应用数学和力学，第17卷 第2期（1996年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Banach空间中二阶常微分方程的两点边值问题解的存在性定理*

张石生[1]　王　凡[2]

（1994年8月16日收到）

摘　要

本文利用半序方法，在Banach空间中研究了一类更一般的二阶常微分方程两点边值问题解的存在性唯一性定理。

关键词　两点边值问题　弱序列完备的Banach空间　正规锥

一、引　言

文中[1]，郭大钧和V. Lakshmikantham研究了Banach空间中二阶常微分方程两点边值问题

$$\left.\begin{array}{ll} -u''=f(t,\ u), & t\in I=[0,\ 1] \\ u(0)=u(1)=\theta & \end{array}\right\} \tag{*}$$

的多重正解的存在性。本文中，我们利用半序理论研究Banach空间中更为一般的二阶常微分方程两点边值问题

$$\left.\begin{array}{ll} -u''=f(t,\ u,\ u), & t\in I \\ u(0)=u(1)=\theta & \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

的解的存在唯一性问题。在本文中，我们对$f(t,\ x,\ y)$没有使用紧性条件，特别，本文定理1，没有假定$f(t,\ x,\ y)$关于x或关于y是单调的，但我们证明了在某些条件下，两点边值问题(1.1)在一序区间中存在唯一解。

设E是Banach空间，$\|\cdot\|$是E中的范数，$I=[0,\ 1]$。记

$$C[I,\ E]=\{u(t):I\to E\,|\,u\text{连续}\}$$

$$C^2[I,\ E]=\{u(t):I\to E\,|\,u\ \text{二阶连续可微}\}$$

对$u=u(t)\in C[I,\ E]$，定义范数$\|u\|_C=\max\limits_{t\in I}\|u(t)\|$，易知$C[I,E]$在$\|\cdot\|_C$下为一Banach空间。

设P是E中的锥，"$\leqslant$"是由P导出的半序，对$u=u(t)$，$v=v(t)\in C[I,\ E]$，如果对任何$t\in I$，有$u(t)\leqslant v(t)$，则记$u\leqslant v$。

---

* 国家自然科学基金资助课题

1 四川大学，成都 610064；2 江苏工商行政管理学校，南通 226000

记E^*为E的共轭空间，P^*为P的共轭锥，即

$$P^*=\{\varphi\in E^*|\varphi(x)\geqslant 0,\ \forall x\in P\}$$

二、主要结果

定理1　设E是弱序列完备的Banach空间，P是E中的正规锥，$f:I\times E\times E\to E$连续.如果存在v_0，$w_0\in C^2[I,\ E]$，$v_0\leqslant w_0$，使得下列假设成立：

(A_1)　存在常数$M>0$，使对任给x_1，x_2，$y\in[v_0,\ w_0]=\{u\in C[I,\ E]|v_0\leqslant u\leqslant w_0\}$，$x_1\leqslant x_2$，都有

$$f(t,\ x_2,\ y)-f(t,\ x_1,\ y)\geqslant -M(x_2-x_1)$$

(A_2)　存在常数L，$M>L\geqslant 0$，使对任给x，y_1，$y_2\in[v_0,\ w_0]$，$y_1\leqslant y_2$，都有

$$f(t,\ x,\ y_1)-f(t,\ x,\ y_2)\geqslant -L(y_2-y_1)$$

(A_3)　存在常数K，$M>K>L$，使对任给x，$y\in[v_0,\ w_0]$，$x\leqslant y$，都有

$$f(t,\ x,\ y)-f(t,\ y,\ x)\geqslant(K+L)(y-x)$$

(A_4)
$$-v_0''+L(w_0-v_0)\leqslant f(t,\ v_0,\ w_0),\quad v_0(0)\geqslant v_0(1)=\theta \tag{2.1}$$
$$-w_0''-L(w_0-v_0)\geqslant f(t,\ w_0,\ v_0),\quad w_0(0)\leqslant w_0(1)=\theta \tag{2.2}$$

则两点边值问题(1.1)在$[v_0,\ w_0]$中存在唯一解$u^*(t)$，且对任给$u_0\in[v_0,\ w_0]$，迭代序列

$$\begin{aligned}u_n(t)=&t\int_0^1 dr\int_0^r f(s,\ u_{n-1}(s),\ u_{n-1}(s))ds\\&-(M-L)t\int_0^1 dr\int_0^r(u_n(s)-u_{n-1}(s))ds\\&+(M-L)\int_0^t dr\int_0^r(u_n(s)-u_{n-1}(s))ds\\&-\int_0^t dr\int_0^r f(s,\ u_{n-1}(s),\ u_{n-1}(s))ds,\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)\end{aligned} \tag{2.3}$$

都在I上依E中的范数一致收敛于$u^*(t)$.

