

求解非定常非完整约束多体系统 动力学的一种方法

水小平¹ 张永发¹

(樊大钧推荐, 1995年3月24日收到)

摘 要

通过对约束矩阵进行奇异值分解, 将系统的动力学方程沿与约束相容和不相容的两个方向上投影, 求解受非定常非完整约束的多体系统动力学问题, 并给出了求约束反力的公式和避免违约的一种方法; 这种解法不仅不依赖于描述系统的坐标选择, 而且计算效率高. 最后举了一个说明性例子

关键词 动力学 多体系统 非完整约束 非定常约束 奇异值分解 投影

一、引 言

在研究受约束的一般多体系统动力学的问题时, 常常需要求解一组计算效益较差的微分一代数混合方程. 为了克服求解这类方程的数值解所遇到的困难, 许多研究工作就集中在如何选择一组合适的独立广义坐标, 使系统运动微分方程的数值积分更有效, 并采用一定的技术避免违约的发生以克服计算过程的不必要中断. Mani等^[1]用SVD法, Liang等^[2]用Gramm-Schmidt过程都研究了受定常完整约束的多体系统动力学的分析过程. Kim等^[3]用QR分解技术, Park等^[4]用Hybrid积分法进一步对受非定常完整约束的多体系统进行了动力学分析. 虽然Blajer^[5]用投影法推导了受非定常完整或非完整约束的多体系统的动力学方程, 但运算过程复杂. 本文给出了求解受非定常非完整约束的多体系统动力学的一种简易方法. 这种解法不仅适合于系统的任何一种建模方法, 而且物理意义明确. 由于实际工程中系统所受的非完整约束基本上是线性的, 所以本文的研究只限于这类非完整约束.

二、用奇异值分解法缩并系统的动力学方程

假设一个多体系统由 n 个广义坐标 $\mathbf{q}=[q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ 来描述, 系统受到的 m 个约束由 α 个独立的非定常完整约束

$$\varphi(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (2.1)$$

和 β 个独立的线性非定常非完整约束

¹ 北京理工大学应用力学系, 北京 100081

$$\Psi(\dot{q}, q, t) = C_{\psi}(q, t)\dot{q} + \xi_{\psi}(q, t) = 0 \quad (2.2)$$

组成。对(2.1)式求一次导数并联立(2.2)式得

$$C(q, t)\dot{q} + \xi(q, t) = 0 \quad (2.3)$$

其中 $C = [C_{\dot{q}}^T \ C_{\ddot{q}}^T]^T$, $C_{\dot{q}} = \partial\varphi/\partial\dot{q}$, $\xi = [\xi_{\dot{q}}^T \ \xi_{\ddot{q}}^T]^T$, $\xi_{\dot{q}} = \partial\varphi/\partial t$ 。对(2.3)式求一次导数得

$$C(q, t)\ddot{q} + \eta(\dot{q}, q, t) = 0 \quad (2.4)$$

其中 $\eta = \dot{C}\dot{q} + \dot{\xi}$

由奇异值分解原理^{[1], [6]}, 存在一个 $m \times m$ 阶的正交矩阵 U 和 $n \times n$ 阶的正交矩阵 V , 使得

$$C = USV^T \quad (2.5)$$

其中 $S = [D \ 0]$, $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m > 0$), 0 为 $m \times k$ ($k = n - m$) 阶零矩阵。若将 V 进行分块

$$V = [V_1 \ V_2] \quad (2.6)$$

其中 $n \times m$ 阶矩阵 V_1 的列向量和 $n \times k$ 阶矩阵 V_2 的列向量分别对应于非零奇异值 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ 和零奇异值的右奇异向量。于是

$$C = UDV_1^T \quad (2.7)$$

$$CV_2 = 0 \quad (2.8)$$

由此知 V_2 的列向量 τ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 构成了矩阵 C 的正交补的一组正交归一化基, 其方向与 \dot{q} 相容, 将 \dot{q} 沿这组基的方向上投影得 k 个独立速度

