应用数学和力学，第17卷 第5期（1996年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一般型数字最优预见伺服系统的设计

廖福成[1] 江上正[2] 土谷武士[3] 于 欣[1]

（李骊推荐，1995年3月24日收到）

摘 要

在最优预见伺服系统设计中通常只考虑阶跃型目标值函数。本文研究当目标值信号及干扰信号为多项式或为线性齐次系统的输出时最优预见伺服系统的设计问题，得到了如下三方面的结果：（一）扩大系统的能控性及能观测性条件；（二）最优预见控制器的设计方法；（三）控制规则的简便算法。

关键词：预见控制 最优伺服系统 误差系统

一、引 言

实用的许多控制系统其未来目标值及未来干扰是已知的，因而可以应用预见控制的思想设计最优预见控制系统以改善系统品质[1]~[3]在目标值信号及干扰信号为阶跃函数时，预见控制设计方面已有了许多成果[2]~[5]，建立了完整的理论体系[2]而对于其他形式的目标值信号，成果并不多见。实际上当目标值信号及干扰信号为多项式或为一个线性齐次系统的输出时，可以完全解决最优预见伺服系统的设计问题。本文在文[2]的基础上，进一步深入研究这个问题。我们将较为细致地推导出数学模型，再给出扩大误差系统的能控能观性条件，最后给出控制器的设计方法及算法。

二、数学模型及其意义

设所研究的控制系统为

$$\left.\begin{aligned} x(k+1)&=Ax(k)+Bu(k)+Ed(k) \\ y(k)&=Cx(k) \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

其中 $x(k)\in R^n, u(k)\in R^r$，$d(k)\in R^q, y(k)\in R^m$，A，B，C，E均为常数矩阵。$A:n\times n$，$B:n\times r$，$C:m\times n$，$E:n\times q$，$x(k)$，$u(k)$，$y(k)$，$d(k)$ 分别为状态向量，输入向量，干扰向量，输出向量。

1 北京科技大学数力系，北京 100083.
2 日本神奈川大学工学部，日本。
3 日本北海道大学工学部，日本。

以下用$R(k)$表示目标值信号向量，$R(k)\in R^m$. 当$R(k)$或$d(k)$不是常值向量或阶跃信号时，我们可以构造不同于通常误差系统的扩大系统，以便利用最优调节理论的有关结果．先从特例看起．这时假设$R(k)$，$d(k)$都是纯量．若$d(k)$为加速度信号，$R(k)$为斜坡信号：$d(k)=k^2$，$R(k)=k$. 这时$d(k)$及$R(k)$的差分不是常值或阶跃信号．反复取差分得

$$\Delta^3 d(k)=k^2-3(k-1)^2+3(k-2)^2-(k-3)^2=0 \tag{2.2}$$

$$\Delta^2 R(k)=k-2(k-1)+(k-2)=0 \tag{2.3}$$

或写为

$$d(k)-3d(k-1)+3d(k-2)-(k-3)=0 \tag{2.4}$$

$$R(k)-2R(k-1)+R(k-2)=0 \tag{2.5}$$

令

$$\alpha_d(z^{-1})=1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3} \tag{2.6}$$

$$\alpha_R(z^{-1})=1-2z^{-1}+z^{-2} \tag{2.7}$$

(2.4)，(2.5)式即成为

$$\alpha_d(z^{-1})d(k)=0 \tag{2.8}$$

$$\alpha_R(z^{-1})R(k)=0 \tag{2.9}$$

用$\alpha(z^{-1})$表示$\alpha_R(z^{-1})$与$\alpha_d(z^{-1})$的最小公倍式，则显然有

$$\alpha(z^{-1})=\alpha_d(z^{-1})=1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}$$

用这个$\alpha(z^{-1})$作用在系统(2.1)两边得

$$\alpha(z^{-1})x(k+1)=A\alpha(z^{-1})x(k)+B\alpha(z^{-1})u(k)+E\alpha(z^{-1})d(k) \tag{2.10}$$

再用$\alpha(z^{-1})$作用在误差

$$e(k)=R(k)-y(k)=R(k)-Cx(k)$$

两边得

$$\alpha(z^{-1})e(k)=\alpha(z^{-1})R(k)-C\alpha(z^{-1})x(k),$$

从而有

$$\begin{aligned}\alpha(z^{-1})e(k+1)&=\alpha(z^{-1})R(k+1)-C\alpha(z^{-1})x(k+1)\\&=\alpha(z^{-1})R(k+1)-CA\alpha(z^{-1})x(k)-CB\alpha(z^{-1})u(k)\\&\quad-CE\alpha(z^{-1})d(k)\end{aligned} \tag{2.11}$$