注1　在定理1中，我们对$f(t,\ x,\ y)$仅假定了满足序的几个条件，而对$f(t,\ x,\ y)$没有作任何紧性方面的假定，且我们讨论的$f(t,\ x,\ y)$关于x既不是增的，关于y也不是减的．如果$f(t,\ x,\ y)$关于y是减的，那么由定理1（取$L=0$）直接可得如下的结果：

定理2　设E，P同定理1，$f:I\times E\times E\to E$连续，如果下列假设成立：

(B_1)　存在v_0，$w_0\in C^2[I,\ E]$，使$v_0\leqslant w_0$，且

$$-v_0''\leqslant f(t,\ v_0,\ w_0),\quad v_0(0)\geqslant v_0(1)=\theta$$
$$-w_0''\geqslant f(t,\ w_0,\ v_0),\quad w_0(0)\leqslant w_0(1)=\theta$$

(B_2)　对任给$(t,\ x)\in I\times E$，$f(t,\ x,\ y)$关于y是减的，即若$(t,\ x)\in I\times E$，$y_1,y_2\in E$ $y_1\leqslant y_2$，则有

$$f(t,\ x,\ y_1)\geqslant f(t,\ x,\ y_2)$$

(B_3)　存在常数$M>0$，使对任给x_1，x_2，$y\in[v_0,\ w_0]$，$x_1\leqslant x_2$，都有

$$f(t,\ x_2,\ y)-f(t,\ x_1,\ y)\geqslant -M(x_2-x_1)$$

(B_4)　存在常数K，$M>K>0$，使对任给x，$y\in[v_0,\ w_0]$，$x\leqslant y$，都有

$$f(t,\ x,\ y)-f(t,\ y,\ x)\geqslant K(y-x)$$

则两点边值问题(1.1)在$[v_0,\ w_0]$中有唯一解$u^*(t)$，且对任给$u_0\in[v_0,\ w_0]$，迭代序列

$$u_n(t)=t\int_0^1 dr\int_0^r f(s,\ u_{n-1}(s),\ u_{n-1}(s))ds-Mt\int_0^1 dr\int_0^r(u_n(s)-u_{n-1}(s))ds$$

$$+M\int_0^t dr\int_0^r(u_n(s)-u_{n-1}(s))ds-\int_0^t dr\int_0^r f(s,\ u_{n-1}(s),\ u_{n-1}(s))ds$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

都在I上依E中的范数一致收敛于$u^*(t)$.

当$f(t,\ x,\ y)$与y无关时，由定理2，我们直接可得下面的推论：

推论 设E，P同定理1，$f:I\times E\to E$连续，如果下列条件成立：

(i) 存在v_0，$w_0\in C^2[I,\ E]$，$v_0\leqslant w_0$，并且v_0和w_0分别是(*)的下解和上解，即

$$-v_0''\leqslant f(t,\ v_0),\ v_0(0)\geqslant v_0(1)=\theta$$

$$-w_0''\geqslant f(t,\ w_0),\ w_0(0)\leqslant w_0(1)=\theta$$

(ii) 存在常数M，$K(M>K>0)$，使对任给x，$y\in[v_0,\ w_0]$，$x\leqslant y$，都有

$$-K(y-x)\geqslant f(t,\ y)-f(t,\ x)\geqslant -M(y-x)$$

则两点边值问题(*)在$[v_0,\ w_0]$中有唯一解$u^*(t)$，且对任给$u_0\in[v_0,\ w_0]$，迭代序列

$$u_n(t)=t\int_0^1 dr\int_0^r f(s,\ u_{n-1}(s))ds-Mt\int_0^1 dr\int_0^r(u_n(s)-u_{n-1}(s))ds$$

$$+M\int_0^t dr\int_0^r(u_n(s)-u_{n-1}(s))ds-\int_0^t dr\int_0^r f(s,\ u_{n-1}(s))ds$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

都在I上依E中的范数一致收敛于$u^*(t)$.

