

一般频率依存数字最优预见伺服系统

廖福成¹ 江上正² 土谷武士³

(李骊推荐, 1994年8月29日收到)

摘 要

本文研究了一般类型的频率依存数字最优预见伺服系统, 给出了这类系统的设计方法。按照所给的方法, 无论目标值信号与输出信号间的误差向量前附加一个什么样的有理分式频率依存荷重, 都可以针对它设计最优预见伺服系统。本文还通过数值仿真, 把所得结论应用于直线电机, 证明了方法的有效性。

关键词 最优伺服系统 频率依存伺服系统 预见控制系统

一、前 言

文献[1]、[2]提出了连续时间系统的具有依赖于频率的评价函数的最优控制系统, 这是在频域内处理有不确定因素的控制系统的有效设计方法。文[3]把这种方法移植到了离散时间系统的设计上。文献[4]又引进了预见补偿。但文[3]和文[4]都对频率依存项有苛刻的限制, 这影响了它们的应用。本文去掉这些限制, 在极为一般的条件下研究频率依存控制系统。

二、频率依存最优伺服系统

设控制对象为

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ed(k), \quad y(k) = Cx(k) \quad (2.1)$$

其中, A, B, C 都是常数矩阵, $A: n \times n, B: n \times r, C: m \times n, E: n \times s, x(k), u(k), y(k), d(k)$ 分别是状态向量, 输入向量, 输出向量, 干扰向量, $x(k) \in R^n, y(k) \in R^m, u(k) \in R^r, d(k) \in R^s$ 。

假设 (A, B) 可控, (C, A) 可观测, $z=1$ 不是系统(2.1)的不变零点。所谓不变零点是指使得 $(n+m) \times (n+r)$ 矩阵

$$P(z) = \begin{bmatrix} A - zI & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

1 北京科学技术大学数力系, 北京 100083

2 日本神奈川大学工学部; 3 日本北海道大学工学部

的秩满足 $\text{rank} P(z) < n + \min(m, r)$ 的复数 $z^{[6]}$ 。

用 $R(k)$ 表示目标值信号。设 $R(k)$, $d(k)$ 分别满足

$$\alpha_B(z^{-1})R(k) = 0, \quad \alpha_d(z^{-1})d(k) = 0$$

其中 α_B, α_d 都是多项式。用 $\alpha(z^{-1})$ 表示 $\alpha_B(z^{-1})$ 与 $\alpha_d(z^{-1})$ 的最小公倍式。设

$$\alpha(z^{-1}) = 1 + \alpha_{L-1}z^{-1} + \dots + \alpha_0z^{-L} \quad (2.2)$$

误差向量 $e(k)$ 定义为

$$e(k) = R(k) - y(k) \quad (2.3)$$

这里考虑给 (2.3) 式定义的 $e(k)$ 附加了荷重 $h(z)$ 的频率依存误差 $w(k)$ ：

$$h(z) = \frac{b_\sigma z^\sigma + b_{\sigma-1}z^{\sigma-1} + \dots + b_0 + b_{-1}z^{-1} + \dots + b_{-\tau}z^{-\tau}}{z^q + d_{q-1}z^{q-1} + \dots + d_0 + d_{-1}z^{-1} + \dots + d_{-\nu}z^{-\nu}} = \frac{b(z)}{d(z)} \quad (2.4)$$

$$w(k) = h(z)e(k) = h(z)[R(k) - y(k)] \quad (2.5)$$

$d(z)$ 是 $h(z)$ 的分母多项式，最高次项系数为 1， $b(z)$ 与 $d(z)$ 互素， $(b(z), d(z)) = 1$ ， $b(z)$ 与 $\alpha(z)$ 互素， $(b(z), \alpha(z)) = 1$ 。还要求 $q \geq \sigma$ 。

定义一个量 $\bar{\sigma}$ ：

$$\bar{\sigma} = \min\{j | CA^j B \neq 0\}$$

再令 $\tilde{\sigma} = \min\{\bar{\sigma}, 1\}$

不失一般性设 (2.4) 式的分子的次数 σ 不大于 $\tilde{\sigma}$ 即设 $\sigma \leq \tilde{\sigma}$ 。事实上，若 $\sigma > \tilde{\sigma}$ ，则把 $h(z)$ 的分子分母同除以 $z^{\sigma - \tilde{\sigma}}$ 即可化成这种情况。

用 $\alpha(z^{-1})$ 作用在 (2.1) 式两边得

$$\alpha(z^{-1})x(k+1) = A\alpha(z^{-1})x(k) + B\alpha(z^{-1})u(k) \quad (2.6)$$

(2.6) 式右端未出现 $\alpha(z^{-1})d(k)$ 是因为 $\alpha(z^{-1})d(k) = 0$ 。由此得到

$$\begin{aligned} \alpha(z^{-1})x(k+i) &= A\alpha(z^{-1})x(k+i-1) + B\alpha(z^{-1})u(k+i-1) \\ &= A^2\alpha(z^{-1})x(k+i-2) + AB\alpha(z^{-1})u(k+i-2) + B\alpha(z^{-1})u(k+i-1) \\ &= \dots \\ &= A^i\alpha(z^{-1})x(k) + A^{i-1}B\alpha(z^{-1})u(k) + A^{i-2}B\alpha(z^{-1})u(k+1) \\ &\quad + \dots + B\alpha(z^{-1})u(k+i-1) \\ &= A^i\alpha(z^{-1})x(k) + \sum_{j=1}^i A^{i-j}B\alpha(z^{-1})u(k+i-j) \end{aligned} \quad (2.7)$$

