四元数矩阵的Jordan标准形*

陈龙玄[1]　侯仁民[1]　王亮涛[1]

（钱伟长推荐；1995年3月31日收到，1995年11月24日收到修改稿）

摘　要

本文是在四元数矩阵的重行列式理论的基础上，直接利用四元数的乘法证明了：任意一个四元数矩阵都相似于特征主值表征的Jordan标准形及其唯一性。

关键词　重行列式　重特征多项式　特征主值　Jordan标准形

一、引　言

近年来，四元数矩阵在刚体力学中的应用日见重要和广泛，特别在多刚体系统中更显示出它独有的优越性[1~3]。然而对它深层次的应用，有赖于对四元矩阵的深刻认识和对四元数矩阵标准形的运用。由于四元数乘法的非交换性，给这方面的研究带来了巨大的困难。文献[4]完成了某些特殊矩阵的标准形。本文基于新近发展起来的四元数矩阵的重行列式理论[5~7]，直接利用四元数的乘法，证明了四元数矩阵Jordan标准形的存在及其特有的形式，并给出了具体的算法。

用**Q**记实四元数体，**C**为复数域，**R**为实数域，以及$\mathbf{Q}_{(m\times n)}=\{(a_{ij})_{m\times n}|a_{ij}\in\mathbf{Q}\}$。

设$A\in\mathbf{Q}_{(n\times n)}$由文献[5]

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{n_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{s-1}i_s}a_{i_sn_1}a_{n_2j_2}a_{j_2j_3}\cdots a_{j_tn_2}\cdots a_{n_rk_2}a_{k_2k_3}\cdots a_{k_ln_r}$$

这里S_n是n个文字的对称群，置换σ的循环表示应写成如下的正规形式：

$$\sigma=(n_1i_2i_3\cdots i_s)(n_2j_2j_3\cdots j_t)\cdots(n_rk_2k_3\cdots k_l)$$

$$n_1>i_2,i_3,\cdots,i_s;\ \ n_2>j_2,\ \ j_3\cdots j_t;\ \ \cdots;\ \ n_r>k_2,k_3,\cdots,k_l$$

$$n=n_1>n_2>n_3>\cdots>n_r\geqslant 1,$$

$$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{(s-1)+(t-1)+\cdots+(l-1)}=(-1)^{n-r}$$

记$\|A\|=\det(A^+A)=|A^+A|$，称为A的重行列式。这里$A^+=\bar{A}'$是A的共轭转置。

---

* 山东省自然科学基金资助课题，第五届全国代数学术会议报告论文。

1 烟台大学数学系，烟台 264005

当$A\in \mathbf{Q}_{(n\times n)}$，$A$的重特征多项式是[6]

$$F_A(\lambda)=\|\lambda E-A\|=\det((\lambda E-A)^+(\lambda E-A))$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}a_k\lambda^k \qquad (a_k\in \mathbf{R},\ k=0,1,2,\cdots,2n)$$

$$=\prod_{k=1}^{s}\|\lambda-\dot{\omega}_k\|^{n_k}, \qquad \dot{\omega}_k\neq\dot{\omega}_j,\ (k\neq j;k,j=1,2,\cdots,s) \tag{1.1}$$

文献[6]已经证明：

当 $A\in \mathbf{Q}_{(n\times n)}$，则　$F_A(A)=0$　　　(1.2)

设

$$\Omega(A)=\{\dot{\omega}_k|F_A(\dot{\omega}_k)=0,\ \dot{\omega}_k=t_k+ih_k\in \mathbf{C},\ h_k\geqslant 0,\ k=1,2,\cdots,s\} \tag{1.3}$$

称为A的谱，$\dot{\omega}_k$为A的特征主值[7]，$\dot{\omega}$总位于复平面的上半部．s是A的相异特征主值的个数．

当A相似于B，记为$A\sim B=T^{-1}AT$．由文献[5]定理5可得$F_B(\lambda)=\|\lambda E-B\|=\|\lambda E-A\|=F_A(\lambda)$，所以$A$，$B$有相同的谱．这里$E$是$n\times n$单位矩阵．

