应用数学和力学，第17卷 第7期 (1996年7月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

变质量可控力学系统的相对论性变分原理与运动方程*

罗 绍 凯[1]

（钱伟长推荐，1995年6月5日收到修改稿）

摘　要

本文同时考虑经典变质量和相对论变质量情况，建立了基本形式、Lagrange形式，Nielsen形式和Appell形式的变质量可控力学系统的相对论性D'Alembert原理，得到了变质量非完整可控力学系统在准坐标下和广义坐标下的相对论性Чаплыгин方程、Nielsen方程和Appell方程，并讨论了完整系统、常质量系统的相对论性可控力学系统的运动方程。

关键词　可控力学系统　相对论　变质量　非完整约束　变分原理　运动方程

一、引　　言

随着近代科学技术的进步，可控力学系统动力学的研究越来越受到人们的重视。1964～1985年，В. И. Киргетов[1,2]、В. В. Румянцев[3]、梅凤翔[4,5]相继给出了可控力学系统的运动方程。1986年以来，刘恩远[6]、陈立群[7]、乔永芬[8]研究了变质量可控力学系统的运动问题，具有重要的理论和实际意义。但是，以往的研究均限于经典力学系统。

最近，文献[9～11]建立了相对论性非完整非可控力学系统的动力学理论。本文同时考虑具有质量分离或并入的经典变质量情况和质量随质点速度而变化的相对论性变质量情况，建立变质量非完整可控力学系统的相对论性动力学理论。首先，建立基本形式、Lagrane形式、Nielsen形式和Appell形式的变质量可控力学系统的相对论性D'Alembert原理；其次，考虑非完整可控约束的限制，得到变质量非完整可控力学系统的相对论性Чаплыгин方程、Nielsen方程和Appell方程；最后，讨论得到完整系统、常质量系统的相对论性可控力学系统的运动方程。

二、变质量可控力学系统的相对论性D'Alembert原理

1. 基本形式

研究N个质点构成的力学系统，第i个质点受到主动力$\boldsymbol{F}_i$，理想约束反力$\boldsymbol{N}_i$，微质量元

* 河南省自然科学基金资助课题。系《相对论性非线性非完整系统动力学方程》修改稿。
1 河南商丘师专，河南商丘 476000。

dm_i分离或并入m_i的相对速度$\boldsymbol{u}_i$，则经典变质量力学系统的基本方程可以写为

$$\frac{d}{dt}(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i+\frac{dm_i}{dt}(\boldsymbol{u}_i+\dot{\boldsymbol{r}}_i)\qquad(i=1,\cdots,N)\tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$可是$\boldsymbol{r}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i,t$,还可是控制参数$u_r$的函数。如果考虑到$m_i=\frac{m_{0i}}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}}$，则(2.1)式同时满足变质量力学和相对论力学。

设系统受有m个完整可控约束

$$f_\rho(\boldsymbol{r}_i,u_r,t)=0\qquad(\rho=1,\cdots,m;\ i=1,\cdots,N;\ r=1,\cdots,l)\tag{2.2}$$

和g个Четаев型非完整可控约束

$$\varphi_\beta(\boldsymbol{r}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i,u_r,t)=0\qquad(\beta=1,\cdots,g)\tag{2.3}$$

考虑到理想约束条件$\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$，我们利用(2.1)式可以建立变质量可控力学系统基本形式的相对论性D'Alembert原理

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{d}{dt}(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i'\right]\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0\\&m_i=\frac{m_{0i}}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}},\boldsymbol{R}_i'=\frac{dm_i}{dt}(\boldsymbol{u}_i+\dot{\boldsymbol{r}}_i)\\&\delta t=0,\quad\delta u_r=0,\quad\delta\boldsymbol{r}_i\neq0\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

选取n个广义坐标确定系统位形，有

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_s,u_r,t)\qquad(i=1,\cdots,N;\ s=1,\cdots,n;\ r=1\cdots,l)\tag{2.5}$$

把(2.5)代入(2.2)，则有恒等式

$$f_\rho(\boldsymbol{r}_i(q_s,u_r,t),u_r,t)\equiv0\tag{2.6}$$

把(2.5)代入(2.3)，则非完整约束方程成为

$$\Phi_\beta(q_s,\dot{q}_s,u_r,\dot{u}_r,t)=0\qquad(\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n;\ r=1,\cdots,l)\tag{2.7}$$

将(2.5)对时间两次求导，得

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q^s}\dot{q}_s+\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial u_r}\dot{u}r+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{a=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_a\partial q_s}\dot{q}_a\dot{q}_s+2\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i^2}{\partial q_a\partial t}\dot{q}_a$$

$$+2\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s\partial u_r}\dot{q}_s\dot{u}_r+2\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial u_r\partial t}\dot{u}_r+\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial u_r}\ddot{u}_r$$

