应用数学和力学，第17卷 第2期（1996年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

开孔薄板非线性分析的数学模型和广义变分原理*

程昌钧[1]　　杨　骁[1]

（钱伟长推荐，1995年2月22日收到）

摘　　要

基于薄板非线性弯曲的 Kirchhoff-Kármán 假设，本文提出了在任意中面边界条件下任意开孔薄板非线性分析的三类边值问题并建立了相应的广义变分原理。能够看到在本文中提出的数学模型完全是一种新的不同于 Kármán 理论的模型。这些数学模型能够应用于任意中面边界条件下开孔薄板的非线性分析和稳定性分析。

关键词　开孔薄板　非线性分析　数学模型　广义变分原理

一、引　　言

已有不少理论可以用来分析无孔板的非线性弯曲，如象，Kármán 理论，Reissner 理论和方向子理论[1]等。然而，直到本世纪80年代初，还没有一个可用来分析开孔薄板和薄壳非线性问题的既简单又合理的理论。1984年，基于 Kirchhoff-Kármán 假设，程昌钧最初提出了分析开孔薄板非线性问题的理论框架。1985年，[2]中作者首先建立了当作用于开孔薄板每条边界$\Gamma^i(i=1,2,\cdots.m)$上的中面外力X_α自身平衡时的边界值问题（用BVP Ⅱ表示）。之后，[3]中作者建立了在Γ^i上的中面外力X_α自身不平衡时的BVP Ⅱ；并证明了在这种情况下，应力函数F可以分解为两部份之和，其中一部份为单值函数F^*，而另一部份$\hat{F}$为一些已知多值函数之和。1991年，[4]中作者提出了用来分析开孔薄板屈曲和过屈曲的三类边值问题。作为这些模型的应用，已有许多文章分析了环形板的屈曲和过屈曲[5~8]。在[11]中，证明了 BVP Ⅱ的分支解的存在性，而在[12]中建立了 BVP Ⅱ相应的变分原理和有限元方法。同时，已将这些数学模型推广到了开孔柱壳和开孔夹层板的相应问题[9,10]。在本文中，我们进一步推广[2,3,4]中的数学模型使之能适用于任意开孔薄板在任意边界条件下非线性分析的最一般情况。能够看到，这里的数学理论是 Kármán 理论的推广，但它们又不同于 Kármán 理论。因此，这一理论是一种新的理论，并适用于任意边界条件下的开孔薄板的非线性分析。同时在本文中，我们还建立了相应于三类边值问题的广义变分原理，根据这些变分原理可以建立相应的有限元方法。还需指出，本文建立的数学模型和相应的变

* 国家教委博士点基金资助项目

1 兰州大学力学系，兰州 730000

分原理当挠度 $w=0$ 时可以用来分析开孔板的平面应力问题。

二、开孔薄板非线性分析的数学模型

设具有 m 个孔的薄板，其厚度为 h，材料常数为 E，ν。设未变形的中平面与坐标平面 Ox_1x_2 重合，并占有 Ox_1x_2-平面内的区域 Ω。令 Γ 是 Ω 的边界，并且

$$\Gamma=\Gamma^0\ (\text{外边界})+\sum_{i=1}^{m}\Gamma^i\ (\text{内边界})$$

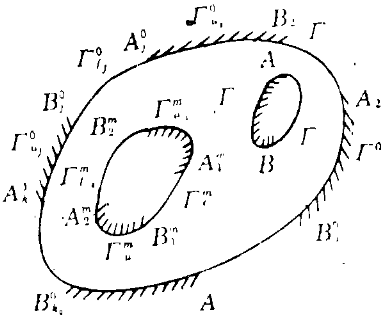

图1 开孔薄板

设 Γ 是光滑的，同时在 Γ 的一部份边界 Γ_w 上给定挠度 w 和转角 θ，记为 $\bar{w}$ 和 $\bar{\theta}$，而在另一部份边界 $\Gamma_\sigma\equiv\Gamma-\Gamma_w$ 上给定剪力 V_n 和弯矩 M_n，记为 $\bar{V}_n$ 和 $\bar{M}_n$。同时，设沿边界 $\Gamma^i_{fj}(i=0,1,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,k_i)$ 的薄膜力 $(\bar{X}_1,\ \bar{X}_2)$ 及沿边界 $\Gamma^i_{uj}\equiv\Gamma^i-\Gamma^i_{fj}$ 的位移 $(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2)$ 都是指定的（参看图1）。因此，我们有

$$\Gamma=\Gamma_w+\Gamma_\sigma,\quad \Gamma^i=\sum_{j=1}^{k_i}(\Gamma^i_{fj}+\Gamma^i_{uj}),\qquad (i=0,1,2,\cdots,m)$$