利用$\alpha(z^{-1})$的表达式，可从(2.11)式得到

$$\begin{aligned}e(k+1)=&3e(k)-3e(k-1)+e(k-2)+\alpha(z^{-1})R(k+1)\\&-CA\alpha(z^{-1})x(k)-CB\alpha(z^{-1})u(k)-CE\alpha(z^{-1})d(k)\end{aligned} \tag{2.12}$$

把$e(k)$，$e(k-1)$，$e(k-2)$，$\alpha(z^{-1})x(k)$作为新的状态变量，从(2.10)和(2.12)式可以得到一个导出系统（称为扩大系统）如下

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}e(k+1)\\e(k)\\e(k-1)\\\alpha(z^{-1})x(k+1)\end{bmatrix}=&\begin{bmatrix}3&-3&1&-CA\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(k)\\e(k-1)\\e(k-2)\\\alpha(z^{-1})x(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-CB\\0\\0\\B\end{bmatrix}\\&\times\alpha(z^{-1})u(k)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\alpha(z^{-1})R(k+1)+\begin{bmatrix}-CE\\0\\0\\E\end{bmatrix}\alpha(z^{-1})d(k)\end{aligned} \tag{2.13}$$

(2.13)式已具有普通误差系统的形式，从而可以和一般情况一样处理。

这一例子提供了解决问题的方法。一般地，设目标值信号及干扰信号为多项式或线性齐次系统的输出，即设有多项式$\alpha_R(z^{-1})$和$\alpha_d(z^{-1})$使

$$\alpha_R(z^{-1})R(k)=0 \tag{2.14}$$

$$\alpha_d(z^{-1})d(k)=0 \tag{2.15}$$

用$\alpha(z^{-1})$表示$\alpha_R(z^{-1})$与$\alpha_d(z^{-1})$的最小公倍式并设

$$\alpha(z^{-1})=1+\alpha_L z^{-1}+\alpha_{L-1}z^{-2}+\cdots+\alpha_1 z^{-L} \tag{2.16}$$

则(2.10)式仍然成立即有

$$\alpha(z^{-1})x(k+1)=A\alpha(z^{-1})x(k)+B\alpha(z^{-1})u(k)+E\alpha(z^{-1})d(k)$$

与(2.12)式的推导过程同样进行可得

$$\begin{aligned} e(k+1)=&-\alpha_L e(k)-\alpha_{L-1}e(k-1)-\cdots-\alpha_L e(k-L+1)\\ &+\alpha(z^{-1})R(k+1)-CA\alpha(z^{-1})x(k)-CB\alpha(z^{-1})u(k)\\ &-CE\alpha(z^{-1})d(k) \end{aligned} \tag{2.17}$$

于是得到扩大系统如下：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e(k+1)\\ e(k)\\ \vdots\\ e(k-L+2)\\ \alpha(z^{-1})x(k+1) \end{bmatrix} =& \begin{bmatrix} -\alpha_L I_m & -\alpha_{L-1}I_m & \cdots & \cdots & -\alpha_1 I_m & -CA\\ I_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\\ 0 & I_m & \cdots & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & I_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A \end{bmatrix}\\ &\times \begin{bmatrix} e(k)\\ e(k-1)\\ \vdots\\ e(k-L+1)\\ \alpha(z^{-1})x(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -CB\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ B \end{bmatrix}\alpha(z^{-1})u(k)+ \begin{bmatrix} I_m\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}\\ &\times\alpha(z^{-1})R(k+1)+ \begin{bmatrix} -CE\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ E \end{bmatrix}\alpha(z^{-1})d(k) \end{aligned} \tag{2.18}$$

或写为

$$\begin{aligned} X_G(k+1)=&\Phi_G X_G(k)+G_G\alpha(z^{-1})u(k)\\ &+G_{GR}\alpha(z^{-1})R(k+1)+G_{Gd}\alpha(z^{-1})d(k) \end{aligned} \tag{2.19}$$