那么，我们有

$$\frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\ddot{q}_s}=\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_s}=\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s},\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\right)=\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}\tag{2.8}$$

取变分

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s$$

代入(2.4)，得

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{d}{dt}(m_i\dot{r}_i)\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_s}+Q_s+\psi'_s\right]\delta q_s=0\\&Q_s=\sum_{i=1}^{N}F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_s},\quad \psi'_s=\sum_{i=1}^{N}R'_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_s}\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

从(2.5)式出发，可得到不同形式的变质量可控力学系统的相对论性D'Alembert原理。

2. Lagrange形式

利用(2.8)，(2.9)式可写为

$$\sum_{s=1}^{n}\left[-\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{r}_i\cdot\frac{\partial\dot{r}_i}{\partial\dot{q}_s}\right)+\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{r}_i\cdot\frac{\partial\dot{r}_i}{\partial q_s}+Q_s+\psi'_s\right]\delta q_s=0\tag{2.10}$$

构造相对论性广义动能函数[10]

$$T^*=\sum_{i=1}^{N}m_{0i}c^2(1-\sqrt{1-\dot{r}_i^2/c^2})\tag{2.11}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T^*}{\partial q_g}=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_{0i}c^2\cdot\dot{r}_i^2/c^2}{\sqrt{1-\dot{r}_i^2/c^2}}\cdot\frac{\partial\dot{r}_i}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{r}_i\cdot\frac{\partial\dot{r}_i}{\partial q_s}\\&\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{r}_i\cdot\frac{\partial\dot{r}_i}{\partial\dot{q}_s}\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

将(2.12)代入(2.10)，得到变质量可控力学系统Lagrange形式的相对论性 D'Alembert原理

$$\sum_{s=1}^{*}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\partial T^*}{\partial q_s}+Q_s+\psi'_s\right)\delta q_s=0\tag{2.13}$$

3. Nielaen形式

利用(2.8)和以下关系式

$$\frac{\partial\ddot{r}_i}{\partial\dot{q}_s}=2\frac{\partial\dot{r}_i}{\partial q_s}$$

$$\dot{T}^*=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{r}_i\cdot\ddot{r}_i$$

可以得到

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(m_i\dot{r}_i)\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{dm_i}{dt}\dot{r}_i+m_i\ddot{r}_i\right)\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{1-\dot{r}_i^2/c^2}$$

$$\cdot\frac{\dot{r}_i\cdot\ddot{r}_i}{c^2}\dot{r}_i\cdot\frac{\partial\dot{r}_i}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{i=1}^{N}m\ddot{r}_{ii}\cdot\frac{\partial\dot{r}_i}{\partial\dot{q}_s}$$

$$=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\Big(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i\Big)-\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_s}$$

$$=\frac{\partial \dot{T}^*}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T^*}{\partial q_s} \tag{2.14}$$

将(2.14)代入(2.10)，得到变质量可控力学系统Nielsen形式的相对论性 D'Alembert 原理

$$\sum_{s=1}^{n}\Big(-\frac{\partial \dot{T}^*}{\partial \dot{q}_s}+2\frac{\partial T^*}{\partial q_s}+Q_s+\psi_s'\Big)\delta q_s=0 \tag{2.15}$$

4. Anpell形式

构造相对论性广义加速度能函数[10]

$$S^*=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\Big[\frac{(\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i)^2}{c^2-\dot{\boldsymbol{r}}_*^2}+\ddot{\boldsymbol{r}}_i^2\Big] \tag{2.16}$$

利用(2.8)式，可以得到

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{dm_i}{dt}\dot{\boldsymbol{r}}_i+m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\Big)\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \ddot{q}_s}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\Big[m_{0i}(1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2)^{-3/2}\frac{\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i}{c^2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \ddot{q}_s}+m_{0i}(1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2)^{-1/2}\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \ddot{q}_s}\Big]$$

$$=\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_{0i}(1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2)^{-3/2}\frac{(\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i)^2}{c^2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_{0i}(1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2)^{-1/2}\ddot{\boldsymbol{r}}_i^2\Big]$$

$$=\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_s} \tag{2.17}$$

将(2.17)代入(2.10)，得到变质量可控力学系统Appell形式的相对论性D'Alembert原理

$$\sum_{s=1}^{n}\Big(-\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_s}+Q_s+\psi_s'\Big)\delta q_s=0 \tag{2.18}$$