令中面位移为 $u_\alpha(\alpha=1,2)$，挠度为 w，则由 Kirchhoff-Kármán 假设，已变形板的曲率张量 $K_{\alpha\beta}$ 和应变张量 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 为

$$K_{\alpha\beta}=-w_{,\alpha\beta} \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}+w_{,\alpha}w_{,\beta})/2 \tag{2.2}$$

弯矩 $M_{\alpha\beta}$ 和薄膜力 $N_{\alpha\beta}$ 为

$$M_{\alpha\beta}=D[(1-\nu)K_{\alpha\beta}+\nu K_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \tag{2.3}$$

$$N_{\alpha\beta}=\frac{Eh}{1-\nu^2}[(1-\nu)\varepsilon_{\alpha\beta}+\nu\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \tag{2.4}$$

平衡方程为

$$\left\{\begin{array}{ll} N_{\alpha\beta,\beta}=0 & \qquad (2.5\text{a})\\ & x_\alpha\in\Omega \\ M_{\alpha\beta,\alpha\beta}+N_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}+q=0 & \qquad (2.5\text{b})\end{array}\right.$$

式中，$q=q(x_\alpha)$ 为横向载荷，为了方便起见，这里采用了张量记号，下标 α，β 等取值 1,2，$\delta_{\alpha\beta}$ 为 Kronecker δ 符号。

对于开孔薄板，由于 Ω 是多联通区域，一般地说，由（2.5a）决定的应力函数 F 是多值的。在[3]中已证明，F 可以分解为两部份，并有

$$N_{\alpha\beta}=he_{\alpha\gamma}e_{\beta\gamma}F_{,\gamma\delta} \tag{2.6}$$

$$F=F^*+\hat{F},\quad \hat{F}=-\frac{1}{2\pi h}\sum_{i=1}^{m}(M^i+e_{\alpha\beta}T^i_\alpha x_\beta)\ \mathrm{arctg}\frac{x_2-x_2^i}{x_1-x_1^i} \tag{2.7}$$

式中，F^* 为单值函数，$\hat{F}$ 是一些多值函数之和，并且 $(x_1^i,\ x_2^i)$ 为由 Γ^i 所围区域内的任意一点；T^i_α 和 M^i 定义为

$$T_{\alpha}^{i}=\oint_{\Gamma^{i}} X_{\alpha}ds,\quad M^{i}=\oint_{\Gamma^{i}} e_{\alpha\beta}x_{\alpha}X_{\beta}ds,\quad X_{\alpha}=N_{\alpha\beta}n_{\beta} \tag{2.8}$$

式中，(n_1,n_2)为Γ的单位外法线，(s_1,s_2)为Γ的单位切线，且 $s_\alpha=e_{\beta\alpha}n_\beta$，$e_{\alpha\beta}$为2-阶置换张量．

这样，开孔薄板非线性分析的 Kármán 方程可写成为

$$\left.\begin{aligned}&G_1(w,F^*+\hat{F})\equiv Dw_{,\alpha\alpha\beta\beta}-he_{\alpha\gamma}e_{\beta\delta}w_{,\alpha\beta}(F^*+\hat{F})_{,\gamma\delta}=q\\&G_2(F^*,w)\equiv F^*_{,\alpha\alpha\beta\beta}+\frac{E}{2}e_{\alpha\gamma}e_{\beta\delta}w_{,\alpha\beta}w_{,\gamma\delta}=0\end{aligned}\quad x_\alpha\in\Omega\right\} \tag{2.9}$$