用 $d(z)\alpha(z^{-1})$ 作用在 (2.5) 式两边得到

$$\begin{aligned} d(z)\alpha(z^{-1})w(k) &= b(z)\alpha(z^{-1})[R(k) - y(k)] \\ &= b(z)\alpha(z^{-1})[R(k) - Cx(k)] \\ &= \sum_{i=0}^{\sigma} b_i\alpha(z^{-1})R(k+i) + \sum_{i=1}^{\tau} b_{-i}\alpha(z^{-1})R(k-i) \\ &\quad - C \sum_{i=0}^{\sigma} b_i\alpha(z^{-1})x(k+i) - C \sum_{i=1}^{\tau} b_{-i}\alpha(z^{-1})x(k-i) \\ &= -C_0^*\alpha(z^{-1})x(k) - \sum_{i=1}^{\tau} C_i^*\alpha(z^{-1})x(k-i) + \sum_{i=0}^{\sigma} b_i\alpha(z^{-1})R(k+i) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\tau} b_{-i} \alpha(z^{-1}) R(k-i) - B^* \alpha(z^{-1}) u(k) \quad (2.8)$$

其中

$$C_0^* = \sum_{i=0}^{\sigma} C b_i A^i$$

$$C_i^* = b_{-i} C \quad (i=1, \dots, \tau)$$

$$B^* = \begin{cases} 0, & \text{当 } \sigma < \bar{\sigma} \\ b_{\sigma} C A^{\sigma-1} B, & \text{当 } \sigma = \bar{\sigma} \end{cases}$$

记

$$d(z) \alpha(z^{-1}) = z^q + \beta_{q-1} z^{q-1} + \dots + \beta_0 + \beta_{-1} z^{-1} + \dots + \beta_{-(L+v)} z^{-(L+v)} \quad (2.9)$$

则有

$$d(z) \alpha(z^{-1}) w(k) = w(k+q) + \beta_{q-1} w(k+q-1) + \dots + \beta_0 w(k) + \beta_{-1} w(k-1) + \dots + \beta_{-(L+v)} w(k-(L+v)) \quad (2.10)$$

代入(2.8)式得到

$$\begin{aligned} w(k+q) = & -C_0^* \alpha(z^{-1}) x(k) - \sum_{i=1}^{\tau} C_i^* \alpha(z^{-1}) x(k-i) - B^* \alpha(z^{-1}) u(k) \\ & - \beta_{q-1} w(k+q-1) - \dots - \beta_0 w(k) - \beta_{-1} w(k-1) - \dots \\ & - \beta_{-(L+v)} w(k-(L+v)) \\ & + \sum_{i=0}^{\sigma} b_i \alpha(z^{-1}) R(k+i) + \sum_{i=1}^{\tau} b_{-i} \alpha(z^{-1}) R(k-i) \end{aligned} \quad (2.11)$$

由此可得到如下扩大系统

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \alpha(z^{-1}) x(k+1) \\ \alpha(z^{-1}) x(k) \\ \vdots \\ \alpha(z^{-1}) x(k-\tau+1) \\ w(k+q) \\ w(k+q-1) \\ \vdots \\ w(k-(L+v)+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -C_0^* I & \dots & \dots & -C_{\tau}^* I & -\beta_{q-1} I & \dots & \dots & -\beta_{-(L+v)+1} I & -\beta_{-(L+v)} I \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} \alpha(z^{-1}) x(k) \\ \alpha(z^{-1}) x(k-1) \\ \vdots \\ \alpha(z^{-1}) x(k-\tau) \\ w(k+q-1) \\ w(k+q-2) \\ \vdots \\ w(k-(L+v)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -B^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \alpha(z^{-1}) u(k) + \sum_{i=-\tau}^{\sigma} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_i I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \alpha(z^{-1}) R(k+i) \quad (2.12) \end{aligned}$$

或写为

$$X_F(k+1) = \Phi_F X_F(k) + G_F u_F(k) + \sum_{i=0}^{\sigma} b_i \alpha(z^{-1}) R(k+i) + \sum_{i=1}^{\tau} b_{-i} \alpha(z^{-1}) R(k-i) \quad (2.13)$$

其中 $X_F(k)$, Φ_F , G_F , b_i 和 $u_F(k)$ 的意义从 (2.12) 与 (2.13) 式的对比中即可明白。这个系统与一般情况的区别在于它同时包含了目标值信号的过去值和未来值。

我们假设系统 (2.13) 可控可观测。评价函数取为

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} [X_F^T(k) Q_F X_F(k) + u_F^T(k) H u_F(k)] \quad (2.14)$$

其中, Q_F 为非负矩阵, H 为正定矩阵, $M = \max(M_R, M_d)$ 。

在目标值信号 $R(k)$ 为常数时, (2.13) 式最后两个和式为零, 从而它的使 (2.14) 式取最小值的控制输入为

$$u_F(k) = F_F X_F(k) \quad (2.15)$$

其中

$$F_F = -[H + G_F^T P_F G_F]^{-1} G_F^T P_F \Phi_F \quad (2.16)$$

P_F 是代数 Riccati 方程

$$P_F = Q_F + \Phi_F^T P_F \Phi_F - \Phi_F^T P_F G_F [H + G_F^T P_F G_F]^{-1} G_F^T P_F \Phi_F \quad (2.17)$$