(2.19)式即是所要求的扩大系统的最终形式。其中的系统矩阵Φ_G，G_{GR}及G_{Gd}的意义可以从(2.18)式与(2.19)式的比较而知道。

现在设(2.14)、(2.15)式在个别点处不成立。这样，(2.19)式的最后两项在个别点处不为零。除了这有限个点外，(2.19)式成为

$$X_G(k+1)=\Phi_G X_G(k)+G_G\alpha(z^{-1})u(k) \tag{2.20}$$

把(2.20)式记为

$$X_G(k+1)=\Phi_G X_G(k)+G_G v(k) \tag{2.21}$$

我们的设计将从(2.21)式出发，下面首先研究方程(2.21)连同观测方程

$$e(k)=C_G X_G(k) \tag{2.22}$$

所成系统的能控能观性．其中

$$C_G=[I_m \ \ 0 \ \cdots \ 0]$$

三、扩大系统的能控能观性条件

系统

$$\left.\begin{aligned} X_G(k+1)&=\Phi_G X_G(k)+G_G v(k) \\ e(k)&=C_G X_G(k) \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

的各系统矩阵及变量的维数为

$X_G(k)$:$(Lm+n)$维，$v(k)$:r维，$e(k)$:m维

Φ_G::$(Lm+n)\times(Lm+n)$，G_G:$n\times r$，C_G:$m\times(Lm+n)$

我们采用如下的 PBH 秩捡验法[7]研究系统(3.1)的能控性及能观性．

PBH 秩捡验法

1．系统(3.1)能控的充分必要条件是对所有的z，矩阵

$$U_c=[\Phi_G-zI \quad G_G]$$

满秩．即

$$\mathrm{rank}U_c=Lm+n$$

2．系统(3.1)能观测的充分必要条件是对所有的z，矩阵

$$U_0=\begin{bmatrix}\Phi_G-zI \\ G_G\end{bmatrix}$$

满秩．即

$$\mathrm{rank}U_0=Lm+n$$

下面首先计算U_c．注意到(2.18)式中的Φ_G的结构便有

$$U_c=[\Phi_G-zI \quad G_G]$$

$$=\begin{bmatrix}
(-\alpha_L-z)I_m & -\alpha_{L-1}I_m & \cdots & \cdots & \cdots & -\alpha_2 I_m & -\alpha_1 I_m & -CA & -CB \\
I_m & -zI_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & -zI_m & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & I_m & -zI_m & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & A-zI_m & B
\end{bmatrix}$$

把U_c的第2行左乘以$(z+\alpha_L)I_m$加到第1行上，把第3行左乘以$(z^2+\alpha_L z+\alpha_{L-1})I_m$加到第1行上，…，把第$L$行左乘以$(z^{L-1}+\alpha_L z^{L-2}+\cdots+\alpha_2)I_m$加到第1行上，第1行变为

$$[0 \ \ 0 \ \cdots \ 0 \ \ -(z^L+\alpha_L z^{L-1}+\cdots+\alpha_1)I_m \ \ -CA \ \ -CB]$$

又由于U_c的第2行到第L行所构成的子矩阵满秩，其秩为$(L-1)_m$．所以

$$\mathrm{rank}U_c=(L-1)m+\mathrm{rank}\begin{bmatrix} -(z^L+\alpha_L z^{L-1}+\cdots+\alpha_1)I_m & -CA & -CB \\ 0 & A-zI_n & B \end{bmatrix}$$

再应用文[1]，[2]同样的方法得到

定理1 若系统(2.1)能控且多项式 $z^L\alpha(z^{-1})$的零点不是系统(2.1)的不变零点，则扩大系统(3.1)是能控的。

其次计算U_0如下

$$U_0=\begin{bmatrix} \Phi_G-zI \\ C_G \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-\alpha_L-z)I_m & -\alpha_{L-1}I_m\cdots\cdots & -\alpha_2 I_m & -\alpha_1 I_m & -CA \\ I_m & -zI_m\ 0\ \cdots\ \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0\ \ddots & \ddots\ \ddots\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots\ \ddots\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots\ \ddots\ \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -zI_m & 0 & 0 \\ 0 & \cdots\ \cdots\ \cdots\ 0 & I_m & -zI_m & 0 \\ 0 & \cdots\ \cdots\ \cdots\ 0 & 0 & 0 & A-zI_n \\ I_m & 0\ \cdots\ \cdots\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

分两种情况考虑。

1. $z=0$时。

这时U_0的第2行与最后一行相同，所以

$$\mathrm{rank}U_0=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} * & -\alpha_1 I_m & -CA \\ I_{(L-1)m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & -\alpha_1 I_m & 0 \\ I_{(L-1)m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

