

弹性板受撞击的动力响应分析

尹邦信¹

(刘人怀推荐, 1995年1月12日收到)

摘 要

文献[1]分析了弹性板受撞击的动力响应, 应用该方法的条件是撞击物可视为刚体且接触局部变形与撞击力的关系已知。本文提出了碰撞过程中碰撞反力的模拟表达式, 对撞击物不作任何假设, 避开接触局部变形问题, 只考虑碰撞过程中板的动力响应, 利用冲量、动量关系和动力微分方程及数值方法求解, 因此适用范围更广。文中给出了算例, 与已有正确解答符合得很好。

关键词 撞击 反力函数 动力响应 数值方法

一、前 言

由于工程实际的需要, 有关粘弹性基支板的研究受到了普遍重视。然而, 人们所做的大多数研究都是在外载荷已知的情况下进行的。对于这一类板受撞击的问题, 除去撞击物的质量、速度之外, 一般无法事先确定板所承受的载荷。要准确研究工程中所遇到的实际撞击问题, 有必要分析粘弹性基支板受撞击的动力响应。

文[1]对粘弹性地基上的弹性板受到刚性体撞击的动力响应做过分析。本文对这一类板受撞击的问题进一步做了分析, 对撞击物不作刚性体假设, 避开接触局部变形问题, 利用冲量、动量、动力微分方程建立了求解的数值方法。

二、撞击反力函数

如图1(a)所示, 放置于半无限粘弹性地基上的弹性板受到撞击。在撞击过程中, 撞击反力 $R(t)$ 的变化规律极其复杂, 要测定其瞬时值十分困难。但是, 一部分文献资料中数值解法结果表明, $R(t)$ 的变化规律大致可以用图1(b)的曲线来表示, 在变形恢复阶段的撞击力明显小于变形发生阶段的撞击力(后面可以证明, 两阶段撞击力的冲量之比为恢复系数)。假设撞击时间为 C_i , 变形发生阶段和恢复阶段各为 $C_i/2$, 则撞击力 $R(t)$ 可模拟表达如下

¹ 西南工学院土木系, 四川绵阳 621002。

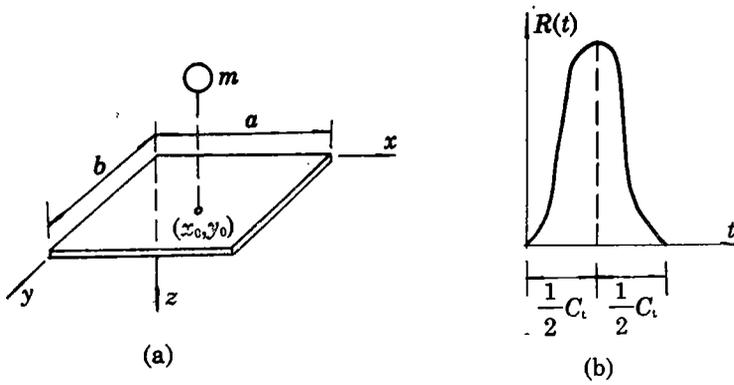


图 1

$$\left. \begin{aligned}
 R(t) &= a_1 \left[\frac{C_t^2}{4} - \left(t - \frac{C_t}{2} \right)^2 - K \left(t - \frac{C_t}{2} \right) (C_t - t) \right] \\
 K &= 0 \quad (0 \leq t \leq \frac{C_t}{2}) \\
 K &\neq 0 \quad (\frac{C_t}{2} \leq t \leq C_t)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

在变形发生阶段 $R(t)$ 的冲量 S_1 为

$$S_1 = \int_0^{C_t/2} R(t) dt = \frac{a_1 C_t^3}{12} \quad (2.2)$$

变形发生阶段考虑板、撞击物组成的系统，不计非撞击力的冲量，则动量守恒

$$mv_0 = mv_1 + Mu_1 \quad (2.3)$$

式中 m 为撞击物质量， v_0 为撞击物在 $t=0$ 时刻的速度， v_1 为撞击物在 $t = \frac{C_t}{2}$ 时刻的速度，

M 为板的质量， u_1 为 $t = \frac{C_t}{2}$ 时刻板质心速度。各速度以 z 轴正向为正，在 $t = \frac{C_t}{2}$ 时刻，