$$\Omega(A)=\Omega(B),\ \text{当}A\sim B \tag{1.4}$$

根据[7]，对任意的$A\in \mathbf{Q}_{(n\times n)}$至少存在一个特征主值$\dot{\omega}$，使右特征方程

$$AX\times X\dot{\omega},\ F_A(\dot{\omega})=0,\ X\neq 0 \tag{1.5}$$

有解X．这X是空间$\mathbf{Q}^n$中的n维列向量．[7]中还给出了具体的解法．

记

$$J_l(\dot{\omega})=\begin{pmatrix}\dot{\omega} & 1 & & 0\\ & \dot{\omega} & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \dot{\omega}\end{pmatrix}_{l\times l}$$

$$J_{l_{k_1}}(\dot{\omega}_k)\oplus J_{l_{k_2}}(\dot{\omega}_k)\oplus\cdots\oplus J_{l_{k_r}}(\dot{\omega}_k)=J_{(l_k)}(\dot{\omega}_k)$$

$$l_{k_1}\geqslant l_{k_2}\geqslant\cdots\geqslant l_{k_r},\ (l_k)=(l_{k_1}l_{k_2},\cdots,l_{k_r}),\ \sum_{i=1}^{r}l_{k_i}=l_k \tag{1.6}$$

本文证明了如下的

基本定理　对任意的$A\in \mathbf{Q}_{(n\times n)}$，存在可逆矩阵$T\in \mathbf{Q}_{(n\times n)}$，使

$$T^{-1}AT=\bigoplus_{\dot{\omega}_k\in\Omega(A)}J_{(l_k)}(\dot{\omega}_k)=\bigoplus_{k=1}^{s}J_{(l_k)}(\dot{\omega}_k)=J,\ \sum_{k=1}^{s}l_k=n \tag{1.7}$$

这里$\Omega(A)$如(1.3)所示，$\dot{\omega}_k$位于复平面的上半部．s是相异特征主值的个数，如果不计J中直和的次序，J是唯一的．

它的证明，将分解成下面3个定理来完成．

二、直　和　分　解

定理1　设$A\in \mathbf{Q}_{(n\times n)}$，则存在可逆阵$T\in \mathbf{Q}_{(n\times n)}$，使

$$A\sim T^{-1}AT=\bigoplus_{k=1}^{s}A_k,\ F_{A_k}(\lambda)=\|\lambda-\dot{\omega}_k\|^{n_k},\qquad(k=1,2,\cdots,s)$$

证明 在(1.3)中，只要A的相异特征主值的个数$s\geqslant2$，A的重特征多项式(1.1)就可在环$\mathbf{R}[\lambda]$上分解为

$$F_A(\lambda)=\|\lambda-\dot{\omega}_1\|^{n_1}\prod_{k=2}^{s}\|\lambda-\dot{\omega}_k\|^{n_k}=F^{(1)}(\lambda)\cdot G(\lambda)\tag{2.1}$$

其中 $\|\lambda-\dot{\omega}\|=(\lambda-\bar{\dot{\omega}})(\lambda-\dot{\omega})=\lambda^2-(\bar{\dot{\omega}}+\dot{\omega})\lambda+\bar{\dot{\omega}}\dot{\omega}\in\mathbf{R}[\lambda]$

因为实系数多项式

$$F^{(1)}(\lambda)=\|\lambda-\dot{\omega}_1\|^{n_1},\ G(\lambda)=\prod_{k=2}^{s}\|\lambda-\dot{\omega}_k\|^{n_k}\tag{2.2}$$

在$\mathbf{R}[\lambda]$上互质，从而存在$f(\lambda)$，$g(\lambda)\in\mathbf{R}[\lambda]$，使

$$f(\lambda)F^{(1)}(\lambda)+g(\lambda)G(\lambda)=1$$

置$\lambda=A$，就得到

$$f(A)F^{(1)}(A)+g(A)G(A)=E_n\tag{2.3}$$

记$\mathbf{Q}$上n数组空间$\mathbf{Q}^n$为$\mathbf{V}$，令

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{V}_1=\{\xi\mid F^{(1)}(A)\xi=0,\quad \xi\in\mathbf{V}\}\\ \mathbf{G}=\{\xi\mid G(A)\xi=0,\quad \xi\in\mathbf{V}\}\end{array}\right\}\tag{2.4}$$

当$s\geqslant2$时，至少有$\dot{\omega}_1\neq\dot{\omega}_2\in\Omega(A)$，由[6]知存在$\xi_1$，$\xi_2\in\mathbf{V}$，使

$$A\xi_1=\xi_1\dot{\omega}_1,\ A\xi_2=\xi_2\dot{\omega}_2,\ \xi_1,\xi_2\neq0\tag{2.5}$$

