

一组适合于带纵向裂纹柱体圣维南 扭转的等参数元素

范秀昌¹ 吴月明²

(潘立宙推荐, 1994年4月19日收到, 1995年12月11日收到修改稿)

摘 要

本文给出一组新的适合于带纵向裂纹柱体圣维南扭转的等参数元素, 它们分别是八结点等参数元素、在裂纹尖端具有 $r^{-1/2}$ 奇异性的“1/4”八结点等参数元素及八结点过渡元素。利用这些元素, 对含有径向裂纹的圆柱体进行了圣维南扭转计算。计算结果表明, 本文给出的等参数元素有较高的精度、较好的收敛性及快的收敛速度, 同时还具有程序简单、省机等优点, 所以特别适合于实际的工程计算。

关键词 奇异有限元 过渡有限元 断裂力学 圣维南扭转

一、引 言

在实际工程结构中, 经常遇到带纵向裂纹柱体的圣维南扭转问题。用有限元素方法解决这类问题时, 人们往往采用裂纹尖端奇异元素, 以真实地反映裂纹尖端处的应变奇异性。蔡承文教授曾引入一种圆形裂纹尖端高阶奇应变单元^[1], 其位移场取为带裂纹体圣维南扭转理论解答的前 n 项。利用这种尖端元素, 并取三角形常应变元素做为环绕元素, 蔡先生对有纵向裂纹的柱体进行了圣维南扭转计算, 并得出了较满意的解答。但是蔡先生的方法存在着尖端元与环绕元之间的位移不协调及结构有重迭的问题。为此只有加密有限元的网格以换取较高的计算精度。本文作者为了解决这两个问题, 引入了一种适合于圣维南扭转的八结点等参数元素。以这种元素作为蔡先生奇异元的环绕元素, 这样就解决了结构的重迭问题。在尖端元与环绕元之间采用钱伟长教授的弹性力学小位移非协调广义变分原理^[2], 进而解决了尖端元与环绕元之间的位移不协调问题^[3]。这种方法具有明显的优越性, 但程序相当复杂, 因而较难推广到工程应用中去。

为了克服这个缺点, 本文将上述八结点等参数元素发展成为具有 $r^{-1/2}$ 奇异性的“1/4”八结点等参数奇异元素。以此作为裂纹尖端元素, 而以文献[3]中引入的八结点等参数元素作为环绕元素, 对含有纵向裂纹的圆柱体进行了圣维南扭转计算(模型1)。计算结果表明, 这种“1/4”八结点等参数元素具有较好的收敛性, 而且程序简单, 所以特别适合于工程计算。但它也有明显的缺点, 即只有当计算网格划分得较密集时才收敛到理论解。为此, 本文又将文

1 天津理工学院, 天津 300191; 2 天津财经大学, 天津 300222

献[3]中引入的八结点等参数元素发展成为过渡元素。过渡元素位于裂纹尖端元素与环绕元素之间,它的径向中结点位置可以调整,使按外插求出的裂纹尖端应变场亦具有 $r^{-1/2}$ 奇异性。在这种情况下对同一研究对象进行了计算(模型2)。计算结果表明,采用作者引入的适合于带裂纹柱体圣维南扭转的“1/4”八结点等参数元素、八结点等参数过渡元素及八结点等参数环绕元素,在自由度较低的情况下,即可得到较高的精度、好的收敛性及很快的收敛速度,而且程序简单、省机时,故可以广泛地推广到工程应用中。

二、八结点等参数元素

按照圣维南扭转理论,八结点等参数元素的位移场取为:

$$u = -\varphi zy, \quad v = \varphi zx, \quad w = N_i w_i \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (2.1)$$

而坐标转换取为:

$$x = N_i x_i, \quad y = N_i y_i \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (2.2)$$

