

# 有限厚平板局部表面非均布 局部加热的热传导解\*

王明锐<sup>1</sup> 靳 辉<sup>1</sup>

(张石生推荐, 1994年2月22日收到, 1995年3月7日收到修改稿)

## 摘 要

在工程技术上常遇到如下问题: 一个有一定厚度的平板, 在其一个表面的某个局部区域内加热, 热流沿边界非均匀分布, 且随时间变化。这类问题在已有的热传导专著中无现成的解析解可供使用。本文给出了此问题的解析解, 其计算结果与实验对照, 符合得很好。

**关键词** 平板 热传导 解析解

## 一、前 言

当前, 国内外用来计算固体的动态大变形过程的程序, 如HEMP, DYNA等, 都没有计算热传导的功能。而在军用和民用的许多工程技术问题中, 固体的形变运动往往是由于材料局部受热出现了热应力引起的。因此, 物体表面局部受热后, 材料内部热传导过程的计算, 成为人们十分关心的问题。在诸多有关热传导的专著中, 虽然给出了许多情形下的解析解, 但对于物体表面局部受热, 热流 $Q$ 在加热区不均匀分布且随时间变化这种复杂的情形, 却没有现成的解。这类问题的一个重要特例是一块有限厚平板, 在其一个表面上的某个局部区域内, 给以沿板面分布不均匀且随时间变化的持续加热。此例之所以重要, 是因为许多表面为曲面的物体, 当加热区很小时也可近似作为有限厚平板受热问题处理。本文对此特例的热传导问题作了研究, 给出了无穷级数的解, 其计算结果与实验对照得很好。

由于加热区集中在物体表面上的一个小区域内, 故级数的项数要求很多。而级数的系数需作数值积分, 计算量较大, 这就需借助计算机计算。但这比用差分求解的计算量要小得多, 且方便得多。因为此解可直接求解任意时刻的温度分布, 而不需从初始时刻逐步计算。

## 二、方程和定解条件

为简便起见, 认为平板是圆形的, 边界在 $r=r^*$ 处, 加热区 $\bar{D}$ :  $r \leq r_0$  ( $r_0 \ll r^*$ ), 板厚为 $z_0$ , 如图1所示。在 $D$ 内给定热流 $Q=Q(r, t)$ 是空间与时间的函数。板的其余表面认为是绝热的。

\* 本课题为国家863强激光技术资助项目。

<sup>1</sup> 北京应用物理与计算数学研究所(北京8009信箱), 北京 100088。

这里不考虑固体受热后的熔化和气化, 认为材料内部的温度总是在熔化温度以下. 在此条件下, 固体的比热  $C_V$  和导热率  $\kappa$  可以认为不随温度改变, 加之固体在形变过程中密度变化可以忽略不计, 因而  $C_V$  和  $\kappa$  也与密度无关, 于是导热率  $\alpha = \sqrt{\kappa/\rho_0 C_V}$  是常量, 其中  $\rho_0$  是材料的初始密度. 不失求解的一般性, 把界面热流取成如下形式:

$$Q(r, t) = Q_0 \exp\left\{-\left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2\alpha} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\beta}\right]\right\}$$

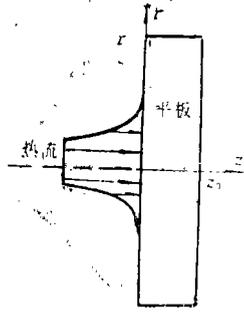


图 1

这来源于激光器产生的激光照射在金属平板表面时所形成的界面热流形式, 即: 时、空超高斯分布形式.  $Q_0$  是热流峰值,  $t_0$  是激光脉冲时间宽度,  $r_0$  是光斑半径,  $r$  是平板上某点到光斑中心的距离,  $t$  是热传导过程所经历的时间,  $\alpha, \beta$  是超高斯指数, 反应激光束的密集程度. 例如  $\alpha, \beta$  愈大, 激光散失在光斑区以外的份额愈少. 以后取  $\alpha, \beta$  大于 1.