因为$\alpha_1\neq 0$，故

$$\mathrm{rank}U_0=Lm+\mathrm{rank}A=Lm+\mathrm{rank}[A-zI_n]_{z=0}$$

所以，若$z=0$不是系统(2.1)的极点即若

$$\det[A-zI_n]_{z=0}=\det A\neq 0,$$

则

$$\mathrm{rank}U_0=Lm+n\ (\text{满秩})$$

2. $z\neq 0$时。

这时由于U_0中以$-zI_m,-zI_m,\cdots,-zI_m$为对角线的子方阵满秩，其秩为$(L-1)m$,所以

$$\mathrm{rank}U_0=(L-1)m+\mathrm{rank}\begin{bmatrix} (-\alpha_L-z)I_m & -CA \\ 0 & A-zI_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix}$$

$$=(L-1)m+\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & CA \\ 0 & A-zI_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix}=Lm+\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-zI_n \\ C \end{bmatrix}$$

所以，当$z\neq 0$时，若

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-zI_n \\ C \end{bmatrix}=n,$$

即若系统(2.1)能观测，则

$$\operatorname{rank}U_0=Lm+n.$$

综上所述知下面的定理2成立。

定理2 若系统(2.1)能观测且 $\det A\neq 0$，则扩大系统(3.1)是能观测的。

关于不变零点的概念可参看文献[8]。

四、数字最优预见伺服系统

假定$\alpha(z^{-1})R(k)$及$\alpha(z^{-1})d(k)$各自独立地变化，$\alpha(z^{-1})R(k)$和$\alpha(z^{-1})d(k)$都只在一点处不取零值，在其余时刻都为零。它们不取零值的时刻可以不同。当

$$\alpha(z^{-1})=1-z^{-1}$$

即$\alpha(z^{-1})$为普通差分算子时，系统(2.18)就变成了文献[2]所讨论的普通误差系统。

再假定从每个时刻起未来M_R步$\alpha(z^{-1})R(k)$的值和未来M_d步$\alpha(z^{-1})d(k)$的值为已知，即$\alpha(z^{-1})R(k)$和$\alpha(z^{-1})d(k)$的预见步数分别为M_R和M_d。性能指标函数取为

$$J=\sum_{k=-M+1}^{\infty}[X_G^T(k)Q_GX_G(k)+[\alpha(z^{-1})u(k)]^TH[\alpha(z^{-1})u(k)]] \tag{4.1}$$

这里Q_G：半正定矩阵，H：正定矩阵，$M=\max(M_R,\ M_d)$。

采用文[2]中推导$\alpha(z^{-1})=1-z^{-1}$情形时的方法，可求得使(4.1)式所定义的性能指标函数取最小值的扩大系统(2.19)的带有预见前馈补偿的最优输入为

$$\alpha(z^{-1})u(k)=F_GX_G(k)+\sum_{j=1}^{M_R}F_R(j)\alpha(z^{-1})R(k+j)$$

$$+\sum_{j=1}^{M_d}F_d(j)\alpha(z^{-1})d(k+j) \tag{4.2}$$

其中

$$F_G=-[H+G_G^TP_GG_G]^{-1}G_G^TP_G\Phi_G \tag{4.3}$$

$$F_R(j)=-[H+G_G^TP_GG_G]^{-1}G_G^T(\xi_G^T)^{j-1}P_GG_{GR}\qquad(j=1,2,\cdots,M_R) \tag{4.4}$$

$$F_d(j)=-[H+G_G^TP_GG_G]^{-1}G_G^T(\xi_G^T)^{j}P_GG_{Gd}\qquad(j=0,1,\cdots,M_d) \tag{4.5}$$

$$(\xi_G=\Phi_G+G_GF_G)$$

P_G为下面的 Riccati 方程的解。

$$P_G=Q_G+\Phi_G^TP_G\Phi_G-\Phi_G^TP_GG_G[H+G_G^TP_GG_G]^{-1}G_G^TP_G\Phi_G \tag{4.6}$$

具体推导过程略去。

五、控制系统的结构

本节详细讨论由(4.2)～(4.6)式所确定的闭环系统的结构。首先证明下面的引理。

引理1 对任何向量$v(k)\in R^r$有

$$\alpha(z^{-1})\begin{bmatrix} v(k) \\ v(k-1) \\ \vdots \\ v(k-L) \\ \vdots \\ v(L+1) \\ v(L) \end{bmatrix}=\varepsilon\begin{bmatrix} v(k) \\ v(k-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ v(L) \end{bmatrix}+\eta\begin{bmatrix} v(L-1) \\ v(L-2) \\ \vdots \\ \vdots \\ v(0) \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