因为Ω是多连通域，由F和w决定的中面位移u_α仍然需要满足单值性条件[2]

$$\oint_{\Gamma^{i}}\tilde{\nu}_{\alpha}dx_{\alpha}=0,\quad \oint_{\Gamma^{i}}\tilde{u}_{\alpha\beta}dx_{\beta}=0\qquad (i=1,\cdots,m) \tag{2.10}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\nu}_{\alpha}=\frac{2}{E}e_{\beta\alpha}(F^*+\hat{F})_{,\eta\eta\beta}+e_{\beta\delta}w_{,\alpha\delta}w_{,\beta}\\&\tilde{u}_{\alpha\beta}=\frac{1}{E}(F_{,\eta\eta}\delta_{\alpha\beta}-(1+\nu)F_{,\alpha\beta})-\frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta}+\frac{1}{2}e_{\alpha\delta}x_{\delta}\tilde{\nu}_{\beta}\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

下面，我们讨论边界条件．对于横向边界条件一般给定为

$$w=\bar{w},\quad w_{,n}=\bar{\theta},\qquad x_\alpha\in\Gamma_w \tag{2.12a}$$

$$V_n=\bar{V}_n,\quad M_{nn}=\bar{M}_n,\qquad x_\alpha\in\Gamma_\sigma \tag{2.12b}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}&w_{,n}=w_{,\alpha}n_\alpha,\quad M_{nn}=M_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta,\quad M_{ns}=M_{\alpha\beta}n_\alpha s_\beta\\&V_n=n_\alpha M_{\alpha\beta,\beta}+M_{ns,s}+X_\alpha w_{,\alpha},\quad X_\alpha=N_{\alpha\beta}n_\beta\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

对于中面内的边界条件，情况是较为复杂的．我们考察下面三类边界条件．

首先，假设在$\Gamma^{i}_{f_j}$上的边界薄膜力$\bar{X}_\alpha$是给定的$(i=0,1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,k_i)$，则由$\bar{X}_\alpha=N_{\alpha\beta}n_\beta$和(2.6)式，得到

$$F_{,\gamma\delta}=\frac{1}{h}e_{\alpha\gamma}\bar{X}_\alpha,\qquad x_\alpha\in\Gamma^{i}_{f_j}$$

因此，

$$F_{,\gamma}(x_\alpha)=F_{,\gamma}(A^{i}_{j})+\frac{1}{h}e_{\alpha\gamma}\int_{A^{i}_{j},\Gamma^{i}}^{x_\alpha}\bar{X}_\alpha ds$$

从而，我们有

$$\left.\begin{aligned}&F_{,n}(x_\alpha)=F_{,\alpha}(A^{i}_{j})\,n_\alpha-\frac{1}{h}s_\alpha\int_{A^{i}_{j},\Gamma^{i}}^{x_\alpha}\bar{X}_\alpha ds\\&F(x_\alpha)=F(A^{i}_{j})+F_{,\alpha}(A^{i}_{j})(x_\alpha-x_\alpha^{A^{i}_{j}})+\frac{1}{h}e_{\alpha\gamma}\int_{A^{i}_{j},\Gamma^{i}}^{x_\alpha}(x_\gamma-x_\gamma^{A^{i}_{j}})\bar{X}_\alpha ds\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

因为，如果F是应力函数，则$F+Ax_1+Bx_2+C$也是应力函数，其中，A，B，C为常数．因此，我们可取某点A^0_1使得$F(A^0_1)=F_{,\alpha}(A^0_1)=0$．于是，$\Gamma^{i}_{f_j}$上的边界条件可写成

$$\left.\begin{aligned}&F^*(x_\alpha)=-\hat{F}(x_\alpha)+f^0_1(x_\alpha)\\&F^*_{,n}(x_\alpha)=-\hat{F}_{,n}(x_\alpha)+g^0_1(x_\alpha)\end{aligned}\quad x_\alpha\in\Gamma^0_{f_1}\right\} \tag{2.15a}$$

$$\left.\begin{array}{l}F^*(x_\alpha)=-\hat{F}(x_\alpha)+f_j^i(x_\alpha)+a_j^i+b_{j\alpha}^i x_\alpha \\ F_{,n}^*(x_\alpha)=-\hat{F}_{,n}(x_\alpha)+g_j^i(x_\alpha)+b_{j\alpha}^i n_\alpha \qquad x_\alpha\in\Gamma_{fj}^i \\ \quad i=0,1,\cdots,m;\ \ j=1,2,\cdots,k_i;(i,j)\neq(0,1)\end{array}\right\} \tag{2.15b}$$