用  $\Omega$  表示区域  $\Omega = \{(t, r, z) | 0 \leq t < +\infty, 0 \leq z \leq z_0, 0 \leq r \leq r^*\}$ , 引入算符

$$\hat{M} = \frac{\partial}{\partial t} - \alpha^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right], \text{ 于是在 } \Omega \text{ 内得到如下热传导方程 (用 } T \text{ 表示温度):}$$

$$\hat{M}T = 0 \quad (2.1)$$

边界条件:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = Q_0 (1-\eta) \exp\left\{-\left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2\alpha} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\beta}\right]\right\} \quad (2.2)$$

其中  $\eta$  板面对激光的反射率.

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r^*} = 0 \quad (2.5)$$

时间条件:

$$T|_{t=0} = T_0 \quad (2.6)$$

$$T|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \text{有限} \quad (2.7)$$

### 三、求 解

第一步:

$$\text{令 } T(r, z, t) = U(r, z, t) + \varphi(r, z, t) + T_0 \quad (3.1)$$

其中

$$\varphi(r, z, t) = \frac{z_0 Q_0}{2\kappa} (1-\eta) \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^2 \exp\left\{-\left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2\alpha} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\beta}\right]\right\} \quad (3.2)$$

满足

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=r^*} \leq 0 \quad \left( \frac{r_0}{r^*} \ll 1 \right) \quad (3.3)$$

记  $f(r, z, t) = -\dot{M}\varphi(r, z, t)$  (3.4)

于是问题变为求解如下关于  $U$  的定解问题

$$\dot{M}U = f(r, z, t) \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (3.5)$$

边界条件:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=z_0} = 0 \quad (\text{沿 } z \text{ 方向}) \quad (3.6 \sim 3.7)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=r^*} = 0 \quad (\text{沿 } r \text{ 方向}) \quad (3.8 \sim 3.9)$$

时间条件:

$$U|_{t=0} = -\varphi(r, z, 0); \quad U|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \text{有限} \quad (3.10 \sim 3.11)$$

第二步:

根据线性方程解的可迭加性质, 将  $U$  分为  $V$  和  $W$  之和:

$$U(r, z, t) = V(r, z, t) + W(r, z, t) \quad (3.12)$$

其中  $V$  是如下定解问题的解

$$\dot{M}V = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (3.13)$$

边界条件:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=z_0} = 0 \quad (\text{沿 } z \text{ 方向}) \quad (3.14 \sim 3.15)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=r^*} = 0 \quad (\text{沿 } r \text{ 方向}) \quad (3.16 \sim 3.17)$$

时间条件:

$$V|_{t=0} = -\varphi(r, z, 0); \quad V|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \text{有限} \quad (3.18 \sim 3.19)$$

$W$  是如下问题的解

$$\dot{M}W = f(r, z, t) \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (3.20)$$

边界条件:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=z_0} = 0 \quad (\text{沿 } z \text{ 方向}) \quad (3.21 \sim 3.22)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=r^*} = 0 \quad (\text{沿 } r \text{ 方向}) \quad (3.23 \sim 3.24)$$

时间条件:

$$W|_{t=0} = 0, \quad W|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \text{有限} \quad (3.25 \sim 3.26)$$

显然由 (3.12) 确定的  $U$  满足定解问题 (3.5) ~ (3.11)

第三步: 求解  $V$

$$\text{令 } V(r, z, t) = V_1(t)V_2(r)V_3(z) \quad (3.27)$$

将此代入方程 (3.12), 得

$$\frac{1}{V_1} \frac{dV_1}{dt} - \alpha^2 \left[ \frac{1}{V_2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_2}{dr} \right) + \frac{1}{V_3} \frac{d^2 V_3}{dz^2} \right] = 0 \quad (3.28)$$

设

$$\frac{1}{V_1} \frac{dV_1}{dt} = \lambda, \quad \frac{1}{V_2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_2}{dr} \right) = -\mu^2, \quad \frac{1}{V_3} \frac{d^2 V_3}{dz^2} = -\omega^2 \quad (3.29a, b, c)$$

将此三方程代入(3.28)中, 得到关系式:

$$\lambda = a^2(-\mu^2 - \omega^2) \quad (3.30)$$

(3.29)的解为

$$V_1 = A_1 \exp(\lambda t), \quad V_2 = A_2 J_0(\mu r), \quad V_3 = A_3 \cos \omega z + A_4 \sin \omega z$$