的解。

把 (2.15) 式改写为

$$u_F(k) = f_{x_0} \alpha(z^{-1}) x(k) + f_{x_1} \alpha(z^{-1}) x(k-1) + \dots + f_{x_r} \alpha(z^{-1}) x(k-r) + f_{w_1} w(k+q-1) + \dots + f_{w_q} w(k) + \dots + f_{w_{q+(L+v)}} w(k-(L+v)) \quad (2.18)$$

(2.18) 式所给出的控制规律当 $q < 2$ 时显然可以不用未来值而实现。而当 $q \geq 2$ 时从 (2.18) 式看出要用到 $w(k)$ 的未来值。所以必须用过去的信息表达这些未来值, 否则 (2.18) 式将不可能实现, 这一点是可以做到的。证明如下。

由于已假设 $\sigma \leq \bar{\sigma} = \min\{\bar{\sigma}, 1\}$, 所以有 $\sigma \leq 1$ 。在此条件下, 用 $d(z)$ 作用在 (2.5) 式两边可得到如下关系式

$$w(k+q) + d_{q-1} w(k+q-1) + \dots + d_0 w(k) + d_{-1} w(k-1) + \dots + d_{-v} w(k-v) = b_1 e(k+1) + b_0 e(k) + b_{-1} e(k-1) + \dots + b_{-r} e(k-r) \quad (2.19)$$

把 (2.19) 式中的 $(k+q)$ 分别换为 $(k+q-1), \dots, (k+1)$, 得到 $(q-1)$ 个等式, 把这 $(q-1)$ 个等式写成向量矩阵形式就是

$$\Gamma_F \begin{bmatrix} w(k+q-1) \\ w(k+q-2) \\ \vdots \\ w(k+1) \end{bmatrix} = \Delta_F \begin{bmatrix} w(k) \\ \vdots \\ w(k-v-1) \\ \vdots \\ w(k-v-q-1) \\ e(k) \\ \vdots \\ e(k-\tau-1) \\ \vdots \\ e(k-\tau-q-1) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

其中

$$\Gamma_F = \begin{bmatrix} I & d_{q-1}I & \cdots & d_2I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & d_{q-1}I & \\ & \vdots & & & & \\ & 0 & \cdots & 0 & & I \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\Delta_F = \begin{bmatrix} -d_1I & -d_0I & -d_{-1}I & \cdots & -d_{-r}I & 0 & \cdots & 0 \\ & -d_2I & & & & & & \vdots \\ & \vdots & & & & & & 0 \\ & -d_{q-1}I & \cdots & -d_1I & -d_0I & -d_{-1}I & \cdots & -d_{-r}I \\ b_1I & b_0I & b_{-1}I & \cdots & b_{-r}I & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & & & & \vdots \\ & 0 & & & & & & 0 \\ & \vdots & & & & & & \\ & 0 & \cdots & 0 & b_1I & b_0I & b_{-1}I & \cdots & b_{-r}I \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

由(2.20)、(2.21)、(2.22)可得

$$\begin{bmatrix} w(k+q-1) \\ w(k+q-2) \\ \vdots \\ w(k+1) \end{bmatrix} = \Gamma_F^{-1} \Delta_F \begin{bmatrix} w(k) \\ \vdots \\ w(k-\nu-q-1) \\ e(k) \\ \vdots \\ e(k-\tau-q-1) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

这样,就把 $w(k+q-1), \dots, w(k+1)$ 用 $w(k)$ 及 $e(k)$ 的过去值(及当前值)表示出来了。从而(2.18)式成为

$$u_F(k) = [f_{z_0} \ f_{z_1} \ \cdots \ f_{z_\tau}] \begin{bmatrix} \alpha(z^{-1})x(k) \\ \alpha(z^{-1})x(k-1) \\ \vdots \\ \alpha(z^{-1})x(k-\tau) \end{bmatrix} + [f_1 \ \cdots \ f_{q-1}] \Gamma_F^{-1} \Delta_F \times \begin{bmatrix} w(k) \\ \vdots \\ w(k-\nu-q-1) \\ e(k) \\ \vdots \\ e(k-\tau-q-1) \end{bmatrix} + [f_q \ \cdots \ f_{q+(L+\nu)}] \begin{bmatrix} w(k) \\ \vdots \\ w(k-(L+\nu)) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

在(2.24)式右端已经不出现任何量的未来值了。

三、频率依存最优预见伺服系统

假定从当前时刻到未来 M_R 步目标值信号为已知。考虑利用这些未来值,令

$$u_F(k) = F_F X_F(k) + \sum_{j=0}^{M_R} F_{FR}(j) \alpha(z^{-1}) R(k+j) \quad (3.1)$$

假设 $M_R > \sigma$ 。把(3.1)式代入(2.13)计算得

$$X_F(k+1) = \xi_F X_F(k) + \sum_{j=0}^{\sigma} [b_j + G_F F_{FR}(j)] \alpha(z^{-1}) R(k+j)$$

$$+ \sum_{j=\sigma+1}^{M_R} G_F F_{FR}(j) \alpha(z^{-1}) R(k+j) + \sum_{j=1}^{\tau} b_{-j} \alpha(z^{-1}) R(k-j) \quad (3.2)$$