其中, u, v 为柱体横截面内位移, w 为柱体横截面的翘曲位移, φ 为柱体单位长度的扭转角, N_i 为局部坐标系下的形状函数, 它们是

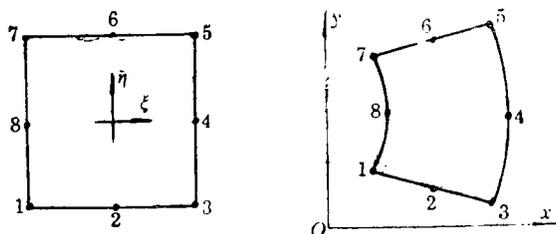


图1 八结点等参数元素

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) / 4 & (i=1, 3, 5, 7) \\ N_2 &= (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) / 2 & (i=2, 6) \\ N_4 &= (1 - \eta^2) (1 + \xi_i \xi) / 2 & (i=4, 8) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

将(2.1)式写成矩阵形式:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\varphi zy \\ \varphi zx \\ N_i w_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -zy & 0 & 0 & \dots & 0 \\ zx & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & N_2 & \dots & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi \\ w_1 \\ \vdots \\ w_8 \end{Bmatrix}$$

根据上式, 可以求出应变如下:

$$\begin{aligned} \{e\} &= \begin{Bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi y \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi x \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} w_j - \varphi y \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} w_j + \varphi x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ x & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi \\ w_1 \\ \vdots \\ w_8 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$=[B]\{q\} \tag{2.4}$$

而(2.4)式中的 $\partial N_j/\partial x$ 及 $\partial N_j/\partial y (j=1, 2, \dots, 8)$ 可计算如下。在(2.2)式的坐标转换下, 我们有:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, 8)$$

或

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} x_j & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} y_j \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} x_j & \frac{\partial N_j}{\partial \eta} y_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, 8) \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} x_j & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} y_j \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} x_j & \frac{\partial N_j}{\partial \eta} y_j \end{bmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, 8)$$

称为雅可比矩阵。由(2.5)式可以得到:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, 8) \tag{2.6}$$

其中

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} y_j & -\frac{\partial N_j}{\partial \xi} y_j \\ -\frac{\partial N_j}{\partial \eta} x_j & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} x_j \end{bmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, 8)$$

而

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} x_j & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} y_j \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} x_j & \frac{\partial N_j}{\partial \eta} y_j \end{vmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, 8)$$

$|J|$ 称为雅可比行列式。

应力—应变关系为:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \tau_{zz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G\gamma_{zz} \\ G\gamma_{yz} \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{zz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [D]\{\epsilon\} \quad (2.7)$$

这里

$$[D] = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = GI$$

按照有限元素方法理论，可以得到八结点等参数元素的刚度矩阵为：

$$[K]^e = \int_A [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (2.8)$$

这里 A 为元素的面积。

三、“1/4”八结点等参数元素

将上述八结点等参数元素的 1、7、8 三点凝聚在一起，将 2、6 两点沿各自所在边移至距裂纹尖端 $1/4$ 边长处，即得所谓的“1/4”八结点等参数奇异元素^[4]，如图 2 所示。它的位移表达式及坐标变换关系式与八结点等参数元素的相应公式相同。下面证明本文引入的“1/4”八结点等参数元素具有 $r^{-1/2}$ 奇异性。为方便起见，将 (2.3) 式写成为一个式子：

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta) = & [(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) - (1-\xi^2)(1+\eta\eta_i) - (1-\eta^2)(1+\xi\xi_i)] \\ & \cdot \xi_i^2 \eta_i^2 / 4 + (1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)(1-\xi_i^2) \eta_i^2 / 2 \\ & + (1-\eta^2)(1+\xi\xi_i)(1-\eta_i^2) \xi_i^2 / 2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

由图 2 知：

$$\left. \begin{aligned} x_1 = x_7 = x_8 = 0, \quad x_2 = x_6 = h/4, \quad x_3 = x_4 = x_5 = h \\ y_1 = y_7 = y_8 = y_4 = 0, \quad y_2 = -y_6 = -l/4, \quad y_3 = -y_5 = -l \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

将 (3.2) 式代入坐标变换式 (2.2) 中得：

$$x = h(1+\xi)^2/4, \quad y = l\eta(1+\xi)^2/4 \quad (3.3)$$

射线 R 上离开裂纹尖端为 r 的任意点 P ，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 可求出为：

