应用数学和力学，第17卷 第3期（1996年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

湍流相干结构的机理研究(Ⅱ)—粗糙壁边界层相干结构的物理模型*

刘宇陆[1]　蔡树棠[1]

（1995年4月3日收到）

摘　要

本文主要分析了粗糙壁面相干结构的特性以及与光滑壁面相干结构的区别，讨论了从光滑壁到粗糙壁过渡的问题，在此基础上建立了粗糙壁面相干结构的物理模型，从理论上得到了慢条宽度、猝发时间等物理量与动量厚度雷诺数的关系，其结果与实验结果是相符合的。

关键词　湍流理论　相干结构　粗糙壁面　物理模型

一、引　言

湍流剪切流动中湍流相干结构的发现[1～4]是60年代后期湍流实验研究中最重要的发现，它使我们改变过去对湍流性质的看法和认识，对湍流相干结构的物理本质的进一步认识，对了解湍流的发生机理、发展过程、动量与能量的传递规律，以及建立更好的湍流理论模型，均具有十分重要的意义。

壁面剪切湍流是最典型的剪切湍流之一，在[5]中，我们对光滑壁的湍流相干结构做过详细的讨论，根据实验结果的分析，在一个近似于周期的拟序过程中在扫掠之后，大部分流体沿着流向迅速流向下游，但也有一小部分残余流体粘附在壁面上而形成低流速区，即湍斑，这个低流速区在流动的过程中形成比周围流体移动得慢的慢条，这团低流速流体在Saffman上升力的作用下离开壁面向水体内部上升，而使边界层产生向外凸出的隆起。这时周围流体由于连续性的关系由上往下流动，填补空缺。当慢速流体团升高到一定的位置上，上面的流体向下移动到底部壁面，从而产生很剧烈的混合，然后流向下游，这就是所谓的扫掠，接着另一周期又开始了。根据这一分析，我们得的慢斑宽度 λ_Z 和猝发时间 T_B 的表达式为：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_Z&=\alpha_1\frac{\nu}{u_*}\\ T_B^+&=\frac{T_B u^{*2}}{\nu}=\alpha_7 R_\theta^{3/4}\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

---

* 国家自然科学基金资助项目。

1 上海市应用数学和力学研究所，上海大学，上海 200072.

其中 $a_1 \cdot a_7$ 为常数，ν为运动粘性系数，u_*为摩擦速度，R_θ为动量厚度雷诺数.

本文我们着重分析粗糙壁面下湍流相干结构的特性，讨论了相干结构的物理模型并得到了类似于（1.1）式的表达式.

二、光滑壁面向粗糙壁面的过渡特性

光滑壁面向粗糙壁过渡程中的流体力学特性是相当复杂的，为了讨论这一问题，我们首先讨论在给定流量和底坡降求水深这一水力学中经常遇到的问题.首先假定流动是二维的，并且每一断面上水深不变，平均流速分布服从对数律，设总流量为Q，流道宽度为B，于是单宽流量$q=Q/B$，于是得到如下控制方程：

（1） **光滑壁面**

流速分布为对数分布，假定卡门常数$k=0.4$，于是基本方程为：

$$\frac{u_0}{u_{*0}}=\frac{1}{k}\ln\frac{h_0u_{*0}}{\nu}+5.5 \tag{2.1}$$

$$u_{*0}^2=gh_0i \tag{2.2}$$

$$\frac{u_{m0}}{u_{*0}}=\frac{u_0}{u_{*0}}-2.5=\frac{1}{k}\ln\frac{h_0u_{*0}}{\nu}+3 \tag{2.3}$$

$$u_{m0}h_0=q \tag{2.4}$$

其中 u_0为最大流速，u_{m0}为平均流速，u_*为摩擦速度，h_0为水深，i为坡降，ν为运动粘性系数，g为重力加速度，现在未知量为u_0，u_{m0}，h和u_*，而g，q和i为已知量.为求解方便，令

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q}{\sqrt{gi}}=L^{3/2},\quad \frac{\nu}{\sqrt{gi}}=k_0^{3/2}\\&\frac{h_0}{k_0}=x,\quad \frac{q}{\nu}=Re\ \text{（雷诺数）}\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

其中 L为某一特征长度，k_0为粗糙度，于是

$$Re=\frac{q}{\nu}=\left(\frac{L}{k_0}\right)^{3/2},\quad \frac{L}{k_0}=Re^{2/3} \tag{2.6}$$

将（2.2）和（2.4）代入（2.3）式并利用（2.5）和（2.6）的关系式，最后得到

$$h_0^{3/2}\left(3.75\ln\frac{h_0}{k_0}+3\right)=L^{3/2}$$

由此得到

$$\frac{L}{h_0}=x(3.75\ln x+3)^{2/3} \tag{2.7}$$

表1给出（2.7）的数值结果.