假定 $\alpha(z^{-1})R(k)$ 是阶跃函数。不失一般性设 $\alpha(z^{-1})R(1)=R_0 \neq 0$ ，而在其余时刻 $\alpha(z^{-1})R(k)=0 (k \neq 1)$ 。计算各个时刻的 $X_F(k)$ 值得到

$$\left. \begin{aligned} X_F(-M_R+2) &= G_F F_{FR}(M_R) R_0 \\ X_F(-M_R+3) &= [\xi_F G_F F_{FR}(M_R) + G_F F_{FR}(M_R-1)] R_0 \\ &\vdots \\ X_F(-\sigma+2) &= [\xi_F^{M_R-\sigma} G_F F_{FR}(M_R) + \cdots + \xi_F G_F F_{FR}(\sigma+1) + [G_F F_{FR}(\sigma) + b_\sigma]] R_0 \\ &\vdots \\ X_F(2) &= [\xi_F^{M_R} G_F F_{FR}(M_R) + \cdots + \xi_F^{\sigma+1} G_F F_{FR}(\sigma+1) \\ &\quad + \xi_F^\sigma [G_F F_{FR}(\sigma) + b_\sigma] + \cdots + [G_F F_{FR}(0) + b_0]] R_0 \\ X_F(3) &= [\xi_F^{M_R+1} G_F F_{FR}(M_R) + \cdots + \xi_F [G_F F_{FR}(0) + b_0] + b_{-1}] R_0 \\ &\vdots \\ X_F(\tau+2) &= [\xi_F^{M_R+\tau} G_F F_{FR}(M_R) + \cdots + \xi_F [G_F F_{FR}(0) + b_0] \\ &\quad + \xi_F^{\tau-1} b_{-1} + \cdots + b_{-\tau}] R_0 \\ X_F(N+1) &= \xi_F^{N-\tau-1} X_F(\tau+2) \quad (N \geq \tau+2) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

其中

$$\xi_F = \Phi_F + G_F F_F$$

令

$$W = \begin{bmatrix} b_{-\tau} \\ b_{-(\tau-1)} \\ \vdots \\ b_{-1} \\ G_F F_{FR}(0) + b_0 \\ \vdots \\ G_F F_{FR}(\sigma) + b_\sigma \\ G_F F_{FR}(\sigma+1) \\ \vdots \\ G_F F_{FR}(M_R) \end{bmatrix}$$

则(3.3)式即可写成

$$\left. \begin{aligned} X_F(-M_R+2) &= [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ I] W \\ X_F(-M_R+3) &= [0 \ 0 \ \cdots \ I \ \xi_F] W \\ &\vdots \\ X_F(\tau+2) &= [I \ \xi_F \ \cdots \ \xi_F^{M_R+\tau-1} \ \xi_F^{M_R+\tau}] W \\ X_F(N+1) &= \xi_F^{N-\tau-1} X_F(\tau+2) \quad (N \geq \tau+2) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

再令

$$\eta = Q_F + F_F^T H F_F \quad (3.5)$$

$$P_F = \eta + \xi_F^T \eta \xi_F + (\xi_F^T)^2 \eta \xi_F^2 + \cdots \quad (3.6)$$

仿文献[4]的有关证明，可以证明(3.6)式所定义的矩阵 P_F 正好与 Riccati 方程(2.17)的解 P_F 一致，并有

$$\xi_F^T P_F G_F + F_F^T H = 0 \quad (3.7)$$

$$\eta + \xi_F^T \eta \xi_F + \cdots + (\xi_F^T)^N \eta \xi_F^N + (\xi_F^T)^{N+1} P_F \xi_F^{N+1} = P_F \quad (3.8)$$

事实上(3.8)式可直接从(3.6)式得到。

今把 J 的时间下界取为 $-M_R+1$, 则

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{k=-M_R+1}^{\infty} \left[X_F^T(k) Q_F X_F(k) + \left[F_F X_F(k) + \sum_{j=0}^{M_R} F_{FR}(j) \alpha(z^{-1}) R(k+j) \right]^T \right. \\
 &\quad \cdot H \left[F_F X_F(k) + \sum_{j=0}^{M_R} F_{FR}(j) \alpha(z^{-1}) R(k+j) \right] \left. \right] \\
 &= \sum_{k=-M_R+1}^{\infty} X_F^T(k) \eta X_F(k) + 2 \sum_{k=-M_R+1}^{\infty} X_F^T(k) F_F^T H \\
 &\quad \cdot \left[\sum_{j=0}^{M_R} F_{FR}(j) \alpha(z^{-1}) R(k+j) \right] + \sum_{k=-M_R+1}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{M_R} F_{FR}(j) \alpha(z^{-1}) R(k+j) \right]^T \\
 &\quad \cdot H \left[\sum_{j=0}^{M_R} F_{FR}(j) \alpha(z^{-1}) R(k+j) \right] \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

把(3.9)式右边各项分别记作 J_1, J_2, J_3 . 下面分别求 J_1, J_2, J_3 , 再求和得到 J .