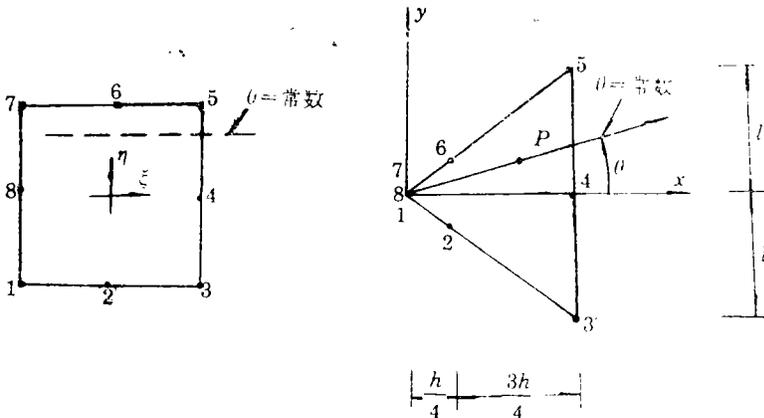


图2 1/4结点等参数元素

$$r = \frac{l}{4} (1 + \xi)^2 \sqrt{\left(\frac{h}{l}\right)^2 + \eta^2}$$

解出 $1 + \xi$ 得:

$$1 + \xi = \sqrt{r} / \sqrt{\frac{l}{4} \sqrt{\left(\frac{h}{l}\right)^2 + \eta^2}} \quad (3.4)$$

在图 2 的具体情况下, 雅可比矩阵为:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} (1 + \xi) & \frac{l}{2} \eta (1 + \xi) \\ 0 & \frac{l}{4} (1 + \xi)^2 \end{bmatrix}$$

而其行列式为:

$$\det |J| = hl(1 + \xi)^3 / 8$$

雅可比矩阵的逆矩阵为:

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/h(1 + \xi) & -4\eta/h(1 + \xi)^2 \\ 0 & 4/l(1 + \xi)^2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

由(2.4)式我们知道, $\gamma_{zz} = \partial w / \partial x - \varphi y$, $\gamma_{yz} = \partial w / \partial y + \varphi x$. 其中的 $-\varphi y$ 及 φx 项不会提供 $r^{-1/2}$ 奇异性, 所以可不予考虑, 而只研究 $\partial w / \partial x$ 及 $\partial w / \partial y$.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (N_j w_j) = \frac{\partial N_j}{\partial x} w_j \quad (j = 1, 2, \dots, 8)$$

考虑到(2.6)式及(3.5)式, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \left(I_{11} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + I_{12} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) w_j \\ &= I_{11} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} w_j + I_{12} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} w_j \quad (j = 1, 2, \dots, 8) \end{aligned} \quad (3.6)$$

由(3.1)式我们可以求得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} &= [\xi_j (1 + \eta \eta_j) + 2\xi (1 + \eta \eta_j) - \xi_j (1 - \eta^2)] \xi_j^2 \eta_j^2 / 4 \\ &\quad - \xi (1 + \eta \eta_j) (1 - \xi_j^2) \eta_j^2 + \xi_j (1 - \eta^2) (1 - \eta_j^2) \xi_j^2 / 2 \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} &= [\eta_j (1 + \xi \xi_j) - \eta_j (1 - \xi^2) + 2\eta (1 + \xi \xi_j)] \xi_j^2 \eta_j^2 / 4 \\ &\quad + \eta_j (1 - \xi^2) (1 - \xi_j^2) \eta_j^2 / 2 - \eta (1 + \xi \xi_j) (1 - \eta_j^2) \xi_j^2 \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, 8) \end{aligned}$$