（2） **粗糙壁面**

在粗糙壁面下，流速分布为：

$$\frac{u}{u_{*s}}=\frac{1}{k}\ln\frac{y}{k_s}+8.5 \tag{2.8}$$

表 1

x	1000	4000	6000
$\frac{L}{k_0}$	9418.3	420648	64959.1
$\frac{h_0}{L}$	0.1062	0.09509	0.092366

表 2

x_s	1000	4000	6000
$\frac{L_s}{k_s}$	8550.6	35764.2	54993.8
$\frac{h_s}{L_s}$	0.1229	0.1118	0.1091

其中 k_s为绝对粗糙度，这时求解的方程为：

$$\frac{u_s}{u_{*s}}=\frac{1}{k}\ln\frac{h_s}{k_s}+8.5 \tag{2.9}$$

$$u_{*s}^2=gh_si \tag{2.10}$$

$$\frac{u_{ms}}{u_{*s}}=\frac{u_s}{u_{*s}}-2.5=\frac{1}{k}\ln\frac{h_s}{k_s}+6 \tag{2.11}$$

$$u_{ms}h_s=q_s \tag{2.12}$$

下标“s”代表粗糙壁下的各物理量，不难看出方程组（2.9）～（2.12）是封闭的，令：

$$\frac{h_s}{k_s}=x_s$$

把（2.10）和（2.12）代入式(2.11)得到

$$\frac{\dfrac{k_s}{h_s}}{\sqrt{gh_si}}=\frac{1}{k}\ln\frac{h_s}{k_s}+6$$

解得：

$$\frac{L_s}{k_s}=x_s(2.5\ln x_s+6)^{2/3} \tag{2.13}$$

其中利用了（2.5）和（2.6）的关系式，由（2.13）得表2。

（3） 光滑壁到粗糙壁的过渡

当光滑壁开始向粗糙壁过渡时，摩擦阻力增大，所以水深应该增加，为此我们首先引入参数α，类似于（2.3）和(2.11)，令

$$\frac{u_m}{u_*}=\frac{1}{k}\ln\frac{hu_*}{\nu}+3-\alpha\left(\frac{1}{k}\ln\frac{k_su_z}{\nu}-3\right) \tag{2.14}$$

从（2.14）式可以得到：

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=1,\ u_m=u_{ms},\ u_*=u_{*s},\ h=h_s\\ \alpha=0,\ u_m=u_{m0},\ u_*=u_{*0},\ h=h_0\end{array}\right\} \tag{2.15}$$

一般情况下，u_m，u_*和h都是α的函数：

$$\left.\begin{array}{l}h\sqrt{ghi}\left[\left(\frac{1}{k}\ln\frac{h^{3/2}\sqrt{gi}}{\nu}+3\right)-\alpha\left(\frac{1}{k}\ln\frac{k_s\sqrt{ghi}}{\nu}-3\right)\right]=q\\ u_m=q/h\\ u_*=\sqrt{ghi}\end{array}\right\} \tag{2.16}$$

由（2.16）式求导得到

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \alpha}&=\frac{2\dfrac{hu_*}{u_m}\left[\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{k_s u_*}{\nu}-3\right]}{3\left[1+\dfrac{u_*}{u_{mk}}\left(1-\dfrac{\alpha}{3}\right)\right]}\\
\frac{\partial u_m}{\partial \alpha}&=-q\frac{1}{h^2}\frac{\partial h}{\partial \alpha}\\
\frac{\partial u_*}{\partial \alpha}&=\frac{1}{2h}\sqrt{ghi}\frac{\partial h}{\partial \alpha}
\end{aligned}\right\}\tag{2.17}$$

由（2.17）可以知道，当粗糙雷诺数 $R_s=\dfrac{k_s u_*}{\nu}\geqslant 3.32$ 时，存在如下关系：$\dfrac{\partial h}{\partial \alpha}>0$，$\dfrac{\partial u_m}{\partial \alpha}<0$，$\dfrac{\partial u_*}{\partial \alpha}>0$，所以一般当粗糙雷诺数在 $0<R_s<3.32$ 时，称之为从光滑壁向粗糙壁的过渡区域，此时方程（2.1）～（2.4）和（2.9）～（2.12）的表达式都不能成立。