式中，

$$\left.\begin{array}{l}f_j^i(x_\alpha)=\dfrac{1}{h}e_{\alpha\gamma}\displaystyle\int_{A_j^i,\Gamma^i}^{x_\alpha}(x_\gamma-x_\gamma^{A_j^i})\overline{X}_\alpha ds \\ g_j^i(x_\alpha)=-\dfrac{1}{h}s_\alpha\displaystyle\int_{A_j^i,\Gamma^i}^{x_\alpha}\overline{X}_\alpha ds\end{array}\right\} \tag{2.16}$$

令$\hat{\nu}$为线元绕Ox_3-轴的转动，则不难得到

$$\hat{\nu}=e_{\beta\alpha}u_{\alpha,\beta},\ \hat{\nu}_{,\alpha}=2e_{\delta\beta}\left(\varepsilon_{\alpha\beta,\delta}-\frac{1}{2}w_{,\alpha\delta}w_{,\beta}\right)\equiv\tilde{\nu}_\alpha$$

因此，

$$\hat{\nu}(x_\alpha)=\hat{\nu}(B_1^0)+\int_{B_1^0,L}^{x_\alpha}\tilde{\nu}_\alpha dx_\alpha \tag{2.17}$$

式中，L是联接B_1^0和x_α的任意全属于Ω的路径。注意到$u_{\alpha,\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}-w_{,\alpha}w_{,\beta}/2-e_{\alpha\beta}\hat{\nu}/2$，我们有

$$u_\alpha(x_\alpha)=u_\alpha(B_1^0)-\frac{1}{2}e_{\alpha\beta}\hat{\nu}(B_1^0)\ (x_\beta-x_\beta^{B_1^0})$$

$$+\int_{B_1^0,L}^{x_\alpha}\tilde{u}_{\alpha\beta}dx_\beta-\frac{1}{2}e_{\alpha\beta}x_\beta\int_{B_1^0,L}^{x_\alpha}\tilde{\nu}_\delta dx_\delta \tag{2.18}$$

如果在Γ_{uj}^i上给定中面位移u_α，记为$\overline{u}_\alpha$，则中面内的位移边界条件可写成

$$u_\alpha=\overline{u}_\alpha(x_\beta),\ \ x_\beta\in\Gamma_u=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\Gamma_{uj}^i \tag{2.19}$$

这样，我们可以建立开孔薄板非线性分析的三类数学模型，即三类边界值问题。

边值问题(BVP) Ⅰ：设在Γ_{fj}^i上给定薄膜力$\overline{X}_\alpha$，并在Γ_{uj}^i上给定中面位移$\overline{u}_\alpha$ ($i=0,1,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots k_i$)，则对于开孔薄板非线性分析的BVP Ⅰ是寻求两个函数w和F^*以及常数T_α^i，M^i，a_j^i和$b_{j\alpha}^i(i=0,1,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,k_i)$，$(i,\ j)\neq(0,1)$ 使得它们满足边界条件(2.12)、(2.15)、(2.19)，位移单值性条件(2.10)以及微分方程(2.9)。

如果在Γ上给定薄膜力$\overline{X}_\alpha$，则在这种情况下，T_α^i和M^i都是已知的，并且(2.15)可以写成

$$F^*(x_\alpha)=-\hat{F}(x_\alpha)+f^0(x_\alpha),\ \ F_{,n}^*(x_\alpha)=-\hat{F}_{,n}(x_\alpha)+g^0(x_\alpha),\qquad x_\alpha\in\Gamma^0 \tag{2.20a}$$

$$\left.\begin{array}{ll}F^*(x_\alpha)=-\hat{F}(x_\alpha)+f^i(x_\alpha)+a^i+b_\alpha^i x_\alpha & x_\alpha\in\Gamma^i \\ F_{,n}^*(x_\alpha)=-\hat{F}_{,n}(x_\alpha)+g^i(x_\alpha)+b_\alpha^i n_\alpha & (i=1,2,\cdots,m)\end{array}\right\} \tag{2.20b}$$

边值问题(BVP) Ⅱ：假设在Γ上的薄膜力$\overline{X}_\alpha$是给定的，则开孔薄板非线性分析的BVP Ⅱ是寻求两个函数w和F^*以及常数a^i 和 b_α^i ($i=1,2,\cdots,m$; $\alpha=1,2$) 使得它们满足边界条件(2.12)、(2.20)，位移单值性条件(2.10)以及微分方程(2.9)。