由定解条件(3.14)~(3.19), 有

$$V(r, z, t) = \sum_{kl, l=0}^{\infty} v_{kl} J_0(\mu_k r) \cos(\omega_l z) \exp(\lambda_{kl} t) \quad (3.31)$$

其中

$$\omega_l = \frac{l\pi}{z_0} \quad (l=0, 1, 2, \dots); \quad \mu_k = \frac{x_k}{r^*} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$x_k$  是一阶Bessel函数  $J_1(x) = 0$  的第  $k$  个根, 将  $\mu_k$  和  $\omega_l$  代入(3.30)求得  $\lambda_{kl} \cdot v_{kl} (k, l=0, 1, 2, \dots)$  是待定系数, 将  $\varphi(r, z, 0)$  展开成如下展式

$$-\varphi(r, z, 0) = \sum_{k, l=0}^{\infty} \varphi_{kl} J_0(\mu_k r) \cos(\omega_l z) \quad (3.32)$$

比较系数得

$$v_{kl} = \varphi_{kl} \quad (3.33)$$

$$\varphi_{kl} = \frac{z_0 Q_0}{2K} (1-\eta) \frac{B}{N_k^2} \int_0^1 (1-s^2) \cos(l\pi s) ds \cdot \int_0^{r^*} \left\{ -\exp\left[-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\beta}\right] J_0(\mu_k r) \right\} dr \quad (3.34)$$

其中

$$B = \begin{cases} 1 & (l=0) \\ 2 & (l>0) \end{cases} \quad N_k^2 = \frac{1}{2} (r^*)^2 J_0^2(\mu_k r^2) \quad (3.35)$$

#### 第四步: 求解 $W(r, z, t)$

(3.20)式右端项  $f(r, z, t)$  是释放热能的“能源”项,  $\tau$ 时刻所释放的能量  $f(r, z, \tau)$  只对  $t > \tau$  时刻的温度产生影响。可把  $f(r, z, t)$  看成一系列  $f(r, z, \tau)$  之和

$$f(r, z, t) = \int_0^t f(r, z, \tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (3.36)$$

其中

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 0 & (t \neq \tau^*) \\ 1 & (t = \tau^*) \end{cases}$$

用  $h(r, z, t, \tau)$  表示  $f(r, z, \tau)$  对  $t$  时刻温度场  $W(r, z, t)$  的贡献, 则

$$W(r, z, t) = \int_0^t h(r, z, t, \tau) d\tau \quad (3.37)$$

由冲量定理,  $h(r, z, t, \tau)$  是如下定解问题的解

$$\Delta h = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (3.38)$$

边界条件:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (3.39)$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial z} \right|_{z=z_0} = 0 \quad (\text{沿 } z \text{ 方向}) \quad (3.40)$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.41)$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=r^*} = 0 \quad (\text{沿 } r \text{ 方向}) \quad (3.42)$$

时间条件:

$$H|_{t=0} = f(r, z, \tau) \quad (3.43)$$

$$H|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \text{有限} \quad (3.44)$$

满足定解问题(3.38)~(3.44)((3.43)除外)的解为

$$h(r, z, t) = \sum_{k, l=0}^{\infty} h_{kl} J_0(\mu_{kl} r) \cos(\omega_l z) \exp(\lambda_{kl} t) \quad (3.45)$$

将  $f(r, z, \tau)$  在  $t = \tau$  处展开, 得

$$f(r, z, \tau) = \sum_{k, l=0}^{\infty} f_{kl}(\tau) J_0(\mu_{kl} r) \cos(\omega_l z) \quad (3.46)$$

其中

$$f_{kl}(\tau) = \frac{B}{N_k^2} \int_0^1 ds \int_0^{r^*} f(r, z, \tau) J_0(\mu_{kl} r) \cos(\omega_l z) dr \quad (3.47)$$

这里

$$s = \frac{z}{z_0}$$

$B$  和  $N_k^2$  见(3.35)

将(3.45), (3.46)代入(3.43), 得

$$h_{kl}(\tau) = f_{kl}(\tau) \exp(-\lambda_{kl} \tau)$$

于是

$$W(r, z, t) = \int_0^t h(r, z, \tau) d\tau = \sum_{k, l=0}^{\infty} J_0(\mu_{kl} r) \cos(\omega_l z) \int_0^t f_{kl}(\tau) \exp[\lambda_{kl}(t-\tau)] d\tau \quad (3.48)$$