三、粗糙壁面下的慢条宽度

在猝发过程以后，残留流体的线尺度和粘性系数ν成正比，而和摩阻流即壁面区的流速成反比，于是平均慢条的宽度λ_z为：

$$\lambda_z=\alpha_1\frac{\nu}{u_{*0}}\tag{3.1}$$

在粗糙壁面时，一般可以分为两种情况来讨论：

（1） 粗糙度 k_s 相对较小时，这时水和壁面的摩擦面积增加，相对慢斑的宽度也就增加，于是有：

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\lambda}_{s1}&=\alpha_1\frac{\nu}{u_{*1}}+\alpha_2 k_s=\frac{\nu}{u_{*1}}\left[\alpha_1+\alpha_2\frac{k_s u_{*1}}{\nu}\right]\\
\frac{\bar{\lambda}_{s1}}{\bar{\lambda}_*}&=1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{k_s u_{*1}}{\nu}\\
\bar{\lambda}_*&=\alpha_1\frac{\nu}{u_{*1}}
\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

（2） 当绝对粗糙度增大到一定的程度后，壁面突出部位之间形成死水区域，同时水和壁面之间的摩擦面积部分就被水和水之间的交界面代替，这样就类似于(3.1)式，但和光滑壁情况又有所不同，为此

$$\bar{\lambda}_{s2}=\alpha_3\frac{\nu}{u_{*2}}\tag{3.3}$$

注意到 $u_{*1}=\sqrt{gh_1 i}$，$u_{*2}=\sqrt{gh_2 i}$，并且利用(2.13)，(3.3)式可以变成：

$$\frac{\bar{\lambda}_{s2}}{\bar{\lambda}_*}=\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\sqrt{\frac{h_1}{L}}\left[\frac{1}{k}\ln\frac{h_2}{k_s}+8.5\right]\tag{3.4}$$

因为在单宽流量不变的情况下，h_2/k_s随着k_s的增加而逐渐减小，因此$\bar{\lambda}_{s2}/\bar{\lambda}_*$也随 k_s 的增加而渐步减小，这一结论与Kim[2]及Liang和Liu[3]的实验结果吻合。

四、慢斑的运动规律

慢斑的运动在粗糙面下与光滑壁下有很大的差别．它与周围流体的相对速度受到两种速度的影响，其中一个是由于粗糙度k_s和速度梯度du/dy形成的速度：

$$k_s\frac{du}{dy} \tag{4.1}$$

另一个则是摩阻速度u_*．实际上，慢斑和周围流体的相对运动的过程是相当复杂的，但作为一种近似，我们可以把它们的相对速度处理成上述两种速度的几何平均值，即将相对速度v表示为

$$v=\alpha_4\sqrt{k_s\frac{du_s}{dy}\,u_{*1}} \tag{4.2}$$

与光滑壁有所不同，粗糙壁面下，底层流场更为混乱，这时我们认为慢斑的上升高度H_s应该以ν/u_{*1}来度量，即可以完成

$$H_s=\alpha_s\Big/\frac{\nu}{u_{*1}} \tag{4.3}$$

关于慢斑的上升过程中所受到的力，根据文献［5］的分析认为是Saffman力F即：

$$F=\alpha_6\pi d^2\mu v\sqrt{\frac{du}{dy}\Big/\nu} \tag{4.4}$$

于是加速度为：

$$a=\frac{F}{m}=6\alpha_5\frac{\nu}{d}v\sqrt{\frac{du}{dy}\Big/\nu} \tag{4.5}$$

其中　d认为是与慢条的宽度有关．如果作为一种近似即将du/dy取为某一高度的平均值，则可以认为慢斑上升过程是一个匀加速过程．

五、猝发周期$\bar{T}_B$

从第一次猝发现象的结束到第二次猝发现象的结束，边界层上表面的流体逐步深入到达壁面，这时垂向速度v_h表示成：

$$v_h=\alpha_7u_1 \tag{5.1}$$

如果边界层的厚度为δ，则边界层外流体到达边壁的时间也就是猝发周期$\bar{T}_B$：

$$\bar{T}_B=\frac{\delta}{v_h}=\frac{\delta}{\alpha_7u_1} \tag{5.2}$$

这时边界层外流体在流向位移的距离l为

$$l=\bar{T}_Bu_1=\frac{\delta}{\alpha_7} \tag{5.3}$$

由上一节的分析，我们知道，我们慢斑以加速度(4.5)上升，经过了H_s的路程，则由(4.3)式我们可以得到：

$$\bar{T}_B=\sqrt{\frac{2\alpha_5\dfrac{\nu}{u_{*1}}}{a}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_5^{1/2}\alpha_6^{1/2}\alpha_4^{-1/2}\sqrt{\frac{d/u_{*1}}{\dfrac{du}{dy}}}\left[\frac{\nu}{k_su_{*1}}\right]^{1/4} \tag{5.4}$$