其中

$$\varepsilon=\begin{bmatrix} I_r & \alpha_L I_r & \cdots & \alpha_1 I_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_r & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \alpha_1 I_r \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \alpha_L I_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & I_r \end{bmatrix},\quad \eta=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_1 I_r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{L-1} I_r & \cdots & \cdots & \alpha_1 I_r & 0 \\ \alpha_L I_r & \cdots & \cdots & \alpha_2 I_r & \alpha_1 I_r \end{bmatrix}$$

证明 由$\alpha(z^{-1})$之定义可得

$$\left.\begin{aligned} &\alpha(z^{-1})v(k)=v(k)+\alpha_L v(k-1)+\alpha_{L-1}v(k-2)+\cdots+\alpha_1 v(k-L) \\ &\alpha(z^{-1})v(k-1)=v(k-1)+\alpha_L v(k-2)+\alpha_{L-1}v(k-3)+\cdots \\ &\qquad\qquad +\alpha_1 v(k-L-1) \\ &\qquad \vdots \\ &\alpha(z^{-1})v(2L)=v(2L)+\alpha_L v(2L-1)+\alpha_{L-1}v(2L-2)+\cdots+\alpha_1 v(L) \\ &\qquad \vdots \\ &\alpha(z^{-1})v(L)=v(L)+\alpha_L v(L-1)+\alpha_{L-1}v(L-2)+\cdots+\alpha_1 v(0) \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

把(5.2)式写成向量形式就得到(5.1)式。证毕。

定义一组变量$w_0(k)$，…，$w_L(k)$使得

$$\left.\begin{aligned} &e(k)=\alpha(z^{-1})w_0(k) \\ &e(k-1)=\alpha(z^{-1})w_1(k) \\ &\qquad \vdots \\ &e(k-L)=\alpha(z^{-1})w_L(k) \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

则有关系式

$$\left.\begin{aligned} &w_1(k+1)=w_0(k) \\ &w_2(k+1)=w_1(k) \\ &\qquad \vdots \\ &w_{L-1}(k+1)=w_{L-2}(k) \\ &w_0(k)=e(k)-\alpha_L w_1(k)-\alpha_{L-1}w_2(k)-\cdots-\alpha_1 w_L(k) \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

事实上，(5.4)式的前$L-1$个等式从定义式(5.3)即可得到，最后一个等式可以证明如下。

从$\alpha(z^{-1})$的定义知

$$\alpha(z^{-1})w_0(k)=w_0(k)+\alpha_L w_0(k-1)+\cdots+\alpha_1 w_0(k-L)$$
$$=w_0(k)+\alpha_L w_1(k)+\cdots+\alpha_1 w_L(k)$$

因为左边等于$e(k)$，代换后移项即得(5.4)的最后一式。

为了从(4.2)式求解$u(k)$，令

$$F_G=[f_0\quad f_1\ \cdots\ f_{L-1}\quad f_x]$$

于是得

$$\alpha(z^{-1})u(k)=\sum_{i=0}^{L-1}f_i e(k-i)+f_x\alpha(z^{-1})x(k)+\sum_{j=1}^{M_R}F_R(j)\alpha(z^{-1})R(k+j)$$
$$+\sum_{j=0}^{M_d}F_d(j)\alpha(z^{-1})d(k+j) \tag{5.5}$$

利用(5.3)式定义的一组向量，得到

$$\alpha(z^{-1})u(k)=\sum_{i=0}^{L-1}f_i w_i(k)+f_x\alpha(z^{-1})x(k)+\sum_{j=1}^{M_R}F_R(j)\alpha(z^{-1})R(k+j)$$
$$+\sum_{j=0}^{M_d}F_d(j)\alpha(z^{-1})d(k+j) \tag{5.6}$$