(1) J_1 的推导

$$\begin{aligned}
 J_1 &= W^T \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix} [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \eta] + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{0} \\ \vdots \\ I \\ \xi_F^T \end{bmatrix} [0 \ 0 \ \dots \ \eta \ \eta \xi_F] \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ \vdots \\ (\xi_F^T)_{M_R+\tau-2} \\ (\xi_F^T)_{M_R+\tau-1} \end{bmatrix} [0 \ \eta \ \dots \ \eta \xi_F^{M_R+\tau-2} \ \eta \xi_F^{M_R+\tau-1}] \right\} W \\
 &\quad + X_F^T(\tau+2) P_F X_F(\tau+2) \\
 &= W^T \begin{bmatrix} P_F & P_F \xi_F & \dots & P_F \xi_F^{M_R+\tau} \\ \xi_F^T P_F & P_F & \dots & P_F \xi_F^{M_R+\tau-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_F^T)_{M_R+\tau} P_F & (\xi_F^T)_{M_R+\tau-1} P_F & \dots & P_F \end{bmatrix} W \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

记 $F_{FR} = [F_{FR}^T(-\tau) \ \dots \ F_{FR}^T(-1) \ F_{FR}^T(0) \ \dots \ F_{FR}^T(M_R)]^T$

其中 $F_{FR}^T(-1), \dots, F_{FR}^T(-\tau)$ 是虚设的量, 可看成它们都为零. W 与 F_{FR} 的关系是

$$W = \left(\begin{bmatrix} G_F & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_F \end{bmatrix} F_{FR} + \begin{bmatrix} b_{-\tau} \\ \vdots \\ b_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) R_0$$

代入(3.10)式得到

$$J_1 = R_0^T [F_{FR}^T T_1 F_{FR} + \Delta_{R1}^T F_{FR} + \Theta] R_0 \tag{3.11}$$

其中

$$T_1 = \begin{pmatrix} G_F^T P_F G_F & G_F^T P_F \xi_F G_F & \dots & G_F^T P_F \xi_F^{M_R + \tau} G_F \\ G_F^T \xi_F^T P_F G_F & G_F^T P_F G_F & \dots & G_F^T P_F \xi_F^{M_R + \tau - 1} G_F \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_F^T (\xi_F^T)^{M_R + \tau} P_F G_F & G_F^T (\xi_F^T)^{M_R + \tau - 1} P_F G_F & \dots & G_F^T P_F G_F \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{R1}^T = [b_{\tau}^T \dots b_0^T \ 0 \dots 0] \begin{pmatrix} P_F G_F & P_F \xi_F G_F & \dots & P_F \xi_F^{M_R + \tau} G_F \\ \xi_F^T P_F G_F & P_F G_F & \dots & P_F \xi_F^{M_R + \tau - 1} G_F \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_F^T)^{M_R + \tau} P_F G_F & (\xi_F^T)^{M_R + \tau - 1} P_F G_F & \dots & P_F G_F \end{pmatrix}$$

$$= [b_{\tau}^T P_F G_F + \dots + b_0^T (\xi_F^T)^{\tau} P_F G_F + \dots + b_0^T (\xi_F^T)^{\sigma + \tau} P_F G_F, \\
 b_{\tau}^T P_F \xi_F G_F + b_{\tau+1}^T P_F G_F + b_{\tau+2}^T (\xi_F^T) P_F G_F + \dots + b_0^T (\xi_F^T)^{\sigma + \tau - 1} P_F G_F, \\
 \dots, b_{\tau}^T P_F \xi_F^{\sigma + \tau} G_F + \dots + b_{\sigma-1}^T P_F \xi_F G_F + b_0^T P_F G_F, \\
 b_{\tau}^T P_F \xi_F^{\sigma + \tau + 1} G_F + \dots + b_0^T P_F \xi_F G_F, \dots, \\
 b_{\tau}^T P_F \xi_F^{M_R + \tau} G_F + \dots + b_0^T P_F \xi_F^{M_R - \sigma} G_F]$$

$$\Theta = [b_{\tau}^T \dots b_0^T \ 0 \dots 0] \begin{pmatrix} P_F & P_F \xi_F & \dots & P_F \xi_F^{M_R + \tau} \\ \xi_F^T P_F & P_F & \dots & P_F \xi_F^{M_R + \tau - 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_F^T)^{M_R + \tau} P_F & (\xi_F^T)^{M_R + \tau - 1} P_F & \dots & P_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{-\tau} \\ \vdots \\ b_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) J_2 的推导

$$\begin{aligned}
 J_2 &= 2R_0^T \{ F_{FR}^T(M_R) G_F^T F_F^T H F_{FR}(M_R - 1) + [\xi_F G_F F_{FR}(M_R) + G_F F_{FR}(M_R - 1)]^T \\
 &\quad \cdot F_F^T H F_{FR}(M_R - 2) + \dots + [\xi_F^{M_R - \sigma} G_F F_{FR}(M_R) + \dots + \xi_F G_F F_{FR}(\sigma + 1) \\
 &\quad + [G_F F_{FR}(\sigma) + b_{\sigma}]^T F_F^T H F_{FR}(\sigma - 1) + \dots + [\xi_F^{M_R - 1} G_F F_{FR}(M_R) + \dots \\
 &\quad + \xi_F^{\sigma} G_F F_{FR}(\sigma + 1) + \xi_F^{\sigma - 1} [G_F F_{FR}(\sigma) + b_{\sigma}] + \dots + [G_F F_{FR}(1) + b_1] \}^T \\
 &\quad \cdot F_F^T H F_{FR}(0) + [\xi_F^{M_R} G_F F_{FR}(M_R) + \dots + \xi_F [G_F F_{FR}(1) + b_1] + [G_F F_{FR}(0) \\
 &\quad + b_0] \}^T F_F^T H F_{FR}(-1) + \dots + [\xi_F^{M_R + \tau - 1} F_{FR}(M_R) + \dots + [G_F F_{FR}(-\tau + 1) \\
 &\quad + b_{-\tau + 1}] \}^T F_F^T H F_{FR}(-\tau) \} R_0 \\
 &= R_0^T [F_{FR}^T T_2 F_{FR} + 2\Delta_{R2}^T F_{FR}] R_0 \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