当Γ^i上给定的薄膜力$\overline{X}_\alpha$自身平衡时，即，$M^i=T_\alpha^i=0$ ($i=1,2,\cdots,m$; $\alpha=1,2$)，则BVP Ⅱ即为[2]中建立的数学模型。如果在Γ上给定中面位移$\overline{u}_\alpha$则(2.19)可以写成

$$u_\alpha=\bar{u}_\alpha(x_\beta),\qquad x_\beta\in\Gamma \tag{2.21}$$

在这种情况下，位移单值性条件(2.10)是自动满足的。

边值问题(BVP) Ⅲ：假设Γ上的中面位移$\bar{u}_\alpha$是给定的，则开孔薄板非线性分析的BVP Ⅲ是寻求两个函数w和F^*以及常数M^i和T^i_α $(i=1,2,\cdots,m;\ \alpha=1,2)$ 使得它们满足边界条件(2.12)和(2.21)以及常微分方程(2.9)。

至此，我们已在最一般情形下建立了开孔薄板非线性分析的三类边值问题。利用这里的理论，我们可以分析具有任意孔洞和边界条件的薄板的非线性弯曲和非线性稳定性。显然，本文的数学模型推广了通常的 Kármán 理论使之能够适用于开孔薄板的非线性分析，同时，我们的模型又不同于 Kármán 理论。因此，这一理论是一种新的数学模型。为了建立相应的有限元方法，下面，我们将给出几个广义变分原理。

三、开孔薄板非线性分析的广义变分原理

因为上面三类边值问题中包含了非线性泛函约束条件(2.10)和积分型边界条件(2.19)（或(2.21)），所以问题的分析和求解都是更为困难的。下面我们来建立相应的变分原理。能够看到，以w和F^*以及常数T^i_α，M^i_j，a^i_j和$b^i_{j\alpha}$ $(i=0,1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,k_i;\ (i,j)\neq(0,1);\ \alpha=1,2)$为宗量的这些变分原理不同于通常的势能原理和余能原理，而是广义变分原理。首先，不难得到板的弯曲应变能$U(K_{\alpha\beta})$和薄膜力的余能$V(N_{\alpha\beta})$为

$$U(K_{\alpha\beta})=0.5D[(1-\nu)K_{\alpha\beta}K_{\alpha\beta}+\nu K_{\alpha\alpha}K_{\beta\beta}] \tag{3.1}$$

$$V(N_{\alpha\beta})=[(1+\nu)N_{\alpha\beta}N_{\alpha\beta}-\nu N_{\alpha\alpha}N_{\beta\beta}]/2Eh \tag{3.2}$$

于是，(2.3)和(2.4)可以写成

$$M_{\alpha\beta}=\frac{\partial U}{\partial K_{\alpha\beta}},\qquad \varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{\partial V}{\partial N_{\alpha\beta}} \tag{3.3}$$

广义变分原理(GVP) Ⅰ：BVP Ⅰ的解等价于寻求在满足几何约束条件(2.1)、(2.6)、(2.12a)和(2.15)和物理约束条件(3.3)下泛函

$$\Pi_{\mathrm{I}}=\iint_\Omega\left\{U(K_{\alpha\beta})-V(N_{\alpha\beta})+\frac{1}{2}N_{\alpha\beta}w_{,\alpha}w_{,\beta}-qw\right\}d\Omega$$

$$+\int_{\Gamma_\sigma}(\bar{M}_n w_{,n}-\bar{V}_n w)ds+\int_{\Gamma_u}\bar{u}_\alpha N_{\alpha\beta}n_\beta ds \tag{3.4}$$

的驻值点w，F^*，T^i_α，M^i，a^i_j和$b^i_{j\alpha}$。

证明 因为$\delta\hat{F}$和$\delta\hat{F}_{,\nu}$是多值函数，所以我们必须使$\delta\hat{F}$和$\delta\hat{F}_{,\nu}$变成单值的，以便应用格林公式。为此，我们在点B^0_1和$B^i_1(i=1,2,\cdots,m)$之间作连线Γ_{0i}，并取Γ_{0i}的正方向为B^0_1到B^i_1的方向，记为Γ^+_{0i}，反之记为Γ^-_{0i}（参见图2）。这样，在由边界$\Gamma+\sum_{i=1}^{m}(\Gamma^+_{0i}+\Gamma^-_{0i})$所围的区域内，$\delta\hat{F}$和$\delta\hat{F}_{,\nu}$是单值的，并有