变形发生阶段结束， $v_1 = u_1$ ，从式(2.3)可以解得

$$u_1 = \frac{mv_0}{M+m} \quad (2.4)$$

单独考虑板的动量、冲量关系，应有

$$S_1 = Mu_1 = \frac{Mmv_0}{M+m} \quad (2.5)$$

代入式(2.2)有

$$\frac{a_1 C_t^3}{12} = \frac{Mmv_0}{M+m} \quad (2.6)$$

从式(2.6)可解得

$$a_1 = \frac{12Mmv_0}{C_t^3(M+m)} \quad (2.7)$$

在变形恢复阶段 $R(t)$ 的冲量 S_2 为

$$S_2 = \int_{C_t/2}^{C_t} R(t) dt = \frac{a_1 C_t^3}{12} \left(1 - \frac{K}{4} \right) \quad (2.8)$$

在变形恢复阶段考虑板、撞击物组成的系统, 不计非撞击力的冲量, 则动量守恒

$$(M+m)u_1 = mv_2 + Mu_2 \quad (2.9)$$

式中 v_2 为撞击物在 $t=C_t$ 时刻的速度, u_2 为 $t=C_t$ 时刻板质心速度, 此时刻撞击物、板即将分离, 速度关系有

$$\left| \frac{v_2 - u_2}{v_0} \right| = e \quad (2.10)$$

式中 e 为恢复系数, 考虑此时刻 $v_2 < 0$, $u_2 > 0$ (以 z 轴正向为正), 则式(2.10)可写为

$$\frac{u_2 - v_2}{v_0} = e$$

从上式解得

$$v_2 = u_2 - ev_0 \quad (2.11)$$

将式(2.4)、(2.11)代入式(2.9)得

$$u_2 = \frac{mv_0(1+e)}{M+m} \quad (2.12)$$

单独考虑板的动量、冲量关系, 应有

$$S_2 = M(u_2 - u_1) = \frac{Mmev_0}{M+m} \quad (2.13)$$

代入式(2.8)有

$$\frac{a_1 C_t^3}{12} \left(1 - \frac{K}{4} \right) = \frac{Mmev_0}{M+m} \quad (2.14)$$

根据式(2.6)、(2.14)有 $S_2/S_1 = e$, 即

$$1 - \frac{K}{4} = e$$

从上式解得

$$K = 4(1-e) \quad (2.15)$$

根据式(2.7)、(2.15), $R(t)$ 可重写为

$$\left. \begin{aligned} R(t) &= \frac{12Mmv_0}{C_t^3(M+m)} \left[\frac{C_t^2}{4} - \left(t - \frac{C_t}{2} \right)^2 - h \left(t - \frac{C_t}{2} \right) (C_t - t) \right] \\ K &= 0 \quad (0 \leq t \leq \frac{C_t}{2}) \\ K &= 4(1-e) \quad (\frac{C_t}{2} \leq t \leq C_t) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

式(2.16)中只有 C_t 待定.

三、动力响应分析的数值方法

图1(a)所示的放置于半无限粘弹性地基上的弹性板, 受到撞击时的动力微分方程为

$$D \cdot \nabla^4 W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + c \frac{\partial W}{\partial t} + kW = R(t) \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \quad (3.1)$$

式中 $D = \frac{Dh^3}{12(1-\mu^2)}$, μ 为泊松比, E 为弹性模量, h 为板厚, ρ 为板材密度, c 为阻尼系数, k 为文克尔系数, (x_0, y_0) 为撞击点. 设板四边简支, 其横向位移为

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{m_h} \sum_{n=1}^{n_h} A_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.2)$$

将(3.2)代入(3.1), 方程两边乘以 $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$, 对 x 在 $[0, a]$ 上积分, 对 y 在 $[0, b]$ 上积分, 得

$$M_{mn} \ddot{A}_{mn}(t) + C_{mn} \dot{A}_{mn}(t) + K_{mn} A_{mn}(t) = R(t) \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \quad (3.3)$$

式中 $M_{mn} = \frac{1}{4} ab \rho h$

$$C_{mn} = \frac{1}{4} abc$$

$$K_{mn} = \frac{1}{4} ab D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] + \frac{1}{4} abk$$

将式(2.5)、(2.13)两边相加得

$$S_1 + S_2 = Mu_2 = \frac{Mmv_0(1+e)}{M+m} \quad (3.4)$$

而

$$Mu_2 = \int_0^a \int_0^b \rho h \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=C_i} dx dy \quad (3.9)$$

将式(3.2)代入(3.5)有

$$\sum_{m=1}^{m_h} \sum_{n=1}^{n_h} A_{mn}(C_i) \frac{ab\rho h}{mn\pi^2} (1 - \cos m\pi) (1 - \cos n\pi) = \frac{Mmv_0(1+e)}{M+m} \quad (3.6)$$