于是$F^{(1)}(A)\xi_1=\xi_1F^{(1)}(\dot{\omega}_1)=\xi_1\cdot0=0$，即$\xi_1\in\mathbf{V}_1$，故$\mathbf{V}_1\neq0$；同理$\xi_2\in\mathbf{G}$，致$\mathbf{G}\neq0$。

利用(2.3)，对任意的$\xi\in\mathbf{V}$，有

$$\xi=E\xi=g(A)G(A)\xi+f(A)F^{(1)}(A)\xi=\eta_1+\eta_2\tag{2.6}$$

注意到(1.2)，有

$$F^{(1)}(A)\eta_1=F^{(1)}(A)g(A)G(A)\xi=g(A)F_A(A)\xi=0$$

故$\eta_1\in\mathbf{V}_1$；同理$G(A)\eta_2=0$，$\eta_2\in\mathbf{G}$，因此(2.6)可进一步写成

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_1+\mathbf{G},\ \mathbf{V}_1=g(A)G(A)\mathbf{V},\ \mathbf{G}=f(A)F^{(1)}(A)\mathbf{V}\tag{2.7}$$

当$\xi\in\mathbf{V}_1\cap\mathbf{G}$，由(2.6)并利用(2.4)，有

$$\xi=g(A)G(A)\xi+f(A)F^{(1)}(A)\xi=g(A)0+f(A)0=0\tag{2.8}$$

以及

$$F^{(1)}(A)(A\mathbf{V}_1)=F^{(1)}(A)Ag(A)G(A)\mathbf{V}=Ag(A)F_A(A)\mathbf{V}=0$$

因此$A\mathbf{V}_1\subset\mathbf{V}_1$，即子空间$\mathbf{V}_1$关于$A$不变。同理可证$\mathbf{G}$关于$A$也不变。所以(2.7)更可写成：

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_1\oplus\mathbf{G},\ \mathbf{V}_1\neq0,\ \mathbf{G}\neq0,\ A\mathbf{V}_1\subset\mathbf{V}_1,\ A\mathbf{G}\subset\mathbf{G}\tag{2.9}$$

据此事实，存在可逆阵$T\in\mathbf{Q}_{(n\times n)}$，可使

$$A\sim T^{-1}AT=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&G_1\end{pmatrix}=A_1\oplus G_1=B\tag{2.10}$$

再利用重行列式的性质，得到

$$F_A(\lambda)=\|\lambda E-A\|=\|\lambda E-B\|=\|\lambda E-A_1\|\cdot\|\lambda E-G_1\|=F_{A_1}(\lambda)F_{G_1}(\lambda)\tag{2.11}$$

如果A_1，G_1的相异特征主值的个数仍然$\geqslant2$，则G_1，A_1仍可按上述过程进一步分解，直

至B的每个子阵A_k都只含单一特征主值为止，定理证毕．

接着，我们再证明A_k的单一结构具有形式(1.6)．

三、单 一 结 构

定理2 设$A\in\mathbf{Q}_{(n\times n)}$．$F_A(\lambda)=\|\lambda-\dot{\omega}\|^n$，则存在可逆阵$T\in\mathbf{Q}_{(n\times n)}$，使

$$T^{-1}AT=J_{l_1}(\dot{\omega})\oplus J_{l_2}(\dot{\omega})\oplus\cdots\oplus J_{l_r}(\dot{\omega})=J_{(l)}(\dot{\omega})$$

$$l_1\geqslant l_2\geqslant\cdots\geqslant l_r,\quad \sum_{i=1}^{r}l_i=n$$

证明 设$\dot{\omega}=t+ih\in\mathbf{C}$，$h\geqslant 0$．我们对$n$作归纳法．

当$n=1$，$A=(q)$，$q=q_0+iq_1+jq_2+kq_3=(q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3)$．恒存在$p\in\mathbf{Q}$，使

$$A=q\sim p^{-1}qp=q_0+ih=\dot{\omega},\quad h=\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}\geqslant 0 \tag{3.1}$$

可以直接验证，只要取

$$p=\begin{cases}(h+q_1,\ 0,\ -q_3,\ q_2), & \text{当 } q_2^2+q_3^2\neq 0\\ (0,\ 0,\ -1,\ 0), & \text{当 } q_2=q_3=0,\ q_1<0\\ (1,\ 0,\ 0,\ 0), & \text{当 } q_2=q_3=0,\ q_1\geqslant 0\end{cases}$$