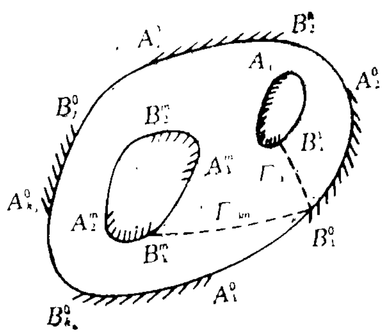

图 2

$$\left.\begin{aligned}&\delta\hat{F}\Big|_{\Gamma_{0i}^-}^{\Gamma_{0i}^+}=-\frac{1}{h}(\delta M^i+e_{\alpha\beta}x_\beta\delta T_\alpha^i)\\&\delta\hat{F}_{,\gamma}\Big|_{\Gamma_{0i}^-}^{\Gamma_{0i}^+}=-\frac{1}{h}e_{\alpha\gamma}\delta T_\gamma^i\qquad(i=1,2,\cdots,m)\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

不难看到，从B_1^i出发围绕边界Γ^i时，$\delta\hat{F}$和$\delta\hat{F}_{,\gamma}$的增量为

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_{B_1^0}\delta\hat{F}=-\frac{1}{h}\sum_{i=1}^m(\delta M^i+e_{\alpha\beta}x_\beta\delta T_\alpha^i),\quad\Delta_{B_1^0}\delta\hat{F}_{,\gamma}=-\frac{1}{h}\sum_{i=1}^m e_{\alpha\gamma}\delta T_\alpha^i\\&\Delta_{B_1^i}\delta\hat{F}=\frac{1}{h}(\delta M^i+e_{\alpha\beta}x_\beta\delta T_\alpha^i),\qquad\Delta_{B_1^i}\delta\hat{F}_{,\gamma}=\frac{1}{h}e_{\alpha\gamma}\delta T_\alpha^i\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(i=1,2,\cdots,m)\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

容易证明，在边界Γ_u上的转动$\hat{\varphi}$可以表示成

$$\hat{\varphi}=-2\left[n_\alpha\bar{u}_{\alpha,s}+n_\alpha s_\beta\left(\frac{1+\nu}{E}F_{,\alpha\beta}+\frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta}\right)\right]\tag{3.7}$$

利用(3.5)～(3.7)，我们有

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{\rm I}=&\iint_\Omega\left\{[G_1(w,F^*+\hat{F})-q]\delta w-\frac{h}{E}G_2(F^*,w)(\delta F^*+\delta\hat{F})\right\}d\Omega\\&+\int_{\Gamma_\sigma}[(V_n-\bar{V}_n)\delta w-(M_{nn}-\bar{M}_n)\delta w_{,n}]ds\\&-\frac{h}{2}\int_{\Gamma_u}(\hat{\varphi}_{,s}-\tilde{\varphi}_\alpha s_\alpha)(\delta F^*+\delta\hat{F})ds+h\int_{\Gamma_u}\Big[s_\alpha\bar{u}_{\alpha,s}-s_\alpha s_\beta\\&\cdot\left(\frac{1}{E}F_{,\delta\delta}\delta_{\alpha\beta}-\frac{1+\nu}{E}F_{,\alpha\beta}-\frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta}\right)\Big](\delta F^*_{,n}+\delta\hat{F}_{,n})ds\\&+h\sum_{\substack{i=0\\(i,j)\neq(0,1)}}^m\sum_{j=1}^{k_i}\left\{e_{\gamma\alpha}\left[\left(\bar{u}_{\alpha,s}+\frac{1}{2}\hat{\varphi}e_{\alpha\beta}x_\beta\right)\Big|_{A_j^i}^{B_j^i}-\int_{\Gamma_j^i}\tilde{u}_{\alpha\beta}dx_\beta\right]\delta b_{j\gamma}^i\right.\\&\left.-\frac{1}{2}\left(\hat{\varphi}\Big|_{A_j^i}^{B_j^i}-\int_{\Gamma_j^i}\tilde{\varphi}_\alpha dx_\alpha\right)\delta a_j^i\right\}\\&+\sum_{i=1}^m\left\{\left[\left(\bar{u}_\alpha+\frac{1}{2}\hat{\varphi}e_{\alpha\beta}x_\beta\right)\Big|_{B_1^0}^{B_1^i}-\int_{\Gamma_{0i}^+}\tilde{u}_{\alpha\beta}dx_\beta\right]\delta T_\alpha^i\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\left(\hat{\varphi}\Big|_{B_1^0}^{B_1^i}-\int_{\Gamma_{0i}^+}\tilde{\varphi}_\alpha dx_\alpha\right)\delta M^i\right\}\end{aligned}$$