将上式代入 $(\partial N_j / \partial \xi) w_j$ 及 $(\partial N_j / \partial \eta) w_j$ 中并合并同类项, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} w_j = \frac{\partial w}{\partial \xi} &= \left[\frac{w_1}{4} (-2 + 3\eta - \eta^2) + w_2 (1 - \eta) + \frac{w_3}{4} (\eta + \eta^2 - 2) + \frac{w_4}{2} (1 - \eta^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{w_6}{4} (-\eta + \eta^2) + w_6 (1 + \eta) + \frac{w_7}{4} (-2 - 3\eta - \eta^2) - \frac{w_8}{2} (1 - \eta^2) \right] \\ &\quad + (1 + \xi) \left[\frac{w_1}{2} (1 - \eta) - w_2 (1 - \eta) + \frac{w_3}{2} (1 - \eta) + \frac{w_5}{2} (1 + \eta) \right. \\ &\quad \left. - w_6 (1 + \eta) + \frac{w_7}{2} (1 + \eta) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} w_j = \frac{\partial w}{\partial \eta} = & \left[\frac{w_1}{4}(-2+4\eta) + \frac{w_7}{4}(2+4\eta) - 2w_8\eta \right] + (1+\xi) \left[\frac{w_1}{4}(3-2\eta) \right. \\ & - w_2 + \frac{w_3}{4}(1+2\eta) - w_4\eta + \frac{w_5}{4}(-1+2\eta) + w_6 - \frac{w_7}{4}(-3+2\eta) \\ & \left. + w_8\eta \right] + (1+\xi)^2 \left[-\frac{w_1}{4} + \frac{w_2}{2} - \frac{w_3}{4} - \frac{w_5}{4} - \frac{w_6}{2} - \frac{w_7}{4} \right] \end{aligned}$$

考虑到位于射线 $\theta = \text{常数}$ 上的点其 $\eta = \text{常数}$ ，同时考虑到条件 $w_1 = w_7 = w_8$ ，则上式变为：

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = a_0 + a_1(1+\xi), \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = b_1(1+\xi) + b_2(1+\xi)^2 \tag{3.7}$$

其中 a_0, a_1, b_1 及 b_2 是与任意给定的一组结点位移 $w_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 有关的常数。将(3.7)式代入(3.6)式，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} = & I_{11} \frac{\partial w}{\partial \xi} + I_{12} \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ = & \frac{2a_0}{h(1+\xi)} + \frac{2a_1}{h} - \frac{4\eta b_1}{h(1+\xi)} - \frac{4\eta b_2}{h} \end{aligned}$$

将(3.4)式代入上式并注意在 $\theta = \text{常数}$ 的射线上，恒有 $\eta = \text{常数}$ ，我们可以得到：

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{A_0}{\sqrt{r}} + A \tag{3.8a}$$

这里 A_0 与 A 在 $\theta = \text{常数}$ 的射线上是与 r 无关的常数。

同理可以证明：

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{B_0}{\sqrt{r}} + B \tag{3.8b}$$

而 B_0 和 B 在 $\theta = \text{常数}$ 的射线上亦是与 r 无关的常数。这样就证明了应变 γ_{xz} 与 γ_{yz} 都具有 $r^{-1/2}$ 奇异性。

“1/4”八结点等参数奇异元刚度矩阵表达式与(2.8)式相同。

四、八结点等参数过渡元素

为了提高计算精度及加快收敛速度，人们引进了一种所谓四边形等参数过渡元素。该元素紧挨着尖端奇异元素排列，如图3所示。这种元素的2, 6两结点位置可以适当调整，以便由外插可以得出裂纹尖端线弹性断裂力学的 $r^{-1/2}$ 奇异性^[5]。本文将过渡元素的概念引入适合于圣维南扭转的等参数元素上来，进而得到适合于圣维南扭转的四边形等参数过渡元素。

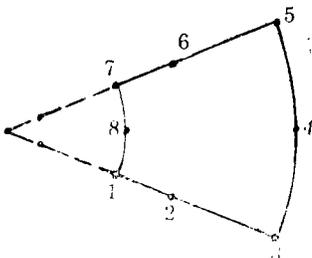


图3 八结点等参数过渡元素

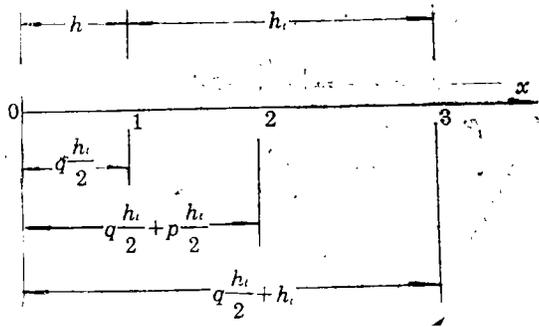


图4 一维1/4结点元素与过渡元素的组配

图 4 上给出了一维“1/4”结点元素与过渡元素的结合图。令“1/4”结点元素的长度为 h ，过渡元素的长度为 h_i ，取参数 $q=2h/h_i$ ，中间结点 2 的位置可由参数 p 来控制。过渡元素的形状函数由下式给出：