注意到$u(k)$，$\sum_{i=0}^{L-1}f_i w_i(k)$，$f_x x(k)$，$\sum_{j=1}^{M_R}F_R(j)R(k+j)$，$\sum_{j=0}^{M_d}F_d(j)d(k+j)$都是$r$维向量，所以都可以应用引理1.应用后得到5组等式，再一起代入(5.6)式可得到

$$\varepsilon\begin{bmatrix}u(k)\\ \vdots\\ u(L)\end{bmatrix}+\eta\begin{bmatrix}u(L-1)\\ \vdots\\ u(0)\end{bmatrix}=\varepsilon\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{L-1}f_i w_i(k)\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^{L-1}f_i w_i(L)\end{bmatrix}+\eta\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{L-1}f_i w_i(L-1)\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^{L-1}f_i w_i(0)\end{bmatrix}$$

$$+\varepsilon\begin{bmatrix}f_x x(k)\\ \vdots\\ f_x x(L)\end{bmatrix}+\eta\begin{bmatrix}f_x x(L-1)\\ \vdots\\ f_x x(0)\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{M_R}F_R(j)R(k+j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{M_R}F_R(j)R(L+j)\end{bmatrix}$$

$$+\eta\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{M_R}F_R(j)R(L+j-1)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{M_R}F_R(j)R(j)\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}\sum_{j=0}^{M_d}F_d(j)d(k+j)\\ \vdots\\ \sum_{j=0}^{M_d}F_d(j)d(L+j)\end{bmatrix}$$

$$+\eta\begin{bmatrix}\sum_{j=0}^{M_d}F_d(j)d(L+j-1)\\ \vdots\\ \sum_{j=0}^{M_d}F_d(j)d(j)\end{bmatrix} \tag{5.7}$$

把(5.7)式两边同乘以ε^{-1}，适当移项，再左乘以$[I_r\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0]$即可得到$u(k)$：

$$u(k)=\sum_{i=0}^{L-1} f_i w_i(k)+f_x x(k)+\sum_{j=1}^{M_R} F_R(j)R(k+j)+\sum_{j=0}^{M_d}F_d(j)d(k+j)$$

$$+[I_r\ 0\ \cdots\ 0]\ \varepsilon^{-1}\eta\times\left\{\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{M_R}F_R(j)R(L+j-1)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{M_R}F_R(j)R(j)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}f_x x(L-1)\\ \vdots\\ f_x x(0)\end{bmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{L-1}f_i w_i(L-1)\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^{L-1}f_i w_i(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sum_{j=0}^{M_d}F_d(j)d(L+j-1)\\ \vdots\\ \sum_{j=0}^{M_d}F_d(j)d(j)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}u(L-1)\\ \vdots\\ u(0)\end{bmatrix}\right\} \tag{5.8}$$

再令

$$[f_{i,L-1}\ f_{i,L-2}\ \cdots\ f_{i,0}]=[I_r\ 0\ \cdots\ 0]\varepsilon^{-1}\eta\begin{bmatrix}f_i & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & f_i\end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$$[f_{x,L-1}\ f_{x,L-2}\ \cdots\ f_{x,0}]=[I_r\ 0\ \cdots\ 0]\varepsilon^{-1}\eta\begin{bmatrix}f_x & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & f_x\end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$$[F_{R,L-1}(j)\ F_{R,L-2}(j)\ \cdots\ F_{R,0}(j)]=[I_r\ 0\ \cdots\ 0]\varepsilon^{-1}\eta\begin{bmatrix}F_R(j) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & F_R(j)\end{bmatrix} \tag{5.11}$$

$$[F_{d,L-1}(j)\ F_{d,L-2}(j)\ \cdots\ F_{d,0}(j)]=[I_r\ 0\ \cdots\ 0]\varepsilon^{-1}\eta\begin{bmatrix}F_d(j) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & F_d(j)\end{bmatrix} \tag{5.12}$$

$$[f_{u,L-1}\ f_{u,L-2}\ \cdots\ f_{u,0}]=[I_r\ 0\ \cdots\ 0]\varepsilon^{-1}\eta \tag{5.13}$$

利用(5.9)～(5.13)式，(5.8)式可进一步写成

$$u(k)=\sum_{i=0}^{L-1} f_i w_i(k)+f_x x(k)+\sum_{j=1}^{M_R} F_R(j)R(k+j)$$

$$+\sum_{j=0}^{M_d} F_d(j)d(k+j)+\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-1} f_{i,j}w_i(j)$$

$$+\sum_{j=0}^{L-1} f_{x,j}x(j)+\sum_{j=1}^{M_R}\sum_{i=0}^{L-1} F_{R,j}(j)R(i+j)$$

$$+\sum_{i=0}^{L-1} f_{u,i}u(i)+\sum_{j=0}^{M_d}\sum_{i=0}^{L-1} F_{d,j}(j)d(i+j) \tag{5.14}$$