注2 若条件(ii)中只有右端不等式，而没有左端不等式的限制，[2]中定理1证明了解的存在性，但未能得到唯一性的结论．因此，本推论起着补充和丰富的作用．

三、定理1的证明

(一) 对任何给定的h_1，$h_2\in[v_0,\ w_0]$，考察Banach空间二阶线性常微分方程两点边值问题

$$\left.\begin{aligned}&-u''=f(t,\ h_1,\ h_2)-M(u-h_1)+L(u-h_2)\\&u(0)=u(1)=\theta\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

直接验证可知

$$u(t)=t\int_0^1 dr\int_0^r f(s,\ h_1(s),\ h_2(s))ds-Mt\int_0^1 dr\int_0^r(u(s)-h_1(s))ds$$

$$+Lt\int_0^1 dr\int_0^r(u(s)-h_2(s))ds-\int_0^t dr\int_0^r f(s,\ h_1(s),\ h_2(s))ds$$

$$+M\int_0^t dr\int_0^r(u(s)-h_1(s))ds-L\int_0^t dr\int_0^r(u(s)-h_2(s))ds$$

是两点边值问题(3.1)的唯一解.

对任何给定的h_1，$h_2\in[v_0,\ w_0]$，定义$A(h_1,\ h_2)=u$，其中$A(h_1,\ h_2)$满足以下方程

$$A(h_1,\ h_2)(t)=t\int_0^1 dr\int_0^r f(s,\ h_1(s),\ h_2(s))ds$$

$$-Mt\int_0^1 dr\int_0^r (A(h_1, h_2)(s)-h_1(s))ds+Lt\int_0^1 dr\int_0^r (A(h_1, h_2)(s)-h_2(s))ds$$

$$-\int_0^t dr\int_0^r f(s, h_1(s), h_2(s))ds+M\int_0^t dr\int_0^r (A(h_1, h_2)(s)-h_1(s))ds$$

$$-L\int_0^t dr\int_0^r (A(h_1, h_2)(s)-h_2(s))ds \tag{3.2}$$

则 $A:[v_0, w_0]\times[v_0, w_0]\to C[I, E]$. 易知$h$是两点边值问题 (1.1) 的解当且仅当 $A(h, h)=h$. 事实上，若$A(h, h)=h$, 则由(3.2)式可得

$$A(h, h)''(t)=-f(t, h(t), h(t))+M(A(h, h)(t)-h(t))$$
$$-L(A(h, h)(t)-h(t))$$

从而有$-h''=f(t, h, h)$, 又显然有$h(0)=h(1)=\theta$, 于是h是两点边值问题(1.1)的解.

反之，若h是(1.1)的解，由$-h''(t)=f(t, h(t), h(t))$和(3.2)式，有

$$\begin{aligned}A(h, h)''(t)&=-f(t, h(t), h(t))+M(A(h, h)(t)-h(t))\\&\quad-L(A(h, h)(t)-h(t))\\&=-f(t, h(t), h(t))+(M-L)(A(h, h)(t)-h(t))\\&=h''(t)+(M-L)(A(h, h)(t)-h(t))\end{aligned}$$

即

$$(A(h, h)-h)''-(M-L)(A(h, h)-h)=\theta$$

从而由$h(0)=h(1)=\theta$, 即得二阶线性微分方程两点边值问题

$$\left.\begin{aligned}&(A(h, h)-h)''-(M-L)(A(h, h)-h)=\theta\\&(A(h, h)-h)''(0)=(A(h, h)-h)''(1)=\theta\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

显然问题(3.3)只有零解，故$A(h, h)=h$.

（二） 证明

$$v_0\leqslant v_1=A(v_0, w_0),\quad A(w_0, v_0)=w_1\leqslant w_0 \tag{3.4}$$

对任一给定的$\varphi\in P^*$, 令

$$\alpha(t)=\varphi(v_0(t)-v_1(t)) \tag{3.5}$$

由(3.2)和(3.4)式知，v_1满足 $-v_1''=f(t, v_0, w_0)-M(v_1-v_0)+L(v_1-w_0)$, 又由(2.1)有$v_0''\geqslant -f(t, v_0, w_0)+L(w_0-v_0)$, 故

$$\begin{aligned}\alpha''&=\varphi(v_0''-v_1'')\\&\geqslant\varphi(-f(t, v_0, w_0)+L(w_0-v_0)-v_1'')\\&=\varphi(-f(t, v_0, w_0)+L(w_0-v_0)+f(t, v_0, w_0)\\&\quad-M(v_1-v_0)+L(v_1-w_0))\\&=\varphi(M(v_0-v_1)-L(v_0-v_1))\\&=(M-L)\varphi(v_0-v_1)\end{aligned}$$