此时(3.1)已是(1.6)的形式．假设阶数小于n时A相似于(1.6)的形式已经成立．

以$\dot{\omega}$的特征向量作为A的第一基向量，于是存在$T_1\in\mathbf{Q}_{(n\times n)}$，使

$$A\sim T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix}\dot{\omega} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{(n-1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}=B_1 \tag{3.2}$$

据归纳假设，存在$L\in\mathbf{Q}_{(n-1)\times(n-1)}$，使$L^{-1}A_{(n-1)}L=J_{(n-1)}(\dot{\omega})J_{(n-1)}(\dot{\omega})$已如(1.6)所示．

设取$T_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & L\end{pmatrix}$，则$T_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & L^{-1}\end{pmatrix}$，我们有

$$A\sim T_2^{-1}B_1T_2=\begin{pmatrix}\dot{\omega} & b_{11}\cdots & b_{21}\cdots & \cdots & b_{r1}\cdots\\ 0 & J_{l_1}(\dot{\omega}) & & & \\ \vdots & & J_{l_2}(\dot{\omega}) & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_{l_r}(\dot{\omega})\end{pmatrix}=B_2 \tag{3.3}$$

$$l_1\geqslant l_2\geqslant\cdots\geqslant l_r$$

取适当选取$x_{11}\cdots$，$x_{21}\cdots$，$\cdots$，$x_{r1}\cdots$，$\in\mathbf{Q}$，令

$$T_3=\begin{pmatrix}1 & x_{11}\cdots & x_{21}\cdots & \cdots x_{r1}\cdots\\ 0 & E_{l_1} & & \\ \vdots & & E_{l_2} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & E_{l_r}\end{pmatrix}$$

$$
\text{则} \qquad T_3^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -x_{11}\cdots & -x_{21}\cdots & \cdots & -x_{r1}\cdots \\ 0 & E_{l_1} & & & \\ \vdots & & E_{l_2} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & E_{l_r} \end{pmatrix} \tag{3.4}
$$

又有

$$
A\sim T_3^{-1}B_2T_3=\begin{pmatrix} \dot{\omega} & d_{11}\cdots & d_{21}\cdots & \cdots & d_{r1}\cdots \\ 0 & J_{l_1}(\dot{\omega}) & & & \\ \vdots & & J_{l_2}(\dot{\omega}) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_{l_r}(\dot{\omega}) \end{pmatrix}=B_3 \tag{3.5}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
(d_{i1},\ d_{i2},\cdots,d_{il_i}) &= (b_{i1}\cdots b_{il_i})+\dot{\omega}(x_{i1}\cdots x_{il_i})-(x_{i1}\cdots x_{il_i})J_{l_i}(\dot{\omega}) \\
&= \dot{\omega}(x_{i1}\cdots x_{il_i})-(x_{i1}\cdots x_{il_i})\dot{\omega}-(0,\ x_{i1}\cdots x_{il_i-1})+(b_{i1}\cdots b_{il_i})
\end{aligned}
$$

即

$$
\left.\begin{aligned}
d_{i1} &= \dot{\omega}x_{i1}-x_{i1}\dot{\omega}+b_{i1} \\
d_{ik} &= \dot{\omega}x_{ik}-x_{ik}\dot{\omega}+b_{ik}-x_{i,k-1}
\end{aligned}\right\} \quad (k=2,\cdots,l_i;\ \ i=1,2,\cdots,r) \tag{3.6}
$$

此处b_{ik}已在(3.3)中给定，x_{ik}待定。

当$h=0$ 则 $\dot{\omega}=t$是一实数，上式成为

$$
\left.\begin{aligned}
d_{i1} &= b_{i1} \\
d_{ik} &= b_{ik}-x_{i,k-1} \qquad (k=2,\cdots,l_i;\ \ i=1,2,\cdots,r)
\end{aligned}\right\} \tag{3.7}
$$

于是(3.4)中的x_{ik}可如下选取：

$$
(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{il_i})=(b_{i2},b_{i3},\cdots,b_{il_i},0) \qquad (i=1,2,\cdots,r)
$$

就使(3.5)成为

$$
A\sim\begin{pmatrix} \dot{\omega} & b_1\ 0\cdots0 & b_2\ 0\cdots0 & \cdots & b_r\ 0\cdots0 \\ 0 & J_{l_1}(\dot{\omega}) & & & \\ \vdots & & J_{l_2}(\dot{\omega}) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_{l_r}(\dot{\omega}) \end{pmatrix}=B_4 \tag{3.8}
$$