变质量可控力学系统的相对论性D'Alembert原理(2.4)、(2.13)、(2.15)、(2.18)与非可控系统具有相同的形式，但其中含有控制参数。它们具有一般意义，给定不同的约束条件，即可得到不同约束条件下的可控力学系统的相对论性动力学方程。

三、变质量非完整可控力学系统的相对论性分析力学方程

1. Чаплыгин 方程

如果系统除受有m个完整约束外，还受有g个一阶非线性非完整可控约束(2.7) 的限制，则n个$\dot{q}_s$中只有$\varepsilon=n-g$个是独立的，取ε个准速度$\dot{\pi}_\sigma$作为独立变量，且

$$\dot{\pi}_\sigma=\dot{\pi}_\sigma(q_s,\dot{q}_s,u_r,\dot{u}_r,t)\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon;\ s=1,\cdots,n) \tag{3.1}$$

与$\dot{\pi}_\sigma$对应的坐标称为准坐标．从(3.1)式可反解出

$$\dot{q}_s=\dot{q}_s(q_\alpha,\dot{\pi}_\sigma,u_r,\dot{u}_r,t)\qquad(s,\alpha=1,\cdots,n;\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon)\tag{3.2}$$

利用(3.2)消去T^*中的广义速度，得

$$\tilde{T}^*(q_s,\dot{\pi}_\sigma,u_r,\dot{u}_r,t)=T^*[q_s,\dot{q}_s(q_\alpha,\dot{\pi}_\sigma,t),u_r,\dot{u}_r,t]\tag{3.3}$$

则

$$\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\dot{\pi}_\sigma}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}$$

$$\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\pi_\sigma}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial q_s}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial q_s}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\dot{q}_\alpha}{\partial\dot{\pi}_\sigma}$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial q_s}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\pi_\sigma}\tag{3.4}$$

从而可得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\pi_\sigma}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T^*}{\partial q_s}\right)\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\pi_\sigma}\right)\tag{3.5}$$

利用Appell-Четаев定义

$$\delta q_s=\sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}\delta\pi_\sigma\tag{3.6}$$

把(2.13)式改写后，注意到$\delta\pi_\sigma$的独立性，结合(3.5)得到变质量非完整可控力学系统在准坐标下的相对论性广义Чаплыгин方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\pi_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\pi_\sigma}\right)=P_\sigma+P_\sigma'\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\tag{3.7}$$

$$P_\sigma=\sum_{s=1}^{n}Q_s\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma},\quad P_\sigma'=\sum_{s=1}^{n}\psi_s'\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}$$

2. Nielsen方程

将(3.6)代入(2.15)，注意到$\delta\pi_\sigma$的独立性，得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial\dot{T}^*}{\partial\dot{q}_s}+2\frac{\partial T^*}{\partial q_s}+Q_s+\psi_s'\right)\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}=0\tag{3.8}$$

令$\tilde{\dot{T}}^*$为$\dot{T}^*$中借助(3.2)消去$\dot{q}_s$，$\ddot{q}_s$以$\dot{\pi}_\sigma$，$\ddot{\pi}_\sigma$表示的表达式

$$\tilde{\dot{T}}^*(q_s,\dot{\pi}_\sigma,\ddot{\pi}_\sigma,u_r,\dot{u}_r,\ddot{u}_r,t)=\dot{T}^*[q_s,\dot{q}_s(q_\alpha,\dot{\pi}_\sigma,u_r,\dot{u}_r,t),\ddot{q}_s(q_\alpha,\dot{\pi}_\sigma,\ddot{\pi}_\sigma,u_r,\dot{u}_r,\ddot{u}_r,t),u_r,\dot{u}_r,\ddot{u}_r,t]\tag{3.9}$$

则

$$\frac{\partial\tilde{\dot{T}}^*}{\partial\dot{\pi}_\sigma}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\dot{T}^*}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\dot{T}^*}{\partial\ddot{q}_s}\frac{\partial\ddot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}\tag{3.10}$$

利用(2.8)和 $\dot{T}^*=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{r}_i\cdot\ddot{r}_i$，注意到$m_i$、$\dot{r}_i$均与$\ddot{q}_s$无关，得

$$\frac{\partial \dot{T}^*}{\partial \ddot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \ddot{r}_i}{\partial \ddot{q}_s}=\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s} \tag{3.11}$$

将(3.11)代入(3.10)，得

$$\frac{\partial \tilde{\dot{T}}^*}{\partial \dot{\pi}_\sigma}=\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \dot{T}^*}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}+\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma} \tag{3.12}$$