(5.14)式就是所得到的最优控制．其中的$u(0)$，$u(1)$，…，$u(L-1)$可作为未知参数处理．必要时也可以考虑对这些参数的初始值补偿．控制系统的结构如图1所示．

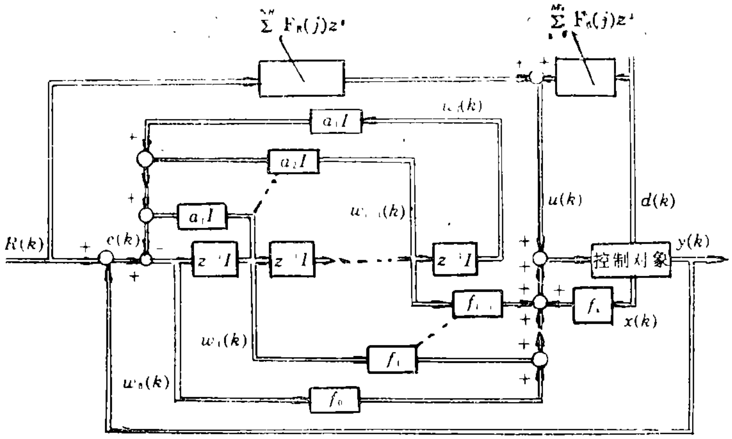

图1　一般型数字最优预见伺服系统结构

六、进 一 步 的 讨 论

实际应用上节所设计的控制系统时，需要计算控制规则（5.14）中的各个系统矩阵．从(5.9)到(5.13)式可以看出，实际上关键是计算$\varepsilon^{-1}\eta$．当ε^{-1}阶数较高时，一般的先求ε^{-1}再求$\varepsilon^{-1}\eta$的算法要占用较长时间，而且还可能发生内存不够的问题．本节给出求$\varepsilon^{-1}\eta$的算法．

1　ε，η的结构

观查ε与η，可以看出，若令

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix} I_r & a_L I_r & \cdots & \cdots & a_2 I_r \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_L I_r \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_r \end{bmatrix},\quad \varepsilon_2=\begin{bmatrix} a_1 I_r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 I_r & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_L I_r & \cdots & \cdots & a_2 I_r & a_1 I_r \end{bmatrix}$$

则有

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ 0 & \varepsilon_1\end{bmatrix}\qquad \eta=\begin{bmatrix}0\\ \varepsilon_2\end{bmatrix}$$

易知

$$\varepsilon^{-1}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1^{-1} & -\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\varepsilon_1^{-1}\\ 0 & \varepsilon_1^{-1}\end{bmatrix}\tag{6.1}$$

所以

$$\varepsilon^{-1}\eta=\begin{bmatrix}-[\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2]^2\\ \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\end{bmatrix}\tag{6.2}$$

我们只须计算$V=[I\quad 0\quad \cdots\quad 0]\varepsilon^{-1}\eta$。由(6.2)式知

$$V=-[\overbrace{I_r\quad 0\quad \cdots\quad 0}^{L\text{个分量}}][\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2]^2\tag{6.3}$$

因此，只须计算(6.3)式。

2 ε_1^{-1}的结构

定理3 对于上段定义的ε_1，其逆为

$$\varepsilon_1^{-1}=\begin{bmatrix}I_r & -\alpha_L I_r & 0 & \cdots & 0\\ 0 & I_r & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_r\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}I_r & 0 & -\alpha_{L-1}I_r & 0 & \cdots & 0\\ 0 & I_r & -\alpha_L I_r & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_r\end{bmatrix}$$

$$\times\cdots\times\begin{bmatrix}I_r & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2 I_r\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & I_r & -\alpha_L I_r\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_r\end{bmatrix}\tag{6.4}$$

即ε_1^{-1}可以写成$L-1$个矩阵的积。从左到右第i个因子是把单位矩阵

$$\operatorname{diag}(\overbrace{I_r\ \cdots\ I_r}^{L\text{个}})$$

的第$i+1$个I_r所在的列换为

$$[\alpha_{L-i+1}I_r\quad \alpha_{L-i+2}I_r\quad \cdots\quad \alpha_L I_r\quad I_r\quad 0\quad \cdots\quad 0]^T$$