$$N_1 = \xi(\xi - 1)/2, N_2 = 1 - \xi^2, N_3 = \xi(1 + \xi)/2 \tag{4.1}$$

令 x 轴原点位于裂纹尖端 o ，并且 x 轴方向如图 4 所示，则

$$x = \frac{1}{2} N_1 q h_i + \frac{1}{2} N_2 (q + p) h_i + N_3 \left(1 + \frac{q}{2}\right) h_i$$

或

$$x = \frac{1}{2} \xi^2 (1 - p) h_i + \frac{1}{2} \xi h_i + \frac{1}{2} (q + p) h_i \tag{4.2}$$

由(4.2)式求出 x 关于 ξ 的导数，得

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \xi(1 - p) h_i + \frac{1}{2} h_i \tag{4.3}$$

加入裂纹尖端处 ($\xi = -1 - q$) 具有奇异性的条件 ($\partial x / \partial \xi = 0$)，我们可以得到：

$$p = (2q + 1) / 2(q + 1) \tag{4.4}$$

可以证明，当 p 取得(4.4)式的数值时，过渡元素在裂纹尖端处将表现出 $r^{-1/2}$ 奇异性。如果 $q = 0$ ，则过渡元素就将变为四分之一结点元素。对于完整的四边形等参数元素进行上述运算后可以证明，方程(4.4)同样是正确的^[6]。

五、算 例

取半径 $R=10\text{mm}$ ，沿整个半径贯穿有纵向裂纹的无限长圆柱体为例进行了计算，设其上作用有一对大小相等方向相反的扭矩 M 。由于结构的对称性及外载荷的反对称性，只取一半结构进行分析。其有限元素网格如图 5 所示。

采用 J -积分方法以求出应力强度因子 K_I ， J -积分与 K_I 间的关系式为：

$$K_I = \sqrt{2GJ} \tag{5.1}$$

表 1

	本 文 计 算 结 果							
	模 型 1				模 型 2			
R_i/R	0.03	0.012	0.002	0.0004	0.08	0.03	0.02	0.01
自由度	200	304	408	512	94	134	174	214
$K_I \sqrt{R^5} / M$	0.91483	0.95301	0.95549	0.95792	0.93461	0.95008	0.95847	0.96457
误差(%)	5.62	1.68	1.42	1.17	3.58	1.98	1.11	0.48
机时(s)	47	113	234	449	17	26	37	51
	参 考 文 献 计 算 结 果							
	参考文献[1]				参考文献[3]			
R_i/R	0.4	0.3	0.2	0.1	0.14	0.12	0.1	0.08
自由度	135	177	240	345	114	140	166	192
$K_I \sqrt{R^5} / M$	0.88829	0.91764	0.94676	0.96058	1.08533	1.04451	1.00567	0.97346
误差(%)	8.35	5.32	2.32	0.90	11.97	7.76	3.76	0.43
机时(s)					42	47	55	75

最后, 将应力强度因子 K_{II} 除以 $M/\sqrt{R^3}$ 以达到无量纲化的目的, 本算例的 $K_{II}\sqrt{R^3}/M$ 的理论解答为 0.96927。

计算分别对如下两种模型进行, 首先, 以“1/4”八结点等参数奇异元做为裂纹尖端元素, 而以八结点等参数元素做为环绕元素, 其网格如图5(a)所示。然后, 将八结点等参数过渡元素置于第一种模型的两种元素之间而得到第二种模型, 其网格如图5(b)所示。

计算结果列于表1及图6。在表1与图6上同时还给出了参考文献[1]与[3]的计算结果, 以便进行比较。由计算结果可以看出: 模型1的精度较低, 收敛速度也较慢, 但其程序相当简单并且收敛性较好; 模型2克服了模型1的缺点, 而保留了模型1的优点, 即具有精度高、收敛性好、收敛速度快、程序简单、省机时等优点, 可以广泛推广到工程应用中去。