这里$h=0$，$\dot{\omega}=t\in\mathbf{R}$，$b_i=b_{i1}\in\mathbf{Q}$，$i=1,2,\cdots,r$。

当$h\neq0$，注意到$\dot{\omega}=t+ih$，对任意的$x=(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$，有

$$
\dot{\omega}x-x\dot{\omega}=(0,\ 0,\ -2hx_3,\ 2hx_2) \tag{3.9}
$$

于是对任意给定的$p=(p_0,p_1,p_2,p_3)$，只要取

$$
x=(0,\ 0,\ -p_3/2h,\ p_2/2h),\qquad h\neq0 \tag{3.10}
$$

就恒可使

$$
\dot{\omega}x-x\dot{\omega}+p=p_0+ip_1\in\mathbf{C} \tag{3.11}
$$

是一复数。

因此，在(3.6)中，恒可按(3.10)选定x_{i1}使$d_{i1}=c_{i1}\in\mathbf{C}$，再对已定的$b_{i2}-x_{i1}$，同法选定$x_{i2}$，使$d_{i2}=c_{i2}\in\mathbf{C}$，同样的方法就可依次逐一选定$x_{ik}$，使$d_{ik}=c_{ik}\in\mathbf{C}$。这时(3.5)成为

$$A\sim\begin{pmatrix}\dot{\omega} & c_{11}\cdots & c_{21}\cdots & \cdots & c_{r1}\cdots\\ 0 & J_{l_1}(\dot{\omega}) & & & \\ \vdots & & J_{l_2}(\dot{\omega}) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_{l_r}(\dot{\omega})\end{pmatrix}=B_5 \qquad \begin{matrix}c_{ik}\in\mathbf{C}\\ i=1,\cdots,r;k=1\cdots,l_i\end{matrix} \tag{3.12}$$

再对B_5作形如(3.4)的相似变换T_4，其中x_{ik}都如下取定为复数：

$$x_{i,k-1}=c_{ik},\quad k=2,\cdots,l_i;\quad x_{il_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,r$$

此时仍有$\dot{\omega}x_{ik}=x_{ik}\dot{\omega}$。于是相应于(3.6)成为$d_{i1}=c_{i1}$，$d_{ik}=0$，$k=2,\cdots,l_i$，$i=l,\cdots,r$。我们得到

$$A\sim T_4^{-1}B_5T_4=\begin{pmatrix}\dot{\omega} & c_1\ 0\cdots0 & c_2\ 0\cdots0 & \cdots & c_r\ 0\cdots0\\ 0 & J_{l_1}(\dot{\omega}) & & & \\ \vdots & & J_{l_2}(\dot{\omega}) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_{l_r}(\dot{\omega})\end{pmatrix}=B_6 \tag{3.13}$$

$$\dot{\omega}=t+ih\in\mathbf{C};\quad h>0;\quad c_i=c_{i1}\in\mathbf{C};\quad i=1,2,\cdots,r$$

当(3.13)中的c_i，或(3.8)中的b_i有一个为0时，即

$$A\sim\left(\begin{array}{ccc|c|cc}\dot{\omega} & c_1\ 0\cdots0 & \cdots & & \cdots & c_r\ 0\cdots0\\ 0 & J_{l_1}(\dot{\omega}) & & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \hline & 0 & & J_{l_i}(\dot{\omega}) & & 0\\ \hline & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & J_{l_r}(\dot{\omega})\end{array}\right)=B_7 \qquad 1\leqslant i\leqslant r \tag{3.14}$$

则有置换矩阵T_5，并利用归纳假设，有

$$A\sim T_5^{-1}B_7T_5=\begin{pmatrix}J_{l_i}(\dot{\omega}) & 0\\ 0 & A_{(n-l_i)}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}J_{l_i}(\dot{\omega}) & 0\\ 0 & J_{(n-l_i)}(\dot{\omega})\end{pmatrix}=J_{(n)}(\dot{\omega}) \tag{3.15}$$

归纳法证明完成。

如果(3.13)中c_1，$c_2,\cdots,c_r$都不为0，则取

$$T_6=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & c_1^{-1}E_{l_1} & & 0 & \\ & & E_{l_2} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & E_{l_r}\end{pmatrix} \tag{3.16}$$