其中

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & H F_F G_F & \dots & H F_F \xi_F^{M_R + \tau - 1} G_F \\ G_F^T F_F^T H & 0 & \dots & H F_F \xi_F^{M_R + \tau - 2} G_F \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_F^T (\xi_F^T)^{M_R + \tau - 1} F_F^T H & G_F^T (\xi_F^T)^{M_R + \tau - 2} F_F^T H & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{R2}^T &= [b_{\tau+1}^T F_F^T H + \dots + b_0^T (\xi_F^T)^{\tau - 1} F_F^T H + \dots + b_0^T (\xi_F^T)^{\sigma + \tau - 1} F_F^T H, \\
 &\quad b_{\tau+2}^T F_F^T H + \dots + b_0^T (\xi_F^T)^{\sigma + \tau - 2} F_F^T H, \\
 &\quad \dots, b_0^T F_F^T H, 0, \dots, 0]
 \end{aligned}$$

其中, Δ_{R2}^T 是计算(3.12)式时下面的项的系数矩阵:

$$\begin{aligned}
 &2R_0^T [b_0^T F_F^T H F_{FR}(\sigma - 1) + [\xi_F b_{\sigma} + b_{\sigma - 1}]^T F_F^T H F_{FR}(\sigma - 2) + \dots \\
 &\quad + [\xi_F^{\sigma - 1} b_{\sigma} + \xi_F^{\sigma - 2} b_{\sigma - 1} + \dots + b_1]^T F_F^T H F_{FR}(0) + \dots \\
 &\quad + [\xi_F^{\sigma + \tau - 1} b_{\sigma} + \dots + b_{-\tau + 1}]^T F_F^T H F_{FR}(-\tau)] R_0 \\
 &= 2R_0^T [[b_{\tau+1}^T + b_{\tau+2}^T \xi_F^T + \dots + b_0^T (\xi_F^T)^{\sigma + \tau - 1}] F_F^T H, \\
 &\quad [b_{\tau+2}^T + \dots + b_0^T (\xi_F^T)^{\sigma + \tau - 2}] F_F^T H, \dots, \\
 &\quad b_0^T F_F^T H, 0, \dots, 0] F_{FR} R_0
 \end{aligned}$$

(3) J_3 的推导

$$J_3 = \sum_{k=-\tau}^{M_R} R_0^T F_{FR}^T(k) H F_{FR}(k) R_0 = R_0^T [F_{FR}^T T_3 F_{FR}] R_0 \quad (3.13)$$

其中

$$T_3 = \text{diag}(H, H, \dots, H)$$

现在计算 J 。注意到(3.7)式给出的关系式可知，把 T_1 与 T_2 相加时非对角线上的子块全为0。故若用 Γ_F 表示 $T_1+T_2+T_3$ ，则

$$\Gamma_F = \text{diag}(H + G_F^T P_F G_F, \dots, H + G_F^T P_F G_F)$$

再用 Δ_F 表示 $\Delta_{R1} + \Delta_{R2}$ ，仍应用(3.7)式知

$$\Delta_F = \begin{bmatrix} G_F^T P_F b_{-\tau} \\ G_F^T \xi_F^T P_F b_{-\tau} + G_F^T P_F b_{-\tau+1} \\ \vdots \\ G_F^T (\xi_F^T)^{\sigma+\tau-1} P_F b_{-\tau} + \dots + G_F^T P_F b_{\sigma-1} \\ G_F^T (\xi_F^T)^{\sigma+\tau} P_F b_{-\tau} + \dots + G_F^T P_F b_{\sigma} \\ \vdots \\ G_F^T (\xi_F^T)^{M_R+\tau} P_F b_{-\tau} + \dots + G_F^T (\xi_F^T)^{M_R-\sigma} P_F b_{\sigma} \end{bmatrix}$$

因此有

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = R_0^T [F_{FR}^T \Gamma_F F_{FR} + 2\Delta_F^T F_{FR} + \Theta] R_0 \quad (3.14)$$

下面用两种方法处理

(1) 从(3.14)式求偏导，令

$$\frac{\partial J}{\partial F_{FR} R_0} = 0$$

得到使评价函数 J 取最小值的 F_{FR} 为

$$F_{FR} = -\Gamma_F^{-1} \Delta_F \quad (3.15)$$

即

$$F_{FR}(j) = \begin{cases} -\sum_{i=-\tau}^j [H + G_F^T P_F G_F]^{-1} G_F^T (\xi_F^T)^{j-i+\tau} P_F b_i, & -\tau \leq j \leq \sigma \\ -\sum_{i=-\tau}^{\sigma} [H + G_F^T P_F G_F]^{-1} G_F^T (\xi_F^T)^{j-i+\tau} P_F b_i, & \sigma+1 \leq j \leq M_R \end{cases} \quad (3.16)$$

(3.16)式中的 $F_{FR}(-\tau), \dots, F_{FR}(-1)$ 不等于0。事实上，若在输入中利用 τ 步目标值信号的过去值，即把(3.1)式改为

$$u_F(k) = F_F X_F(k) + \sum_{j=0}^{M_R} F_{FR}(j) \alpha(z^{-1}) R(k+j) + \sum_{j=1}^{\tau} F_{FR}(-j) \alpha(z^{-1}) R(k-j) \quad (3.17)$$