取慢斑尺度d为：

$$d=\alpha_8\frac{\nu}{u_{*1}} \tag{5.5}$$

由于速度分布是对数分布，并且我们取平均速度梯度为某一高度上的速度梯度，于是可以得到：

$$\frac{du}{ay}=\alpha_9\frac{u_{*1}}{h_1} \tag{5.6}$$

将(5.5)和(5.6)代入(5.4)得：

$$T_B=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \alpha_5{}^{1/2}\alpha_6{}^{1/2}\alpha_B{}^{1/2}\alpha_9{}^{1/2}\alpha_4{}^{-1/2}\ \frac{\left[\frac{u_*h_1}{\nu}\right]^{1/2}}{\left[\frac{k_3u_{*1}}{\nu}\right]^{1/4}}\ \frac{\nu}{u^2{}_{*1}} \tag{5.7}$$

无量纲猝发周期为：

$$T_B\Big/\frac{\nu}{u^2{}_{*1}}=\alpha_{10}\frac{\left[\frac{u_*h_1}{\nu}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{k_su_{*1}}{\nu}\right]^{1/4}} \tag{5.8}$$

而光滑壁与粗糙壁两种情况下的猝发周期之比为：

$$N=\frac{\left[T_B\ \frac{u^2{}_{*1}}{\nu}\right]_s}{\left[T_B\ \frac{u^2{}_{*0}}{\nu}\right]_0}=K_1\frac{\left[2.5\ln\frac{h_1}{k_3}+6\right]^{-\frac{1}{2}}}{\left[\frac{k_3u_{*1}}{\nu}\right]^{-\frac{1}{4}}} \tag{5.9}$$

其中

$$K_1=\frac{\alpha_{10}}{0.65}\left[\frac{u_{*0}h_0}{\nu}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{L}{h_0}\right]^{\frac{3}{4}}\left(Re_\delta\right)^{-\frac{3}{4}} \tag{5.10}$$

为了方便起见，$\left(2.5\ln\frac{h_1}{k_s}+6\right)^{-\frac{1}{2}}$有时可以用$k_su_{*1}/\nu$表示，例如当相对粗糙度$k_s/h_1$在$\frac{1}{6000}$到$\frac{1}{4000}$之间时，可以表示为：

$$\frac{\left[2.5\ln\frac{h_1}{k_3}+6\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{k_3u_{*1}}{\nu}\right]^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\left[\frac{k_3u_{*1}}{\nu}\right]^{0.208}}$$

六、结论和讨论

本文在文献[1]建立的物理模型基础上，分析了粗糙壁面的相干结构中的斑宽度和猝发时间与流动参数的关系，分析的基础是在一个猝发周期结束后在近壁面仍旧存在一团慢速流体团，而此流体团受到Saffman上升力的影响而上升，主流部分流体向壁面运动，在到达壁面时发生强相互作用而产生扫掠。另一方面我们实际假定了流速在边界层中满足对数律分布，对这种对数律我们也进行分析，并给出不适用的范围。所得到猝发周期的表达式与Kim，Kline和Liang等人的实验结果是相吻合的。

参考文献

[1] S. J. Kline, et al., The structure of turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, **30** (1967), 741—773.

[2] H. T. Kim, et al., The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, **50** (1971), 133.

[3] Z. C. Liang, and S. H. Liu, Effects of wall roughness on the coherent structure in turbulent shear flows, *J. Hydrodynamics*, (1) (1989), 15—22.

[4] P. G. Saffman, The lift on a small sphere in a shear flow, *J. Fluid Mech.*, **22**(2) (1965), 385—400.

[5] 蔡树棠、刘宇陆，湍流相干结构的机理研究（Ⅰ）——光滑壁面边界层相干结构的物理模型，应用数学和力学，**16**(4) (1995).

On the Mechanism of Turbulent Coherent Structure (Ⅱ) ——A Physical Model of Coherent Structure for the Rough Boundary Layer

Liu Yulu　Cai Shutang

(*Shanghai Inst. of Appl. Math. and Mech., Shanghai University, Shanghai* 200072, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, the difference of turbulent coherent structure between the smooth and rough boundary layers are analysed. Based on the discussing the transient properties from the smooth wall to the roughwall, the physical model of coherent structure for the rough boundary layer is established. The width of slowly moving turbulent spot and the bursting time are obtained, which are in agreement with experimental results.

Key words turbulent theory, coherent structure, rough boundary layer