可使

$$A\sim T_6^{-1}B_6T_6=\begin{pmatrix}\dot{\omega} & 1\ 0\cdots0 & c_2\ 0\cdots0 & \cdots & c_r\ 0\cdots0\\ 0 & c_1J_{l_1}(\dot{\omega})c_1^{-1} & & & \\ \vdots & & J_{l_2}(\dot{\omega}) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_{l_r}(\dot{\omega})\end{pmatrix} \tag{3.17}$$

$$=\begin{pmatrix} \dot{\omega} & 1\ 0\cdots 0 & c_2\ 0\cdots 0 & \cdots & c_r\ 0\cdots 0 \\ 0 & J_{l_1}(\dot{\omega}) & & & \\ \vdots & & J_{l_2}(\dot{\omega}) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_{l_r}(\dot{\omega}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} J_{l_1+1}(\dot{\omega}) & C_2 & \cdots & C_r \\ & J_{l_2}(\dot{\omega}) & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & J_{l_r}(\dot{\omega}) \end{pmatrix}=B_8, \quad l_1\geqslant l_2\geqslant\cdots\geqslant l_r \tag{3.18}$$

这里

$$C_i=\begin{pmatrix} c_i & 0 & \cdots & 0 \\ & O_{l_1\times l_i} & & \end{pmatrix}_{(l_1+1)\times l_i}, \qquad c_i\in\mathbf{Q}, \quad (i=1,2,\cdots,r) \tag{3.19}$$

采取

$$T_7=\begin{pmatrix} E_{l_1+1} & G_2 & \cdots & G_r \\ & E_{l_2} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & E_{l_r} \end{pmatrix}, \text{ 则 } T_7^{-1}=\begin{pmatrix} E_{l_1+1} & -G_2 & \cdots & -G_r \\ & E_{l_2} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & E_{l_r} \end{pmatrix}$$

这里G_i待定，而有

$$A\sim T_7^{-1}B_8T_7=\begin{pmatrix} J_{l_1+1}(\dot{\omega}) & M_2 & \cdots & M_r \\ & J_{l_2}(\dot{\omega}) & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & J_{l_r}(\dot{\omega}) \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

其中

$$M_i=C_i+J_{l_1+1}(\dot{\omega})G_i-G_iJ_{l_i}(\dot{\omega}) \qquad (i=2,\cdots,r) \tag{3.21}$$

我们选取

$$G_i=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & -c_iE_{l_i} & \\ & O_{(l_1-l_i)\times l_i} & \end{pmatrix}_{(l_1+1)\times l_i} \qquad (i=2,\cdots,r) \tag{3.22}$$

因为c_i（或(3.18)中的b_i）和$\dot{\omega}$可交换，而有$G_i\dot{\omega}=\dot{\omega}G_i$把(3.22)代入(3.21)容易验证$M_i=0$，$i=2,\cdots,r$使(3.20)成为

$$A\sim T_7^{-1}B_8T_7=\begin{pmatrix} J_{l_1+1}(\dot{\omega}) & & 0 \\ & J_{l_2}(\dot{\omega}) & \\ 0 & \ddots & \\ & & J_{l_r}(\dot{\omega}) \end{pmatrix}=J_{(n)}(\dot{\omega}), \text{ 当 } F_A(\lambda)=\|\lambda-\dot{\omega}\|^n \tag{3.23}$$

这里T_7中的G_i取如(3.22)。

把(3.23)用于(2.12)中的每一个A_k就证明了(1.7)至归纳法证明全部完成。

四、唯　一　性

定理3　设$A\in\mathbf{Q}_{(n\times n)}$，$\dot{\omega}$，$\dot{\sigma}\in\Omega(A)$，若$T\in\mathbf{Q}_{(l\times m)}$满足

$$J_l(\dot{\omega})T=TJ_m(\dot{\omega}) \tag{4.1}$$

则当$\dot{\omega}\neq\dot{\sigma}$时$T=0$；当$\dot{\omega}=\dot{\sigma}=t+ih$，$h>0$时，$T\in\mathbf{C}_{(l\times m)}$。

证明　记$T=(t_{ij})_{l\times m}$，用矩阵元写出关系(4.1)：

$$\dot{\omega}t_{ij}-t_{ij}\dot{\sigma}=t_{i,j-1}-t_{i+1,j} \qquad (i=1,2\cdots,l;\ j=1,2,\cdots,m) \tag{4.2}$$