即

$$\alpha''(t)\geqslant(M-L)\alpha(t) \tag{3.6}$$

由于$v_1(0)=v_1(1)=\theta$, 又由(2.1)式有$v_0(0)\geqslant v_0(1)=\theta$, 从而可得

$$\alpha(0)=\varphi(v_0(0)-v_1(0))\geqslant\varphi(v_0(1)-v_1(1))=\alpha(1)=0 \tag{3.7}$$

下证

$$\alpha(t)\leqslant 0,\qquad t\in I$$

如若不然，则存在$t_0\in I$，使$\alpha(t_0)=\max\limits_{t\in I}\alpha(t)>0$。由(3.7)式知，$t_0\neq 1$，故$t_0\in[0,1)$，于是$\alpha''(t_0)\leqslant 0$，从而由(3.6)式和$M-L>0$即得

$$0\geqslant\alpha''(t_0)\geqslant(M-L)\alpha(t_0)>0$$

这一矛盾说明，$\alpha(t)\leqslant 0$，$t\in I$。于是，由(3.5)式知，对任给$\varphi\in P^*$，都有

$$\varphi(v_0(t)-v_1(t))\leqslant 0$$

这说明，$v_0\leqslant v_1=A(v_0,w_0)$。同理可证$A(w_0,v_0)=w_1\leqslant w_0$，即(3.4)式成立。

（三） 证明对任给h_i，$k_i\in[v_0,w_0]$ $(i=1,2)$，$h_1\leqslant h_2$，$k_2\leqslant k_1$，都有

$$A(h_1,k_1)\leqslant A(h_2,k_2) \tag{3.8}$$

任取$\varphi\in P^*$，令

$$\beta(t)=\varphi(A(h_2,k_2)(t)-A(h_1,k_1)(t))$$

由假设(A_1)和(A_2)

$$\begin{aligned}f(t,h_1,k_1)+Mh_1-Lk_1&\leqslant f(t,h_2,k_1)+Mh_2-Lk_1\\&\leqslant f(t,h_2,k_2)+Mh_2-Lk_2\end{aligned} \tag{3.9}$$

由(3.2)式知

$$\left.\begin{aligned}&-A(h_i,k_i)''=f(t,h_i,k_i)-M(A(h_i,k_i)-h_i)+L(A(h_i,k_i)-k_i)\\&A(h_i,k_i)(0)=A(h_i,k_i)(1)=\theta,\qquad(i=1,2)\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

从而有

$$\begin{aligned}\beta''&=\varphi(A(h_2,k_2)''-A(h_1,k_1)'')\\&=(M-L)\varphi(A(h_2,k_2)-A(h_1,k_1))\\&\quad-\varphi([f(t,h_2,k_2)+Mh_2-Lk_2]-[f(t,h_1,k_1)+Mh_1-Lk_1])\end{aligned}$$

于是由(3.9)式即得

$$\beta''(t)\leqslant(M-L)\varphi(A(h_2,k_2)(t)-A(h_1,k_1)(t))=(M-L)\beta(t) \tag{3.11}$$

易证

$$\beta(t)\geqslant 0,\qquad t\in I$$

事实上，若存在$t_0\in I$，使$\beta(t_0)=\min\limits_{t\in I}\beta(t)<0$。由(3.10)式知，$\beta(0)=\beta(1)=0$，因而$t_0\neq 0$，1，即$t_0\in(0,1)$，于是$\beta''(t_0)\geqslant 0$，从而由(3.11)式和$M-L>0$，有

$$0\leqslant\beta''(t_0)\leqslant(M-L)\beta(t_0)<0$$

这一矛盾说明，$\beta(t)\geqslant 0$，$t\in I$。即有

$$\varphi(A(h_2,k_2)(t)-A(h_1,k_1)(t))\geqslant 0$$

由$\varphi\in P^*$的任意性，即知(3.8)式成立。

（四） 令

$$v_n=A(v_{n-1},w_{n-1}),\ w_n=A(w_{n-1},v_{n-1})\qquad(n=1,2,\cdots) \tag{3.12}$$

由$v_0\leqslant w_0$和(3.4)，(3.8)式，利用归纳法易证得

$$v_0\leqslant v_1\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant w_n\leqslant\cdots\leqslant w_1\leqslant w_0 \tag{3.13}$$