$$p = V_2^T \dot{q} \quad (2.9)$$

于是方程(2.3)和方程(2.9)组成了一个封闭方程组

$$[C^T \ V_2]^T \dot{q} = [-\xi^T \ p^T]^T \quad (2.10)$$

根据拉格朗日第一类方程, 系统的动力学方程为

$$M(q, t)\ddot{q} = h(\dot{q}, q, t) + C^T(q, t)\lambda \quad (2.11)$$

其中 M 是 $n \times n$ 阶对称正定的广义质量矩阵, h 是包含系统广义外力和广义陀螺力的 n 阶列阵, λ 是由拉格朗日乘子组成的 m 阶列阵。

方程(2.11)沿与约束相容的方向上投影得

$$V_2^T M \ddot{q} = V_2^T h \quad (2.12)$$

这 k 个方程含 n 个未知量 q , 不封闭。

三、用加速度分解法求解系统的动力学方程

根据 C^T 的列向量与 V_2 的列向量相互正交和约束反力限制了系统的运动方向这一基本概念, 可将系统每个广义加速度 \ddot{q}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 分解成二个分量: 一个分量 \ddot{q}_i^r 沿着与约束相容的方向, 另一个分量 \ddot{q}_i^n 沿着与约束不相容方向, 分别用来表示系统的运动方向和约束反力的方向, 即

$$\ddot{q} = \ddot{q}^r + \ddot{q}^n \quad (3.1)$$

$$\ddot{q}^r = V_2 x, \quad \ddot{q}^n = C^T y \quad (3.2)$$

其中 x , y 分别为 k 阶和 m 阶列阵。它们的具体表达式可按以下方法求出:

将(3.1)、(3.2)、(2.7)式代入(2.4)式, 并利用矩阵 U 和 V_1 的正交性得

$$y = -(UD^2U^T)^{-1}\eta = -UD^{-2}U^T\eta \quad (3.3)$$

将(3.1)、(3.2)、(3.3)、(2.7)式代入(2.12)式, 并利用 U 的正交性得

$$\mathbf{x} = (\mathbf{V}_2^T \mathbf{M} \mathbf{V}_2)^{-1} \mathbf{V}_2^T (\mathbf{h} + \mathbf{M} \mathbf{V}_1 \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\eta}) \quad (3.4)$$

将(3.3)、(3.4)、(3.2)式代入(3.1)式得到 n 个含 n 个未知量 \mathbf{q} 的二阶常微分方程

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{K} \mathbf{h} + (\mathbf{K} \mathbf{M} - \mathbf{I}) \mathbf{E} \boldsymbol{\eta} \quad (3.5)$$

其中 \mathbf{I} 为 $n \times n$ 阶单位矩阵

$$\mathbf{K} = \mathbf{V}_2 (\mathbf{V}_2^T \mathbf{M} \mathbf{V}_2)^{-1} \mathbf{V}_2^T \quad (3.6)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{V}_1 \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}^T \quad (3.7)$$

由于 \mathbf{C} 在运动过程中是不断变化的,若在每一时间步态都对 \mathbf{C} 进行奇异值分解,显然是很费时间的,可采取这样的策略,保持 \mathbf{C} 的奇异值分解不变,直至 $[\mathbf{C}^T \mathbf{V}_2]^T$ 出现奇异为止.于是

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{V}_2^T \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.8)$$

为了便于数值积分,可引进

$$\mathbf{z} = [\mathbf{p}^T \quad \mathbf{q}^T]^T \quad (3.9)$$

则有

$$\dot{\mathbf{z}} = [(\mathbf{V}_2^T (\mathbf{K} \mathbf{h} + (\mathbf{K} \mathbf{M} - \mathbf{I}) \mathbf{E} \boldsymbol{\eta}))^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T \quad (3.10)$$

利用龙格—库塔法或预估—校正法可方便积分此式.

四、约束反力的求取和违约的修正

为了避免求解微分—代数混合方程时所遇到的数值困难,在推导方程(2.12)时将反映广义约束反力的拉格朗日乘子 λ 消去了,若问题对约束反力感兴趣,则需要重新获得 λ .