把(3.4)、(3.12)代入(3.8)，整理后得到变质量非完整可控力学系统在准坐标下的相对论性广义Nielsen义方程

$$\frac{\partial \tilde{\dot{T}}^*}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-2\frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial \pi_\sigma}-\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-2\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \pi_\sigma}\right)=P_\sigma+P_\sigma^{\prime} \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.13}$$

3. Appell方程

将(3.6)代入(2.18)，注意到$\delta\pi_\sigma$的独立性，得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_s}+Q_s+\psi_s^{\prime}\right)\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}=0 \tag{3.14}$$

令$\tilde{S}^*$为S^*中借助(3.2)消去$\dot{q}_s$，$\ddot{q}_s$以$\dot{\pi}_\sigma$，$\ddot{\pi}_\sigma$表示的表达式

$$\tilde{S}^*(q_s,\dot{\pi}_\sigma,\ddot{\pi}_\sigma,u_r,\dot{u}_r,\ddot{u}_r,t)=S^*[q_s,\dot{q}_s(q_a,\dot{\pi}_\sigma,u_r,\dot{u}_r,t),\ddot{q}_s(q_a,\dot{\pi}_\sigma,\ddot{\pi}_\sigma,u_r,\dot{u}_r,\ddot{u}_r,t),u_r,\dot{u}_r,\ddot{u}_r,t]$$

则

$$\frac{\partial \tilde{S}^*}{\partial \ddot{\pi}_\sigma}=\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_s} \frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \ddot{\pi}_\sigma} \tag{3.15}$$

将(3.2)对时间求导，得

$$\ddot{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}\ddot{\pi}_\sigma+(\cdots), \qquad \frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \ddot{\pi}_\sigma}=\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma} \tag{3.16}$$

$(\cdots)$为不含$\ddot{\pi}_\sigma$的余项。将(3.16)代入(3.15)、结合(3.14)得到变质量非完整可控力学系统在准坐标下的相对论性广义Appell方程

$$\frac{\partial \tilde{S}^*}{\partial \ddot{\pi}_\sigma}=P_\sigma+P_\sigma^{\prime} \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{3.17}$$

方程(3.7)、(3.13)、(3.17)与非可控系统具有同样的形式，但各方程中还包含一些控制参数，只有给出控制规律时，这些方程才是封闭的。

四、讨 论

1. 变质量非完整可控系统在广义坐标下的相对论性方程

若取独立的广义速度$\dot{q}_\sigma$作为准速度$\dot{\pi}_\sigma$，有

$$\frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial \pi_\sigma}=\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial q_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}=\frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} \frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \pi_\sigma}\right)=\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{q}_\sigma}-\sum_{a=1}^{s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial q_a} \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)$$

$$=\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T^*}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}-\sum_{\nu=1}^{\varepsilon}\frac{\partial q_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_{\varepsilon+\nu}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\nu}}{\partial q_\sigma}\right)$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-2\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \pi_\sigma}\right)=\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}\right),$$

$$P_\sigma=\sum_{s=1}^{n}Q_s\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma,$$

$$P_\sigma^t=\sum_{s=1}^{n}\psi_s^t\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}+\psi_\sigma^t+\sum_{\beta=1}^{g}\psi_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}=\tilde{\psi}_\sigma^t$$

则方程(3.7)，(3.13)，(3.17) 分别成为变质量非完整可控系统在广义坐标下的相对论性广义Чаплыгин方程、Nielsen方程和Appell方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\sum_{l=1}^{g}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_{\varepsilon+l}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+l}}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)=\tilde{Q}_\sigma+\tilde{\psi}_\sigma^t\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \tilde{\dot{T}}^*}{\partial \dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial q_\sigma}-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T^*}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T^*}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\left(\frac{\partial \ddot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}\right)$$

$$=\tilde{Q}_\sigma+\tilde{\psi}_\sigma^t\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}^*}{\partial \ddot{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma+\tilde{\psi}_\sigma^t\qquad(\sigma=1,\cdots,\varepsilon)\tag{4.3}$$

2. 变质量完整可控系统的相对论性方程

若系统只受完整约束，各广义坐标和广义速度都是独立的，约束方程都是可积的，则方程(3.7)、(3.13)、(3.17)分别成为变质量完整可控力学系统的相对论性 Lagrange方程、Nielsen方程和Appeii方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T^*}{\partial q_s}=Q_s+\psi_s^t\qquad(s=1,\cdots,n)\tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \dot{T}^*}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T^*}{\partial q_s}=Q_s+\psi_s^t\qquad(s=1,\cdots,n)\tag{4.5}$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s+\psi_s^t\qquad(s=1,\cdots,n)\tag{4.6}$$