则 $F_{FR}(-\tau), \dots, F_{FR}(-1)$ 便不是虚设量，最后求得的结果正好是(3.16)式。

(2) 在(3.14)式中令虚设量 $F_{FR}(-\tau), \dots, F_{FR}(-1)$ 全为0，计算得到

$$J = R_0^T [F_{1FR}^T \Gamma_{1F} F_{1FR} + 2\Delta_{1F}^T F_{1FR} + \Theta] R_0 \quad (3.18)$$

其中

$$F_{1FR} = \begin{bmatrix} F_{FR}(0) \\ \vdots \\ F_{FR}(M_R) \end{bmatrix}$$

Δ_{1F} 是 Δ_F 的后 M_R+1 个分量, Γ_{1F} 是对角块为 $H+G_F^T P_F G_F$ 的块对角矩阵, 具有使(3.18)式有意义的阶数. 由此求对 $F_{1FR}R_0$ 的偏导数令其为0可求得使评价函数 J 取最小值的 F_{1FR} 为

$$F_{1FR} = -\Gamma_{1F}^{-1} \Delta_{1F} \tag{3.19}$$

即

$$F_{FR}(j) = \begin{cases} -\sum_{i=-\tau}^j [H+G_F^T P_F G_F]^{-1} G_F^T (\xi_F^T)^{j-i+\tau} P_F b_i, & 0 \leq j \leq \sigma \\ -\sum_{i=-\tau}^{\sigma} [H+G_F^T P_F G_F]^{-1} G_F^T (\xi_F^T)^{j-i+\tau} P_F b_i, & \sigma+1 \leq j \leq M_R \end{cases} \tag{3.20}$$

(3.20)式即是要求的预见前馈补偿项的系数矩阵. 有趣的是, 在(3.16)式中令 $F_{FR}(-\tau) = \dots = F_{FR}(-1) = 0$ 便得到(3.20)式.

利用(2.18)式, 所要求的最优控制输入(3.1)式成为

$$\begin{aligned} a(z^{-1})u(k) &= f_{z_0} a(z^{-1})x(k) + f_{z_1} a(z^{-1})x(k-1) + \dots + f_{z_\tau} a(z^{-1})x(k-\tau) \\ &\quad + f_1 w(k+q-1) + \dots + f_q w(k) + \dots + f_{q+(L+\nu)} w(k-(L+\nu)) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{M_R} F_{FR}(j) a(z^{-1})R(k+j) \end{aligned} \tag{3.21}$$

解此差分方程, 并在必要时利用(2.23)式表示有关量未来值, 即可求出最优控制输入. 详细推导从略.

四、数值例子

考虑电流输入型直线电机(如图1). 它的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -D/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_F/M \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/M \end{bmatrix} d(t) \tag{4.1}$$

其中 $x_p(t)$ 表示位置, $x_v(t)$ 表示速度, $u(t)$ 为电流指令值, $d(t)$ 为干扰信号, D 为摩擦系数, M 为可动部分的质量, K_F 为推力系数.

把(4.1)式表示为向量形式:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + b_0 u(t) + E_0 d(t) \tag{4.2}$$

输出方程为

$$y(t) = Cx(t) = [1 \ 0]x(t) \tag{4.3}$$

以一个实际电机为例, 其参数为

$$K_F = 2.3 [N/A], \quad M = 1.82 [kg], \quad D = 3.48 [kg/s]$$

首先, 取采样周期为 $T = 0.01$, 把(4.2)、(4.3)离散化, 得到如下离散时间系统

$$\begin{aligned} x[(k+1)T] &= \begin{bmatrix} 1.0 & 0.009865 \\ 0.0 & 0.913179 \end{bmatrix} x(kT) + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.017804 \end{bmatrix} u(kT) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.549451 \end{bmatrix} d(kT) \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$y(kT) = Cx(kT) \tag{4.5}$$

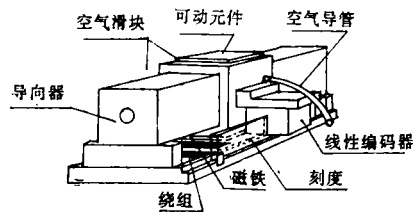


图1 气滑式直线电机

对系统(4.4)、(4.5)应用前面的结果。假设目标值信号为阶跃信号， $d(kT)$ 为常数，则应有

$$\alpha(z^{-1}) = \alpha_R(z^{-1}) = \alpha_d(z^{-1}) = 1 - z^{-1} \quad (4.6)$$

令

$$h_1(z) = \frac{0.5z^3 + 0.5z^2 + 0.2z + 0.1}{z^4 + z^3 + z^2 + z + 0.2} \quad (4.7)$$

$$h_2(z) = \frac{0.1z^3 + 0.1z^2 + 0.1z + 0.1}{z^4 + z^3 + z^2 + z + 0.1} \quad (4.8)$$

对如此选取的 $h(z)$ ，文[4]的方法不能利用。而用本文所述方法，把 $h_1(z)$ ， $h_2(z)$ 变形为

$$h_1(z) = \frac{0.5z + 0.5 + 0.2z^{-1} + 0.1z^{-2}}{z^2 + z + 1 + z^{-1} + 0.2z^{-2}} \quad (4.9)$$

$$h_2(z) = \frac{0.1z + 0.1 + 0.1z^{-1} + 0.1z^{-2}}{z^2 + z + 1 + z^{-1} + 0.1z^{-2}} \quad (4.10)$$