将式(3.6)改写如下

$$f(C_i) = \frac{Mmv_0(1+e)}{M+m} - \sum_{m=1}^{m_h} \sum_{n=1}^{n_h} A_{mn}(C_i) \frac{ab\rho h}{mn\pi^2} (1 - \cos m\pi) (1 - \cos n\pi) = 0 \quad (3.7)$$

式(3.7)中, $A_{mn}(C_i)$ 是 C_i 的函数, 其函数关系由微分方程(3.3)及 $R(t)$ 表达式(2.16) 确定, 联合迭代式(3.3)、(3.7)可求得撞击时间 C_i 。

四、算 例

为便于对比, 本文分析了文献[1]中的例题, 即粘弹性地基上四边简支的方板受钢球撞击的动力响应, 其数据如下:

$a=b=0.2\text{m}$, $E=210\text{GPa}$, $\mu=0.3$, $h=0.008\text{m}$, $\rho=7800\text{kg/m}^3$, $k=47.73\text{MPa/m}$, $C=0.29\text{MPa}\cdot\text{s/m}$, $m=0.25\text{kg}$, $v_0=1\text{m/s}$, $e=0.55$, $x_0=y_0=0.1\text{m}$, 计算时间步长 $\Delta t=2\mu\text{s}$ 。

从图2(图中时间单位为 μs) 可以看出, 本文方法的分析结果中, 撞击力、撞击时间基本上与文献[1]一致, 板上撞击点最大位移及发生时间也与文献[1]一致。而撞击点位移时间曲线在开始阶段较文献[1]位移时间曲线超前, 造成这种现象的原因是本文方法没有考虑局部变形, 只考虑撞击时板的动反应。这在撞击开始阶段造成了一定误差, 但是, 只要最大撞

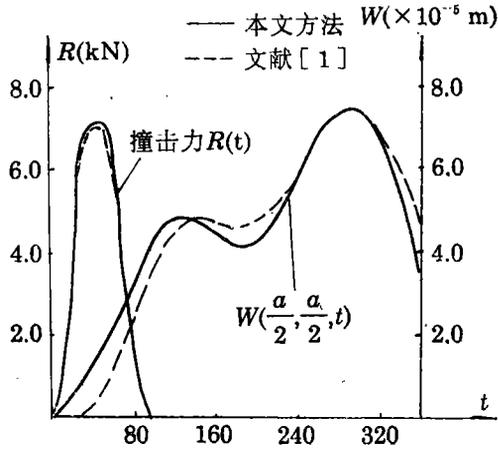


图 2

击力和板的最大位移是准确的，本文方法仍是一种有效的分析方法。

五、结 论

通过上述分析，本文建立了粘弹性地基上弹性板受撞击的动力响应分析方法，给出了碰撞反力的表达式及其待定系数的确定方法。利用本文方法，不必研究碰撞时的局部变形，只考虑碰撞过程的动反应，不用假定撞击物为刚体，只需给出恢复系数，因此本文方法适用范围更广泛。在本文方法中，要用到动力微分方程，它只适用于弹性板，然而可以从动力响应分析结果中判断碰撞过程是否会发生塑性变形或破坏。

参 考 文 献

- [1] 黄伟、邹毅达，粘弹性地基上弹性板受刚性体撞击的动力响应分析，工程力学，(1993)。
- [2] 孙焕纯、宋亚新，结构碰撞的动力响应分析，计算结构力学及其应用，(1994)。
- [3] 冯康，《数值计算方法》，国防工业出版社(1978)。

Analysis of Dynamic Response of an Impacted Elastic Plate

Yin Bangxin

(*Southwest Institute of Technology Civil Engineering Department,
Mianyang Sichuan 621002, P. R. China*)

Abstract

In reference (1), the dynamic response of an impacted elastic plate is analysed. Using the method in reference (1) is on condition that impacting body is rigid and the relation between impact reacting force and partial deformation is known. In this paper, simulate formula of impact reacting force function is presented. Without assumption of impacting body, dynamic response in impact procedure is considered, avoiding the problem of partial deformation. Because of analysis of law of momentum conservation, impulse theorem, dynamic differential equation and numerical method, the method in this paper is more suitable for application. Examples of the application are given. In precision the solution in this paper is identical with known correct solutions.

Ke words impact, reacting force function, dynamic response, numerical method