所得到的矩阵。

证明 记(6.4)式为

$$\varepsilon_1^{-1}=Q_2Q_3\cdots Q_L$$

把ε_1的第L行（实际上是一个子块）的$-\alpha_L$倍加到第$(L-1)$行上，…，第L行的$-\alpha_2$倍加到第1行上，则ε_1的最后一列除I_r外全变成了零。按代数学的有关结论，这等于用Q_L左乘ε_1。这时ε_1已变成了

$$\begin{bmatrix} I_r & \alpha_L I_r & \cdots & \cdots & \alpha_3 I_r & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \alpha_L I_r & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_r & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & I_r \end{bmatrix}$$

这一矩阵左上角的子块仍具有ε_1的形式．同样做下去可把第$L-1$列变为除I_r外全为零．这相当于对以上矩阵左乘Q_{L-1}，依此类推即可把ϵ_1变为I．由变换过程有

$$Q_2Q_3\cdots Q_L\varepsilon_1=I$$

从而

$$\varepsilon_1^{-1}=Q_2Q_3\cdots Q_L$$

证毕．

由于我们要计算的是(6.3)式即

$$-[I_r\ 0\ \cdots\ 0]Q_2Q_3\cdots Q_L\varepsilon_2Q_2Q_3\cdots Q_L\varepsilon_2 \tag{6.5}$$

(6.5)式中的Q_2，Q_3，$\cdots$，Q_L很有规律，所以利用(6.5)式计算便于编程，还可以大量节省内存．算法如下：

```
for i=1,2,…, L
    set ALF(i)=α_i
end
for k=1,2
for i=2,3,…,L
    for j=1,2,…,i−1
            Q(i)←Q(i)−ALF(L−i+1+j)Q(j)
      end
end
for i=1,2,…,L
            set S(i)=0
            for j=i,…,L
            S(i)←S(i)+Q(j)ALF(j−i+1)
    end
end
for i=1,2,…,L
    Q(i)←S(i)
    end
end
V=−[Q(1)I_r, Q(2)I_r,…,Q(L)I_r]
```

七、结　　语

本文给出了当未来目标值信号及未来干扰信号为多项式或为一线性齐次系统的输出时最优预见伺服系统的设计方法．和通常情况一样，我们的方法仍是结构一个扩大系统，再对其应用最优控制理论．文中给出了扩大系统能控能观测的代数条件并给出了所设计的控制器的一种简捷算法．

参 考 文 献

[1] T. katayama, et al, Design of an optimal controller for a discrete-time system subject to previewable demand, *Int. J. Control.*, 41 (3) (1985), 677—699.

[2] 土谷武士、江上正, 《デイタル予見制御》, 东京: 産業図書, (1992), 中译本: 《最新自动控制技术——数字预见控制》, 廖福成译, 北京科学技术出版社 (1994).

[3] 土谷武士, 预見制御の理论, 日本机械学会論文誌, 93(856) (1990), 92—197.

[4] 河村仁、土谷武士, 预見制御の性質について, 計測自動制御学会論文集, 24 (8) (1988), 886—888.

[5] 河村仁, 土谷武士, 最適預見制御系の漸近特性, 計測自動制御学会论文集, 25(10) (1989), 1083—1090.

[6] 愛田一雄, 多項式目標入力に追従する準最適デイタル制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, 20(8)(1984), 677—684.

[7] 凯拉斯著, 《线性系统》李清泉等译, 科学出版社 (1985).

[8] 古田勝久等, 《メカニカルウステム制御》, オーム社, 東京 (1984).

On General Type of Digital Optimal Preview Servo System

Liao Fucheng

(*Department of Mathematics and Mechanics, University of Science and Technology Beijing, Beijng* 100083, *P. R. China*)

Egami Tadashi

(*Faculty of Engineering, Kanagawa University, Japan*)

Tsuchiya Takeshi

(*Faculty of Engineering, Hokkaido University, Japan*)

Yu Xin

(*Department of Mathematics and Mechanics, University of Science and Technology Beijing, Beijing* 100083, *P. R. China*)

Abstract

Usually, only step future desired signals are utilized in the field of preview servo systems design. In this paper, we discuss the design problem of optimal preview servo system while the future desired signal and future disturbance signal are polynomials or outputs of linear free systems. (1) Conditions of controllability and observability for enlarged system, (2) A design method of optimal preview servo controllers, (3) A simple and convenient algorithm of control law are obtained.

Key words preview control, optimal servo system, error system