5.2}$$

$$B=b_i\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_1+\lambda_2\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_2+\lambda_3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_3 \tag{5.3}$$

式中

$$\boldsymbol{b}_1=b_i\boldsymbol{g}_i=R^TF\boldsymbol{g}_1 \tag{5.4}$$

并有

$$\lambda_2>0,\ \lambda_3>0,\ b_1>0 \tag{5.5}$$

(此处要求分解满足条件：$\det F\cdot\det R>0$]．至此，我们给出下面的定理：

定理3 对处于均匀变形(4.1)的物体τ中的应变能密度$W(F)$而言，任给单位向量$\boldsymbol{g}_1$，至少有一F的准主基$\{\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_3\}$存在，使(5.2)～(5.5)成立．

参 考 文 献

[1] P. R. Holmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Princeton University Press (1942), 138—140.

[2] C. Yatomi, Infinitesimal elastic stability of homogeneous deformations and the zero moment condition, *J. Elasticity*, 17 (1987), 53—61.

[3] 徐秉业，《弹性与塑性力学·例题与习题》，机械工业出版社（1981），38.

[4] Y. C. Chen, Stability of homogeneous deformations of an incompressible elastic body under dead-load surface tractions, *J. Elasticity*, 17 (1987), 223—248.