将(3.1)、(3.2)式代入(2.11)式,并由 $\ddot{\mathbf{q}}^n$ 的含义可得

$$\mathbf{M} \mathbf{C}^T \mathbf{y} = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (4.1)$$

该式两边同时左乘 \mathbf{C} ,并将(2.7)、(3.3)式代入,并利用矩阵 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{U} 的正交性得

$$\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{E}^T \mathbf{M} \mathbf{E} \boldsymbol{\eta} \quad (4.2)$$

在推导方程(3.5)时只用到加速度约束方程(2.4),为了避免坐标违约,需对约束方程(2.1)进行牛顿—拉福森迭代

$$\mathbf{C}_\varphi(\mathbf{q}_{(j)}^{(i)}, t_i) \Delta \mathbf{q}_{(j)}^{(i)} = -\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}_{(j)}^{(i)}, t_i) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{q}_{(j+1)}^{(i)} = \mathbf{q}_{(j)}^{(i)} + \Delta \mathbf{q}_{(j)}^{(i)} \quad (4.4)$$

其中 i 表示时间步态, j 表示迭代次数.

由于线性方程组(4.3)不封闭,为了能求出 $\Delta \mathbf{q}_{(j)}^{(i)}$,须对它进行如下处理:

对 \mathbf{y} , $\boldsymbol{\lambda}$ 进行如下划分

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T \quad \mathbf{y}_2^T]^T, \quad \boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_1^T \quad \boldsymbol{\lambda}_2^T]^T \quad (4.5)$$

其中 \mathbf{y}_1 , $\boldsymbol{\lambda}_1$ 对应于完整约束方程,为 α 阶列阵. \mathbf{y}_2 , $\boldsymbol{\lambda}_2$ 对应于非完整约束方程,为 β 阶列阵.由方程(4.1)所包含的物理意义得

$$\mathbf{M} \mathbf{C}_\varphi^T \mathbf{y}_1 = \mathbf{C}_\varphi^T \boldsymbol{\lambda}_1 \quad (4.6)$$

(4.6)式两边左乘 \mathbf{C}_φ 后得

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = (\mathbf{C}_\varphi \mathbf{C}_\varphi^T)^{-1} \mathbf{C}_\varphi \mathbf{M} \mathbf{C}_\varphi^T \mathbf{y}_1 \quad (4.7)$$

(4.6)式两边先左乘 \mathbf{M}^{-1} ,然后再左乘 \mathbf{C}_φ 后得

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = (\mathbf{C}_\varphi \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_\varphi^T)^{-1} \mathbf{C}_\varphi \mathbf{C}_\varphi^T \mathbf{y}_1 \quad (4.8)$$

比较(4.7)和(4.8)式得

$$\mathbf{C}_\varphi = (\mathbf{C}_\varphi \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_\varphi^T) (\mathbf{C}_\varphi \mathbf{C}_\varphi^T)^{-1} \mathbf{C}_\varphi \mathbf{M} \quad (4.9)$$

将该式代入(4.3)式后可得

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{(j)}^{(i)}, t_i) \Delta \mathbf{q}_{(j)}^{(i)} = - \mathbf{C}_\varphi^T(\mathbf{q}_{(j)}^{(i)}, t_i) \mathbf{M}_\varphi^{-1}(\mathbf{q}_{(j)}^{(i)}, t_i) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}_{(j)}^{(i)}, t_i) \quad (4.10)$$

其中

$$\mathbf{M}_\varphi = \mathbf{C}_\varphi \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_\varphi^T \quad (4.11)$$

方程(4.10)是一组封闭的线性方程组。

五、示 例

现有一粗糙水平面在惯性空间以匀加速度 \mathbf{a} 作平动，初速度为 \mathbf{v}_0 。已知一个半径为 ρ ，质量为 m 的匀质圆盘在此平面上作无滑动滚动。我们在惯性空间建立定参考正交基 $(0, \mathbf{i})$ ，并建立圆盘的Resal动参考正交基 (C, \mathbf{e}) ，取 $\mathbf{q} = [x, y, z, \theta, \psi, \varphi]^T$ ，其中 x, y, z 为圆盘质心在定参考正交基中的坐标， θ 为 \mathbf{i}_2 与 \mathbf{e}_3 的夹角， ψ 表示圆盘与平面接触点 P 的轨迹切线与 \mathbf{i}_1 正方向的夹角， φ 表示圆盘的自转角，则

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi & \sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