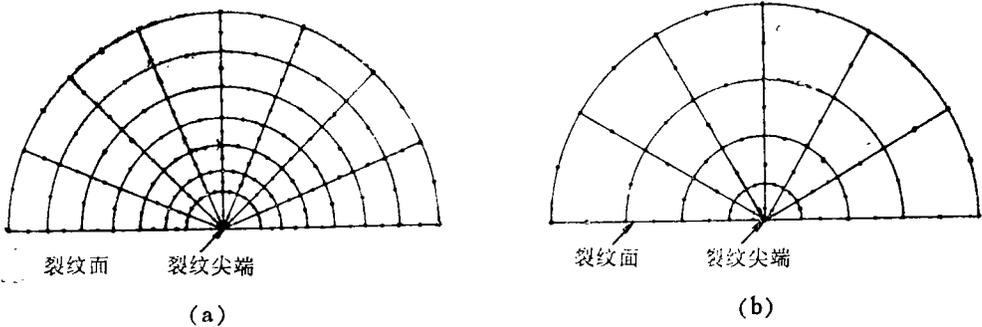


图5 有限元网格简图

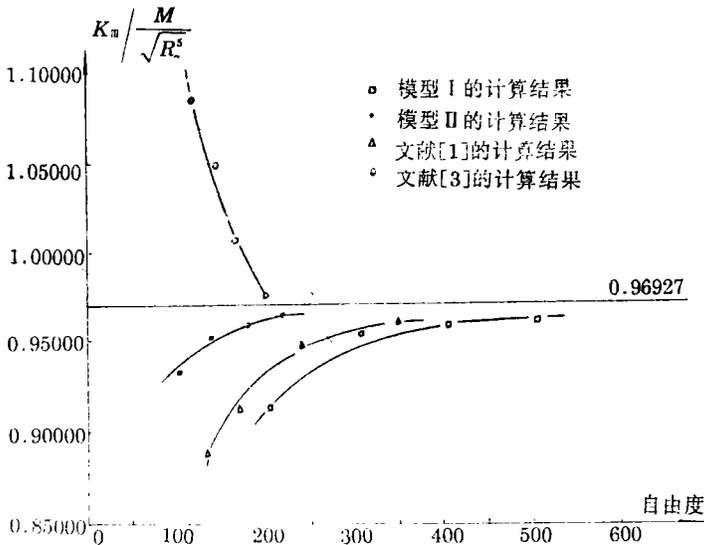


图6 计算结果的比较

参 考 文 献

- [1] 蔡承文等, 计算St. Venant 扭转时 K_{II} 的任意高阶奇应变单元, 固体力学学报, (1) (1983), 92—99.
- [2] 钱伟长, 《广义变分原理》, 知识出版社 (1985).
- [3] 范秀昌, 用位移非协调广义变分原理解含裂纹体的圣维南扭转问题, 应用数学和力学, 10(2)

(1989), 179—186.

- [4] R. S. Barsoum, Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 11 (1977), 85—98.
- [5] C. Manu, Quadratic isoparametric elements as transition element, *Engng. Frach. Mech.*, 24(4) (1986), 509—512.

A Group of Isoparametric Elements Suitable for St. Venant's Torsion of a Bar with Cracks

Fan Xiuchang

(Tianjin Institute of Technology, Tianjin 300191, P. R. China)

Wu Yueming

(Tianjin Financial and Economical University,
Tianjin 300222, P. R. China)

Abstract

In this paper, we shall give a group of new isoparametric elements suitable for St. Venant's torsion of a bar with vertical cracks. These elements are eight-point isoparametric element, quarter eight-point isoparametric element and eight-point isoparametric transition element. Among these elements, the second and the third elements possess the singularity of order $r^{-1/2}$ at crack tip. Using these elements, we have completed the calculation of St. Venant's torsion for a cylinder with a radial vertical crack. The calculated results show that the isoparametric elements given by this paper have ideal accuracy, good convergence, high speed of convergence, low freedom and little computational time, and so they can be widely applied to practice.

Key words singular finite element, transition finite element, fracture mechanics, St. Venant torsion