这就满足了 $\sigma \leq \bar{\sigma}$ 这一条件。扩大系统为11阶系统。对扩大系统取

$$Q_F = I, H = I$$

这里 H 为 1×1 矩阵即为数。数值仿真结果如图2~图5所示。图2给出的是普通误差系统($h(z) = 1$)及频率依存荷重取为 $h_1(z)$ ， $h_2(z)$ 时的系统响应，有200步预见作用($M_R = 200$)。图3是对应的输入。图4给出的是以上各种情况在没有预见作用时的响应，图5是相应的输入。从图上看，在两种情况下，都是普通误差系统收敛慢，而且普通误差系统所需输入的绝对值最大，即所需动力最大。有预见作用时效果有明显改善也是显然的。

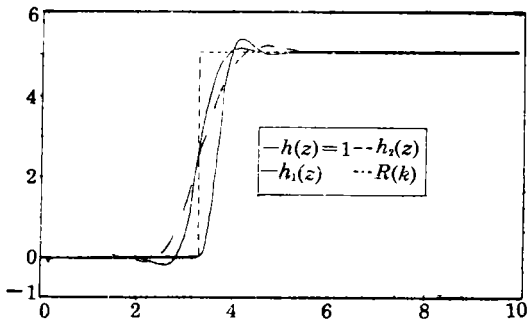


图2 伺服系统的阶跃响应 (200步预见)

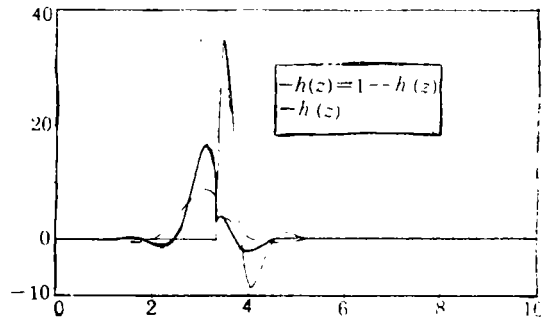


图3 伺服系统的控制输入 (200步预见)

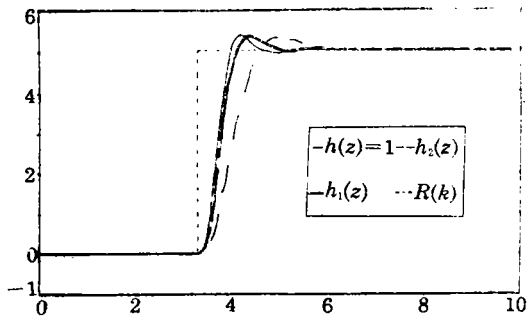


图4 伺服系统的阶跃响应 (无预见)

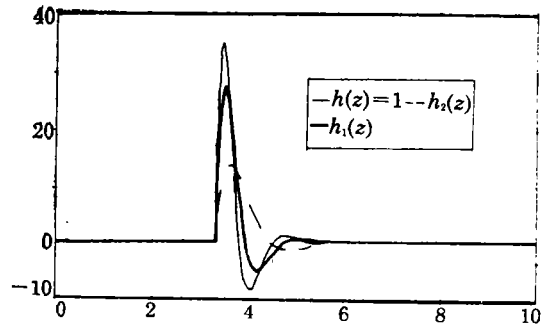


图5 伺服系统的控制输入 (无预见)

五、结 论

本文对非常一般的频率依存系统求得了最优伺服系统及最优预见伺服系统的控制规则。与文[3]、[4]比较,当本文(2.4)式中的 r 及 v 都取为0而且 $\sigma \leq \bar{\sigma}$ 时,第二节及第三节分别是文[3]、[4]的结果,文[3]、[4]只是本文的极为特殊的情况。

参 考 文 献

- [1] 古田勝久、末長修, 周波数依存偏差に基づくサーボ・コントローラ的设计, 計測自動制御学会論文集, 25(4) (1989), 406—410.
- [2] 木田隆、池田雅夫、山口功, 高域遮断特性をもたせた最適レギュレータとその大型宇宙構造物の制御への応用, 計測自動制御学会論文集, 25(4) (1989), 448—454.
- [3] 江上正、漆畑真吾、土谷武士, 周波数依存デジタル最適サーボ系とその応用, 計測自動制御学会論文集, 28(2) (1992), 290—292.
- [4] 土谷武士、江上正, 《デジタル预见制御》, 産業図書 (1992); 中译本: 廖福成译, 《最新自动控制技术, 数字预见控制》, 北京科技出版社 (1994).
- [5] H. H. Rosenbroch, *State-Space and Multivariable Theory*, Nelson (1980).

A General Frequency Dependent Digital Optimal Preview Servo System

Liao Fucheng

(Department of Mathematics and Mechanics, Beijing
University of Science and Technology, Beijing
100083, P. R. China)

Egami Tadashi

(Faculty of Engineering, Kanagawa University, Japan)

Tsuchiya Takeshi

(Faculty of Engineering, Hokkaido University, Japan)

Abstract

In this paper, we present a design method for a kind of general frequency dependent digital optimal preview servo system which is effective to improve frequency characteristics of closed loop system. By the method, for any rational expression frequency dependent weight which loads on error vector, we can design an optimal preview servo system. The result is applied to an air slide linear motor in simulation and its effectivity is proved.

Key words optimal servo system, frequency dependent servo system, preview control system