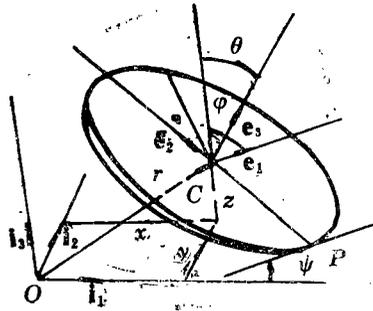


图1 圆盘在平动的水平面上纯滚动

圆盘的角速度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + \dot{\psi} \sin\theta \mathbf{e}_2 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta) \mathbf{e}_3 \\ &= (\dot{\theta} \cos\psi + \dot{\psi} \sin\theta \sin\psi) \mathbf{i}_1 + (\dot{\theta} \sin\psi - \dot{\psi} \sin\theta \cos\psi) \mathbf{i}_2 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta) \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (5.2)$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8} m \rho^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta + 2(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta)^2) \quad (5.3)$$

系统所受的约束为

$$\dot{z} - (\rho \cos\theta) \dot{\theta} = v_{z0} + a_z t \quad (5.4)$$

$$\dot{y} + (\rho \sin\theta \cos\psi) \dot{\theta} + (\rho \cos\theta \sin\psi) \dot{\psi} + (\rho \sin\psi) \dot{\varphi} = v_{y0} + a_y t \quad (5.5)$$

$$\dot{x} - (\rho \sin\theta \sin\psi) \dot{\theta} + (\rho \cos\theta \cos\psi) \dot{\psi} + (\rho \cos\psi) \dot{\varphi} = v_{x0} + a_x t \quad (5.6)$$

其中 v_{x0} , v_{y0} , v_{z0} 和 a_x , a_y , a_z 分别为 \mathbf{v}_0 和 \mathbf{a} 在 $[0, \mathbf{i}]$ 三个坐标轴上投影。方程(5.4)属非定常完整约束，而方程(5.5)、(5.6)属非定常非完整约束。