最后得到问题的解为

$$T(r, z, t) = T_0 + \frac{z_0 Q_0}{2\kappa} (1-\eta) \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^2 \exp\left\{-\left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2\alpha} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\beta}\right]\right\} \\ + \sum_{k, l=0}^{\infty} J_0(\mu_{kl} r) \cos(\omega_l z) \exp(\lambda_{kl} t) \left\{ \varphi_{kl} + \int_0^t f_{kl}(\tau) \exp(-\lambda_{kl} \tau) d\tau \right\} \quad (3.49)$$

其中  $\varphi_{kl}, f_{kl}$  分别由积分(3.34)、(3.47)确定,

## 四、与 实 验 对 照

现计算如下实例:一个厚度为 $z_0=0.1\text{cm}$ , 半径为 $r^*=4\text{cm}$ 的铝平板,  $\rho_0=2.79\text{g/cm}^3$ ,  $\kappa=0.26211\times 10^2\text{erg}/(\mu\text{s}\cdot\text{cm}\cdot\text{K})$ ,  $C_V=9.595\times 10^8\text{erg}/(\text{g}\cdot\text{K})$ , 光斑半径 $r_0=2\text{cm}$ , 激光脉冲宽度 $t_0=2.5\text{s}$ , 反射率 $\eta=83\%$ , 激光强度峰值 $Q_0=0.597\times 10^{-8}[10^{12}\text{erg}/(\mu\text{s}\cdot\text{cm})]$ , 超高斯指数 $\alpha=\beta=4$ . 下图中“—”代表解析计算值, “——”实验结果.

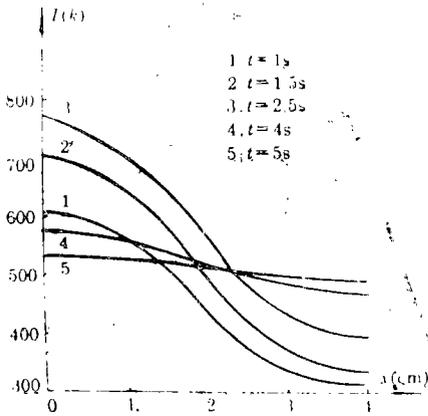


图2 各时刻沿平板径向温度的变化情况

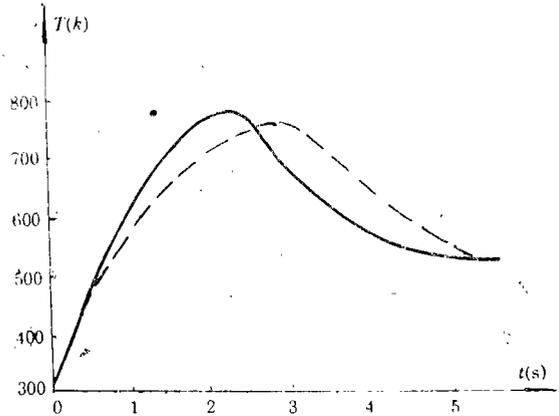


图3 板面中心点温度随时间的变化情况

## 参 考 文 献

- [1] 张洪济, 《热传导》, 高等教育出版社 (1992).
- [2] 俞昌铭, 《热传导及其数值分析》, 清华大学出版社 (1981).
- [3] A. B. 雷柯夫, 《热传导理论》(裘烈钧等译), 高等教育出版社 (1956).
- [4] 竹内洋一郎, 《热应力》(郭延玮等译), 科学出版社 (1977).

## An Analytical Solution of Heat Conduction on a Locally Nonuniformly Heated Surface of a Plate with Finite Thickness

Wang Mingrui    Jin Hui

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics  
Beijing, Beijing 100088, P. R. China).

## Abstract

In engineering and technology the following problem is often touched upon, a certain portion of a plate with finite thickness is heated on its surface, so that the heat flux along the surface is distributed nonuniformly and varying with time. For this kind of heat conduction, there is no available analytical solution given in existing treatises concerning heat conduction. This paper presents an analytical solution of this problem; its calculation results are in good agreement with the experimental data.

**Key words** plate, heat conduction, analytical solution