现来证明$\{v_n\}$和$\{w_n\}$在$C[I,E]$中是基本列。

用反证法。假设$\{v_n\}$在$C[I,E]$中不是基本列，则必存在$\varepsilon_0>0$及$\{n\}$的子列$\{n_i\}$和$\{m_i\}$，以及$\{t_i\}\subset I$，使

$$\|v_{n_i}(t_i)-v_{m_i}(t_i)\|\geqslant\varepsilon_0,\qquad(i=1,2,\cdots) \tag{3.14}$$

不失一般性，可设t_i收敛于某$t^*\in I$。对任意的h_1，$h_2\in[v_0, w_0]$，由假设(A_1)和(A_2)易知

$$f(t, v_0, w_0)+Mv_0-Lw_0\leqslant f(t, h_1, h_2)+Mh_1-Lh_2$$
$$\leqslant f(t, w_0, v_0)+Mw_0-Lv_0$$

由P是正规锥知，$C[I, E]$中的锥$P_C=\{u\in C[I, E]|u(t)\geqslant\theta, t\in I\}$是正规的，从而由上式和(3.13)式知（参见[3，CH.3，定理1.2]），存在常数C_0，$C_1>0$，使

$$\|f(t, h_1, h_2)+Mh_1-Lh_2\|_C\leqslant C_0, \qquad \forall h_1, h_2\in[v_0, w_0] \tag{3.15}$$
$$\|v_n\|_C\leqslant C_1, \qquad (n=1, 2, \cdots) \tag{3.16}$$

因为对每个v_n和τ_1，$\tau_2\in I$（不妨设$\tau_1\leqslant\tau_2$），由(3.12)和(3.2)式可知

$$\begin{aligned}
v_n(\tau_1)-v_n(\tau_2)=&(\tau_1-\tau_2)\int_0^1 dr\int_0^r f(s, v_{n-1}(s), w_{n-1}(s))ds\\
&-M(\tau_1-\tau_2)\int_0^1 dr\int_0^r(v_n(s)-v_{n-1}(s))ds\\
&+L(\tau_1-\tau_2)\int_0^1 dr\int_0^r(v_n(s)-w_{n-1}(s))ds\\
&+\int_{\tau_1}^{\tau_2}dr\int_0^r f(s, v_{n-1}(s), w_{n-1}(s))ds\\
&-M\int_{\tau_1}^{\tau_2}dr\int_0^1(v_n(s)-v_{n-1}(s))ds+L\int_{\tau_1}^{\tau_2}dr\int_0^1(v_n(s)-w_{n-1}(s))ds\\
=&(\tau_1-\tau_2)\int_0^1 dr\int_0^r[f(s, v_{n-1}(s), w_{n-1}(s))\\
&+Mv_{n-1}(s)-Lw_{n-1}(s)]ds\\
&-(M-L)(\tau_1-\tau_2)\int_0^1 dr\int_0^r v_n(s)ds\\
&+\int_{\tau_1}^{\tau_2}dr\int_0^r[f(s, v_{n-1}(s), w_{n-1}(s))+Mv_{n-1}(s)-Lw_{n-1}(s)]ds\\
&-(M-L)\int_{\tau_1}^{\tau_2}dr\int_0^r v_n(s)ds
\end{aligned}$$

从而由上式和(3.15)，(3.16)式易推得

$$\|v_n(\tau_1)-v_n(\tau_2)\|\leqslant C_0|\tau_1-\tau_2|+(M-L)C_1|\tau_1-\tau_2|$$
$$+C_0|\tau_1-\tau_2|+(M-L)C_1|\tau_1-\tau_2|$$

于是存在$\delta>0$，使得对τ_1，$\tau_2\in I$，当$|\tau_1-\tau_2|<\delta$时，就有

$$\|v_n(\tau_1)-v_n(\tau_2)\|\leqslant\varepsilon_0/4$$

由$t_i\to t^*$知，存在i_0，当$i\geqslant i_0$时，有$|t_i-t^*|<\delta$，所以由上式知，当$i\geqslant i_0$时，有

$$\|v_{n_i}(t_i)-v_{n_i}(t^*)\|<\varepsilon_0/4, \quad \|v_{m_i}(t_i)-v_{m_i}(t^*)\|<\varepsilon_0/4 \tag{3.17}$$