3. 无质量分离或并入的非完整可控系统的相对论性方程

对于无质量的分离或并入的系统，有$\boldsymbol{R}'=0$，则方程(3.7)、(3.13)、(3.17)分别成为非完整可控力学系统的相对论性Чаплыгин方程、Nielsen方程和Appell方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial T^*}{\partial \pi_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial q_s}{\partial \pi_\sigma}\right)=P_\sigma^t \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-2\frac{\partial T^*}{\partial \pi_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-2\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \pi_\sigma}\right)=P_\sigma^t \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}^*}{\partial \ddot{\pi}_\sigma}=P_\sigma^t \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{4.9}$$

4. 经典变质量非完整可控系统的动力学方程

在$|\dot{\boldsymbol{r}}_i|\ll c$的经典近似下，取$\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}$关于$\dot{\boldsymbol{r}}_i/c$ 幂级数展开式的前两项，相对论性的广义动能

$$T^*\simeq\sum_{i=1}^{N}m_{0i}c^2-\sum_{i=1}^{N}m_{0i}c^2\left(1-\frac{\dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2c^2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_{0i}\dot{\boldsymbol{r}}_i^2=T$$

化为经典动能函数；相对论性广义加速度能

$$S^*=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_{0i}\left[\frac{(\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i)^2}{c^2-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2}+\ddot{\boldsymbol{r}}_i^2\right]\simeq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_{0i}\ddot{\boldsymbol{r}}_i^2=S$$

化为经典加速度能，则方程（3.7)、(3.13)、(4.2) 分别成为变质量非完整可控力学系统的Чаплыгин方程、Nielsen方程和Appell方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial \pi_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial q_s}{\partial \pi_\sigma}\right)=P_\sigma+P_\sigma' \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-2\frac{\partial T}{\partial \pi_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-2\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \pi_\sigma}\right)=P_\sigma+P_\sigma^t \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \ddot{\pi}_\sigma}=P_\sigma+P_\sigma^t \qquad (\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{4.12}$$

对于非可控约束系统，方程(3.7)、(3.13)、(3.17) 不含控制参数，分别成为变质量非完整非可控系统的相对论性广义Чаплыгин方程、Nielsen方程和Appell方程。对于无质量分离或并入的非可控系统，本文成为相对论非线性非完整非可控系统动力学理论[9]。对于常质量的经典非可控系统，本文成为经典非完整动力学理论[5]。

参 考 文 献

[1] В.И. Киргетов, О кинематически управляемых механических системах, ПММ., 28(1)(1964).

[2] В. И. Киргетов, Об уравнениях движения управляемых механических систе-мах, ПММ., 28(2)(1964).

[3] В. В. Румянцев, О движении управляемых механических систем, ПММ, 40 (5)(1976).

[4] 梅凤翔，可控力学系统的Jourdain原理和Nielsen方程，北京工业学院学报，(2)(1983)，22—35.

[5] 梅凤翔,《非完整系统力学基础》,北京工业学院出版社 (1985),433—438.

[6] 刘恩远,变质量可控力学系统的Gauss原理和 Appell 方程,固体力学学报,2 (1986),122—129.

[7] 陈立群,变质量可控力学系统的广义Nielsen方程,固体力学学报,2(1989),177—183.

[8] Qiao Yongfen, Gibbs-Appell's equations of variable mass controllable mechanics systems in terms of quasi-velocities and quasi-accelerations, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 4(3) (1991), 231—249.

[9] 罗绍凯,相对论非线性非完整系统动力学理论,上海力学,12(1)(1991),61—70.

[10] Luo Shaokai, Relativistic variational principles and equations of motion of high-order nonlinear nonholonomic systems, *Proc. ICDVC*, Peking University Press (1990), 615—652.

[11] 罗绍凯,变质量高阶非线性非完整系统的相对论性广义Volterra型方程,数学物理学报,12(增刊) (1992),27—29.

Relativistic Variation Principles and Equation of Motion for Variable Mass Controllable Mechanical Systems

Luo Shaokai

(*Shangqiu Teachers College, Shangqiu He'nan* 476000, *P. R. China*)

Abstract

With classical variable mass and relativistic variable mass cases being considered, the relativistic D'Alembert principles of Lagrange form, Nielsen form and Appell form for variable mass controllable mechanical system are given, the relativistic Chaplygin equation, Nielsen equation and Appell equation for variable mass controllable mechanical system in quasi-coordinates and generalized-coordinates are obtained, and the equations of motion of relativistic controllable mechanical system for holonomic system and constant mass system are discussed.

Key words controllable mechanical system, relativity, variable mass, nonholonomic constraint, variation principle, equation of motion