应用数学和力学，第17卷 第6期（1996年6月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

导出非线性非完整系统Mac-Millan方程的一种途径

邱 荣[1]

（汪家诛推荐，1995年2月22日收到，1995年11月6日收到修改稿）

摘 要

只要由Jourdain微分变分原理就能导出一阶非线性非完整系统的 Mac-Millan 方程，无需引入虚位移的牛青萍定义。后一定义只是本方法的自然推论。

关键词 非线性非完整系统 Mac-Millan方程 虚位移 牛青萍定义

梅凤翔先生利用 Jourdain 原理及速度空间虚位移的牛青萍定义[1]，D′Alembert-Lagrange原理及Appell-Четаев关于虚位移的定义将 Mac-Millan 方程推广到一阶非线性非完整约束的力学系统[2]，否定了不能推广的断言。以后人们又将它推广到非惯性系[3]、高阶非完整系[4]、变质量系统[5]和用准坐标表示[6],[7]，都是沿袭前两方法之一。本文证明，只要利用Jourdain原理便可导出相同的 Mac-Millan 型运动方程，而无需另加牛青萍关于虚位移的定义或Appell-Четаев定义，而且前一定义仅是本方法的推论。

Jourdain原理为

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=0 \tag{1}$$

式中$\boldsymbol{F}_i$为作用在第 i 个质量为m_i质点上的主动力，$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$为其加速度，$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i$为速度空间的虚位移，$N$为系统的质点数目。

设力学系统的位形由n个广义坐标确定，系统中点的矢径$\boldsymbol{r}_i$可用广义坐标q_s及时间 t 表示为

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_s;\ t)\qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2}$$

力学系统受到g个独立的一阶非线性非完整约束

$$f_\beta(q_s,\ \dot{q}_s;\ t)=0\qquad (\beta=1,\ 2,\ \cdots,\ g) \tag{3}$$

当行列式

$$D(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_g)/D(\dot{q}_{\varepsilon+1},\ \dot{q}_{\varepsilon+2},\ \cdots,\ \dot{q}_n)\neq 0 \tag{4}$$

时，$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$可用$\varepsilon$个彼此独立的$\dot{q}_\sigma$表示($\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon$)即

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\dot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s,\ \dot{q}_\sigma;\ t) \tag{5}$$

1 福州大学物理系，福州 350002

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ \sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon;\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ g;\ \varepsilon=n-g)$$

首先来变换(1)式中的$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i$。由(2)式，得

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i(q_s,\ \dot{q}_s;\ t)$$

令$\tilde{\boldsymbol{r}}_i$是$\dot{\boldsymbol{r}}_i$中的$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$已用(5)式消去，即

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_i(q_s,\ \dot{q}_\sigma;\ t)=\dot{\boldsymbol{r}}_i(q_s,\ \dot{q}_\sigma,\ \dot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s,\ \dot{q}_\sigma;\ t);\ t) \tag{6}$$

(6)式实际上为一阶非线性非完整约束超曲面的参数方程，t和q_s为参数，$\dot{q}_\sigma$ 为自变量。因而自然有变分

$$\delta t=\delta q_s=0,\quad \delta\dot{q}_\sigma\neq 0 \tag{7}$$

将(6)式两端对$\dot{q}_\sigma$求偏微商，得

$$\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\sigma}=\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma} \tag{8}$$

对(6)式两端求变分，并利用(7)式，得：

$$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i=\delta\tilde{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma \tag{9}$$

其次，利用(9)式，得：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i&=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma\\&=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\tilde{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)-\sum_{i=1}^{N}m_i\tilde{\boldsymbol{r}}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\sigma}\right]\delta\dot{q}_\sigma\\&=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\sum_{i=1}^{N}m_i\tilde{\boldsymbol{r}}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\sigma}\right]\delta\dot{q}_\sigma\end{aligned} \tag{10}$$

式中$\tilde{T}$是动能T已利用(5)式消去$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$的表示式。动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

最后利用(9)及(8)式，又得：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_i&=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma\\&=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[(Q_F)_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}(Q_F)_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}\right]\delta\dot{q}_\sigma=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}(\tilde{Q}_F)\delta\dot{q}_\sigma\end{aligned} \tag{11}$$

式中

$$(Q_F)_\sigma=\sum_{\sigma=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\sigma},\quad (Q_F)_{\varepsilon+\beta}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}},\quad (\tilde{Q}_F)_\sigma=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\sigma} \tag{12}$$

将(10)和(11)式代入(1)式，并注意到$\delta\dot{q}_\sigma$彼此独立，再利用

$$\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_\sigma}=\sum_{i=1}^{N}m_i\tilde{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_\sigma}$$

便得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_\sigma}=(\tilde{Q}_F)_\sigma+\sum_{i=1}^{N}m_i\tilde{\boldsymbol{r}}_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_\sigma}\right) \tag{13}$$

(13)式即一阶非线性非完整系统的Mac-Millan方程。在推导过程没有外加虚位移的牛青萍定义或Appell-Четаев定义。

实际上，对(5)式求变分，并利用(7)式就得与牛青萍定义一致的关系式：

$$\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{s=1}^{N}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma \tag{14}$$

因而牛青萍定义仅是本方法的自然推论。高阶的关于虚位移牛青萍定义也类似。

感谢汪家诉老师的帮助。

参 考 文 献

[1] 梅凤翔, Mac-Millan 方程对非线性非完整力学系统的推广, 应用数学和力学, 5(5) (1984), 665-672.

[2] 梅凤翔, 《非完整系统力学基础》, 北京工业学院出版社 (1985), 109—111.

[3] 邱 荣, Mac-Millan方程的推广, 应用数学和力学, 11(5) (1990), 463—466.

[4] 邱 荣, 非惯性系中的高阶非完整系统的Mac-Millan方程, 福州大学学报 (自然科学版), 21(1) (1994).

[5] 邱 荣, 推广Mac-Millan方程到变质量力学系统, 《全国第五届数学物理力学高新技术学术讨论会论文集》, 西南交通大学出版社 (1994), 270—277

[6] 陈立群, 广义Mac-Millan方程对变质量非完整系的推广, 固体力学学报, 11(3) (1990), 278—283.

[7] 陈立群, 变质量高阶非完整系统广义Mac-Millan方程的准坐标形式, 兵工学报, (2) (1992), 86—91.

The Method of Derivation of Mac-Millan's Equation for the Non-Linear Non-Holonomic System

Qiu Rong

(*Department of Physics, Fuzhou University, Fuzhou* 350002, *P. R. China*)

Abstract

The Mac-Millan's equation for the non-linear non-holonomic system in one order is derived only by using principle of differential variation of Jourdain. Therefore the definition of Niu Qinping for the virtual displacement is unnecessary. This is the natural deduction of the method in this paper, and so with the non-linear and non-holonomic system in high order.

Key words non-linear and non-holonomic system, Mac-Millan's equation, definition of Niu Qinping, virtual displacement