于是由(3.14)和(3.17)式可知，当$i\geqslant i_0$时，有

$$\|v_{n_i}(t^*)-v_{m_i}(t^*)\|\geqslant\varepsilon_0/2$$

这说明$\{v_n(t^*)\}$在E中不是基本列。

由于P是正规锥，所以由[4，命题19.4]知，P^*是再生的，即对任给的$\varphi\in E^*$，存在φ_1，$\varphi_2\in P^*$，使得$\varphi=\varphi_1-\varphi_2$。由(3.13)式，有

$$\varphi_i(v_0(t^*))\leqslant\varphi_i(v_1(t^*))\leqslant\cdots\leqslant\varphi_i(v_n(t^*))\leqslant\cdots\leqslant\varphi_i(w_0(t^*)) \qquad (i=1, 2)$$

这说明$\{\varphi_i(v_n(t^*))\}$ $(i=1, 2)$是$R=(-\infty, +\infty)$中基本列，从而$\{\varphi(v_n(t^*))\}$是R中基本列，由$\varphi\in E^*$的任意性知，$\{v_n(t^*)\}$是E中的弱基本列。由假设E是弱序列完备的，故存在$y\in E$，使$v_n(t^*)\xrightarrow{弱}y$。由于$\{v_n(t^*)\}$在E的范数下不是基本列，故必存在$\varepsilon_1>0$及$\{v_n(t^*)\}$的某子列$\{v_{k_i}(t^*)\}$，使得

$$\|v_{k_i}(t^*)-y\|\geqslant\varepsilon_1 \qquad (i=1, 2, \cdots) \tag{3.18}$$

由P是正规锥，故存在常数$N>0$，使当$\theta\leqslant x\leqslant z$，有

$$\|x\|\leqslant N\|z\| \tag{3.19}$$

由于$\{v_{k_i}(t^*)\}$弱收敛于y，于是由Mazur定理([5, p.120])，存在$\lambda_i\geqslant 0$，$i=0, 1, 2,\cdots, m$，$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$($m$为某个正整数)，使

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i v_{k_i}(t^*)-y\right\|\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2N} \tag{3.20}$$

由(3.13)式和$v_n(t^*)\xrightarrow{弱}y$可知，$v_n(t^*)\leqslant y$ $(n=1, 2, \cdots)$，从而由(3.13)式易知

$$\theta\leqslant y-v_{k_m}(t^*)\leqslant y-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i v_{k_i}(t^*)$$

于是由(3.19)和(3.20)式即得

$$\left\|y-v_{k_m}(t^*)\right\|\leqslant N\left\|y-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i v_{k_i}(t^*)\right\|\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2}$$

与(3.18)矛盾。这说明$\{v_n\}$是$C[I, E]$中基本列，因而存在$p=p(t)\in C[I, E]$，使$\{v_n\}$在$C[I, E]$中收敛于p。同理可证$\{w_n\}$是$C[I, E]$中基本列，且在$C[I, E]$中收敛于$q=q(t)\in C[I, E]$。由(3.13)式，有

$$p\leqslant q \tag{3.21}$$

由(3.12)和(3.2)式可知，$\{v_n\}$和$\{w_n\}$分别满足

$$\begin{cases}-v_n''(t)=f(t, v_{n-1}(t), w_{n-1}(t))-M(v_n(t)-v_{n-1}(t))\\ \qquad\qquad +L(v_n(t)-w_{n-1}(t))\\ v_n(0)=v_n(1)=\theta\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}-w_n''(t)=f(t, w_{n-1}(t), v_{n-1}(t))-M(w_n(t)-w_{n-1}(t))\\ \qquad\qquad +L(w_n(t)-v_{n-1}(t))\\ w_n(0)=w_n(1)=\theta\end{cases}$$

由于f是连续的，易证明$\{v_n''(t)\}$和$\{w_n''(t)\}$在I上依E中范数分别一致收敛于$p''(t)$和$q''(t)$，且有

$$\left.\begin{aligned}&-p''(t)=f(t, p(t), q(t))+L(p(t)-q(t))\\ &p(0)=p(1)=\theta\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&-q''(t)=f(t, q(t), p(t))+L(q(t)-p(t))\\ &q(0)=q(1)=\theta\end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