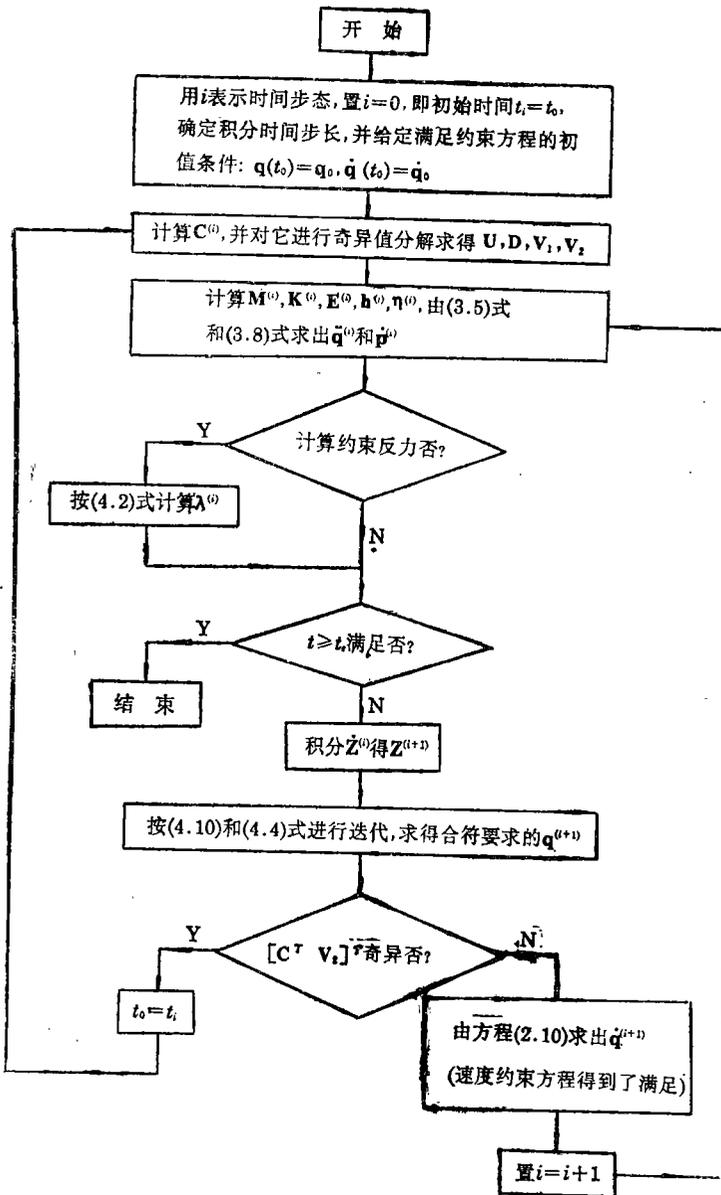


图 2

于是

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m\rho^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m\rho^2(\sin^2\theta+2\cos^2\theta)/4 & (m\rho^2\cos\theta)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (m\rho^2\cos\theta)/2 & m\rho^2/2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \\ (m\rho^2\dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta)/4 + (m\rho^2\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta)/2 \\ (m\rho^2\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\sin\theta)/2 + (m\rho^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta)/2 \\ (m\rho^2\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta)/2 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\rho\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \rho\sin\theta\cos\psi & \rho\cos\theta\sin\psi & \rho\sin\psi \\ 1 & 0 & 0 & -\rho\sin\theta\sin\psi & \rho\cos\theta\cos\psi & \rho\cos\psi \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \rho\dot{\theta}^2\sin\theta - a_z \\ \rho\dot{\theta}^2\cos\theta\cos\psi - 2\rho\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi + \rho\dot{\psi}^2\cos\theta\cos\psi + \rho\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\psi - a_y \\ -\rho\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\psi - 2\rho\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi - \rho\dot{\psi}^2\cos\theta\sin\psi - \rho\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\psi - a_x \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [f_x \ f_y \ f_z]^T \quad (5.11)$$

整个动力学分析可按如图2流程图进行 (t_0 为初始时间, t_e 为最终时间)。

六、结 论

本文给出的求解受非定常非完整约束的多体系统动力学的方法, 不仅适合于任何一种描述系统的坐标, 而且物理意义明确。由于实际需要进行奇异值分解的次数很少, 从而使本文的核心公式(3.5)和(4.2)中矩阵 \mathbf{K} 和 \mathbf{E} 的计算非常简单, 同时由于对牛顿—拉福森迭代巧妙地进行了改进, 从而避免了因坐标违约所造成的误差积累而导致动力学分析过程中的数值不稳定性, 因而具有较好的计算效益和较大的工程应用价值。

参 考 文 献

- [1] N. K. Mani, E. J. Haug and K. E. Atkinson, Application of singular value decomposition for analysis of mechanical system dynamics, *J. Mech. Trans. Auto. Des.*, 107 (1985), 82—87.
- [2] C.G. Liang and G.M. Lance, A differentiable null space method for constrained dynamic analysis, *J. Mech. Trans. Auto. Des.*, 109 (1987), 405—411.
- [3] S.S. Kim and M.J. Vanderploeg, QR decomposition for state space representation of constrained mechanical dynamic systems, *J. Mech. Trans. Auto. Des.*, 108 (1986), 183—188.
- [4] T. W. Park and E. J. Haug, A hybrid numerical integration method for ma-

- chine dynamic simulation, *J. Mech. Trans. Auto. Des.*, 108 (1986), 211—216.
- [5] W. Blajer, A projection method approach to constrained dynamic analysis, *J. Appl. Mech.*, 59 (1992), 643—649.
- [6] 水小平, 奇异值分解对非定常约束多体系统的动力学分析, 兵工学报, (2) (1994), 89—92.

A Method for Solving the Dynamics of Multibody Systems with Rheonomic and Nonholonomic Constraints

Shui Xiaoping Zhang Yongfa

(*Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P. R. China*)

Abstract

The solution of the dynamic problem of multibody systems subject to rheonomic and nonholonomic constraints is achieved by applying singular value decomposition of the constraint matrix and projections of the dynamic equations of the systems along the feasible and unfeasible directions of the constraints. Formula to solve the constraint reaction forces and a method to avoid the violation of the constraints are also given. The solution does not rely on coordinates used to describe the systems and is computationally efficient. One illustrative example is finally presented.

Key words dynamic, multibody system, nonholonomic constraint, rheonomic constraint, singular value decomposition, projection