约定　　$t_{i0}=0$，$t_{l+1,j}=0$

当$\dot{\omega}\neq\dot{\sigma}$：因$\dot{\omega}t_{l1}-t_{l1}\dot{\sigma}=0$，如果$t_{l1}\neq 0$，则$\dot{\sigma}=t_{l1}^{-1}\dot{\omega}t_{l1}\sim\dot{\omega}$，而当$\dot{\sigma}\neq\dot{\omega}$时，也必有$\dot{\sigma}\not\sim\dot{\omega}$[6]，因此只能是$t_{l1}=0$。继而有$\dot{\omega}t_{l-1,1}-t_{l-1,1}\dot{\sigma}=-t_{l1}=0$，$\Rightarrow t_{l-1,1}=0$。同理$t_{l-2,1}=t_{l-3,1}=\cdots=t_{l1}=0$。再有$\dot{\omega}t_{l2}-t_{l2}\dot{\sigma}=t_{l1}=0$，$\Rightarrow t_{l2}=0$；以及$\dot{\omega}t_{l-1,2}-t_{l-1,2}\dot{\sigma}=-t_{l2}=0$，$\Rightarrow t_{l-1,2}=0$，同理$t_{l-2,2}=\cdots=t_{l2}=0$。类似可得$t_{ij}=0$，$i=1,2,\cdots,l$；$j=1,2,\cdots,m$即$T=0$。

当$\dot{\sigma}=\dot{\omega}=t+ih$，$h>0$时。因$\dot{\omega}t_{l1}-t_{l1}\dot{\omega}=0$，注意到关系(3.9)，四元数$t_{l1}$的$j$，$k$分量必为0，所以$t_{l1}=c_{l1}\in\mathbf{C}$，继而有$\dot{\omega}t_{l-1,1}-t_{l-1,1}\dot{\omega}=-t_{l1}=-c_{l1}\in\mathbf{C}$再由(3.9)知$c_{l1}=0$，导致$t_{l-1,1}=c_{l-1,1}\in\mathbf{C}$。同理$c_{l-1,1}=0\Rightarrow t_{l-2,1}\in\mathbf{C}$，…，最后得到$T$的第一列为

$$(t_{11},\ t_{21},\cdots,t_{l1})'=(t_{11},0,\cdots,0)',\qquad t_{11}\in\mathbf{C} \tag{4.3}$$

再考察T的最后一行：

$$\dot{\omega}t_{l2}-t_{l2}\dot{\omega}=t_{l1}=0,\ \Rightarrow t_{l2}=c_{l2}\in\mathbf{C},\ \dot{\omega}t_{l3}-t_{l3}\dot{\omega}=t_{l2}=c_{l2},\ \Rightarrow$$
$$c_{l2}=0,\ t_{l2}=0,\ t_{l3}\in\mathbf{C},\ \cdots,\ \Rightarrow t_{l3}=\cdots=t_{l,m-1}=0$$

而$t_{lm}=c_{lm}\in\mathbf{C}$，即

$$(t_{l1},\ t_{l2},\cdots,t_{lm})=(0,\cdots,0,\ t_{lm}),\ t_{lm}\in\mathbf{C} \tag{4.4}$$

由基本关系(4.2)并注意到(3.9)可知，当$t_{i,j-1}$和$t_{i+1,j}$的复数时，可知t_{ij}也是复数，从而$t_{i,j-1}=t_{i+1,j}$。由此从T的右下角开始，沿T的各条对角线，利用边值(4.3)和(4.4)逐一讨论到T的右上角，得知全部t_{ij}只能是0或复数，且每条对角线上的元素是相等的。由此可知，(4.1)中的T，只能是复数域上的矩阵。即$T\in\mathbf{C}_{(l\times m)}$。定理证毕。

现在证明基本定理中的唯一性。如果A除了标准形(1.7)之外，还有

$$A\sim\bigoplus_{k=1}^{s}J_{(m_k)}(\dot{\omega}_k) \tag{4.5}$$

这里已经用了(1.4)指出的事实，于是存在可逆矩阵$T\in\mathbf{Q}_{(n\times n)}$，使

$$T^{-1}\left(\bigoplus_{k=1}^{s}J_{(l_k)}(\dot{\omega}_k)\right)T=\bigoplus_{k=1}^{s}J_{(m_k)}(\dot{\omega}_k)$$

或

$$\left(\bigoplus_{k=1}^{s}J_{(l_k)}(\dot{\omega}_k)\right)T=T\left(\bigoplus_{k=1}^{s}J_{(m_k)}(\dot{\omega}_k)\right) \tag{4.6}$$