（五） 证明$p(t)=q(t)$，$t\in I$，且$u^*(t)=p(t)$是两点边值问题(1.1)在$[v_0, w_0]$中的唯一解。

假定在I上$p\neq q$，则存在$t_0\in I$，使

$$\|q(t_0)-p(t_0)\|=\max_{t\in I}\|q(t)-p(t)\|>0$$

由(3.22)和(3.23)和式知$t_0\neq 0, 1$，即$t_0\in(0, 1)$。取$\psi\in P^*$，使$\|\psi\|=1$，$\psi(q(t_0)-p(t_0))=\|q(t_0)-p(t_0)\|$。令

$$\gamma(t)=\psi(q(t)-p(t))$$

由(3.21)式可知$\gamma(t)\geqslant 0$，且由$\|\psi\|=1$和$\|q(t_0)-p(t_0)\|=\max_{t\in I}\|q(t)-p(t)\|$推得

$$\gamma(t)\leqslant\|\psi\|\|q(t)-p(t)\|\leqslant\|q(t_0)-p(t_0)\|=\gamma(t_0)$$

于是

$$\gamma(t_0)=\max_{t\in I}\gamma(t)>0, \qquad t_0\in(0, 1) \tag{3.24}$$

由(3.22)，(3.23)式和假设(A_3)，有

$$\begin{aligned}\gamma''(t)&=\psi(q''(t)-p''(t))\\&=\psi[f(t, p(t), q(t))-f(t, q(t), p(t))-2L(q(t)-p(t))]\\&\geqslant\psi[(K+L)(q(t)-p(t))-2L(q(t)-p(t))]\\&=(K-L)\psi(q(t)-p(t))=(K-L)\gamma(t)\end{aligned}$$

又由(3.24)式知$\gamma''(t_0)\leqslant 0$，于是由上式和$K>L$，即有

$$0\geqslant\gamma''(t_0)\geqslant(K-L)\gamma(t_0)>0$$

这一矛盾说明必有$p(t)=q(t)$，$t\in I$。记$u^*=p=q$，从而由(3.22)式可见$u^*(t)$是两点边值问题(1.1)的解。

又设$\bar{u}\in[v_0, w_0]$是(1.1)的任一解，于是$v_0\leqslant\bar{u}\leqslant w_0$，$A(\bar{u}, \bar{u})=\bar{u}$。由(3.8)式知，$A(v_0, w_0)\leqslant A(\bar{u}, \bar{u})\leqslant A(w_0, v_0)$，即

$$v_1\leqslant\bar{u}\leqslant w_1$$

由归纳法易推得

$$v_n\leqslant\bar{u}\leqslant w_n \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

在上式中令$n\to\infty$取极限，由$\{v_n\}$和$\{w_n\}$在$C[I, E]$中都收敛于u^*，可得$u^*\leqslant\bar{u}\leqslant u^*$，即$u^*(t)\leqslant\bar{u}(t)\leqslant u^*(t)$，$t\in I$。于是由$P$的正规性有$u^*(t)=\bar{u}(t)$，$t\in I$，从而$u^*(t)$是两点边值问题(1.1)在$[v_0, w_0]$中的唯一解。

此外，对任一$u_0\in[v_0, w_0]$，易知迭代序列(2.3)可以表为

$$u_n=A(u_{n-1}, u_{n-1}) \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

由(3.8)式，利用归纳法易得

$$v_n\leqslant u_n\leqslant w_n \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

因此$u_n(t)$在I上依E中范数一致收敛于$u^*(t)$。

参考文献

[1] Guo Dajun and V. Lakshmikantham, Multiple solutions of two-point boundary value problems of ordinary differential equations in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 129 (1988), 211—222.

[2] 宋福民, Banach空间中两点边值问题的解, 数学年刊, 14A(6) (1993), 692—697.

[3] 郭大钧，《非线性泛函分析》，山东科技出版社（1985）.
[4] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1985).
[5] K. Yoside, *Functional Analysis*, Fifth Edition, Springer-Verlag, Berlin (1978).

Existence Theorems of Solutions for Two-Point Boundary Value Problem of Second Order Ordinary Differential Equations in Banach Spaces

Zhang Shisheng

(*Sichuan University, Chengdu* 610064, *P.R.China*)

Wang Fan

(*Nantong Teacher's College, Nanton, Jiangsu* 226000, *P.R.China*)

Abstract

By using partial order method, some existing theorems of solutions for two-point boundary valve problem of second order ordinary differential equations in Banach spaces are given.

Key words two-point boundary value problem, weakly sequentially complete Banach space, normal cone