把T按$(l_1,l_2,\cdots,l_s)\times(m_1,m_2,\cdots,m_s)$分块为

$$T=(T_{ij}),\ T_{ij}\in\mathbf{Q}_{(l_i\times m_j)}\qquad(i,j=1,2,\cdots,s) \tag{4.7}$$

由(4.6)可得

$$J_{(l_i)}(\dot{\omega}_i)T_{ij}=T_{ij}J_{(m_j)}(\dot{\omega}_j) \tag{4.8}$$

当$i\neq j$，有$\dot{\omega}_i\neq\dot{\omega}_j$，由定理3知$T_{ij}=0$，因此$T$具有形式

$$T=\mathbf{diag}(T_{11},\cdots,T_{ii},\cdots,T_{ss}) \tag{4.9}$$

因T可逆，

$$\|T\|=\det(T^{+}T)=\prod_{i=1}^{s}\|T_{ii}\|\neq 0 \tag{4.10}$$

由于$\sum_{i=1}^{s} l_i=\sum_{i=1}^{s}m_i=n$，如果$(l_1,l_2,\cdots,l_s)\neq(m_1,m_2,\cdots,m_s)$，则必有某个$j$，使$l_j<m_j$，于是$T_{jj}$的列向量必右线性相关而致$\|T_{jj}\|=0$[4]. 由(4.10)这是不可能的，因此必有$(l_1,l_2,\cdots,l_s)=(m_1,m_2,\cdots,m_s)$. 所以我们仅需证明在(4.8)中$i=j$的情形. 即矩阵的特征主值是单一的情况下分解为 Jordan 块的唯一性. 于是可设$F_A(\lambda)=\|\lambda-\tilde{\omega}\|^n$，相应于(4.8)式成为

$$J_{(l)}(\tilde{\omega})T=TJ_{(m)}(\dot{\omega}),\quad \|T\|\neq 0 \tag{4.11}$$

这里 $(l)=(l_1,l_2,\cdots,l_p)$，$(m)=(m_1,m_2,\cdots,m_q)$以及

$$\sum_{i=1}^{p} l_i=\sum_{i=1}^{q}m_i=n$$

当$\dot{\omega}=t+ih$，$h>0$时，由上面的讨论知道$T\in \mathbf{C}_{(n\times n)}$. 由定理3，(4.11)成为$T^{-1}J_{(l)}(\dot{\omega})T=J_{(m)}(\dot{\omega})$，而复数域上标准形的唯一性是已经证明的事实.

当$h=0$，$\dot{\omega}=t$是一实数，此时虽然$T\in \mathbf{Q}_{(n\times n)}$，但$\dot{\omega}$和一切四元数乘法可交换. 在这种情况下，唯一性的证明相同于复数域上同一问题的证明. 唯一性证毕.

至此，基本定理完全证明.

参 考 文 献

[1] 肖尚彬，四元数矩阵的乘法及其可易性，力学学报，(2) (1984)，159—166.

[2] 张光枢，多刚体系统力学的四元数方法，北京航空学院科研报告，BH-B2361 (1986), 24—31.

[3] 王庆贵，四元数变换及其在空间机构位移分析中的应用，力学学报，(1) (1983)，54—61.

[4] H. C. Lee, Eigenvalues and canonical forms of matrix with quaternion coefficients, *Proc. R. I. A. SecA*, 52 (1949), 253—260.

[5] L. X. Chen (陈龙玄), Inverse matrix and properties of double determinant over quternion field, *Science in China, Series A*, 34(5) (1991), 528—540.

[6] 陈龙玄，Cayley-Hamilton 定理在四元数体上的推广，科学通报，36(17) (1991)，1291—1293.

[7] 陈龙玄，四元数矩阵的特征值和特征向量，烟台大学学报，(自然科学与工程版)，(3) (1993)，1—8.

Jordan Canonical Forms of Matrices over Quaternion Field

Chen Longxuan　Hou Renmin　Wang Liangtao

(Department of Mathematics, Yantai University, Yantai, Shandong 264005, *P. R. China)*

Abstract

By using quaternion multiplication and the double determinant theory over quaternion field, we provd that an arbitrary quaternion square matrix is similar to a unique Jordan canonical form indicated by its principal characteristic values.

Key words double determinant, double characteristic polynomial, principal characteristic value, Jordan canonical form