因为δF^*，δw，$\delta F^*_{,n}$，δa_j^i，$\delta b_{j\gamma}^i$，δM^i和δT_α^i都是任意的，于是由$\delta\Pi_{\rm I}=0$，得到

$$G_1(w,\ F^*+\hat{F})=q,\quad G_2(F^*,\ w)=0,\qquad x_\alpha\in\Omega\tag{2.9}$$

$$M_{nn}=\bar{M}_n,\quad V_n=\bar{V}_n,\qquad x_\alpha\in\Gamma_\sigma\tag{2.12b}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\hat{\varphi}_{,s}-\tilde{\varphi}_\alpha s_\alpha=0,\qquad x_\alpha\in\Gamma_u&&(3.8\text{a})\\&s_\alpha\bar{u}_{\alpha,s}-s_\alpha s_\beta\left(\frac{1}{E}F_{,\delta\delta}\delta_{\alpha\beta}-\frac{1+\nu}{E}F_{,\alpha\beta}-\frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta}\right)=0&&(3.8\text{b})\end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\varphi}\Big|_{A_j^i}^{B_j^i}=\int_{\Gamma_j^i}\tilde{\varphi}_\alpha dx_\alpha\\&\left(\bar{u}_\alpha+\frac{1}{2}\hat{\varphi}e_{\alpha\beta}x_\beta\right)\Big|_{A_j^i}^{B_j^i}=\int_{\Gamma_j^i}\tilde{u}_{\alpha\beta}dx_\beta\end{aligned}\quad\left(\begin{aligned}&i=0,1,\cdots,m\\&j=1,2,\cdots,k_i\\&(i,j)\neq(0,1)\end{aligned}\right)\right\}\tag{3.9}$$

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\nu}\Big|_{B_1^0}^{B_1^i}=\int_{\Gamma_{0i}^+}\tilde{\nu}_\alpha dx_\alpha\\&\left(\bar{u}_\alpha+\frac{1}{2}\hat{\nu}e_{\alpha\beta}x_\beta\right)\Big|_{B_1^0}^{B_1^i}=\int_{\Gamma_{0i}^+}\tilde{u}_{\alpha\beta}dx_\beta\end{aligned}\quad (i=1,2,\cdots,m)\right\}\tag{3.10}$$

剩下来的问题是要证明关系(3.8)～(3.10)等价于位移单值性条件(2.10)和边界条件(2.19)。事实上，注意到

$$\hat{\nu},_s=\tilde{\nu}_\alpha s_\alpha$$

则可得到

$$\hat{\nu}\Big|_{B_j^i}^{x_\alpha}=\int_{B_j^i,\Gamma^i}^{x_\alpha}\tilde{\nu}_\alpha dx_\alpha\tag{3.11}$$

特别

$$\hat{\nu}\Big|_{B_j^i}^{A_{j+1}^i}=\int_{\Gamma_{u_j}^i}\tilde{\nu}_\alpha dx_\alpha,\quad A_{k_i+1}^i=A_1^i$$

因此，

$$\oint_{\Gamma_i}\tilde{\nu}_\alpha dx_\alpha=\sum_{j=1}^{k_i}\left(\int_{\Gamma_{u_j}^i}\tilde{\nu}_\alpha dx_\alpha+\int_{\Gamma_{f_j}^i}\tilde{\nu}_\alpha dx_\alpha\right)=\sum_{j=1}^{k_i}\left(\hat{\nu}\Big|_{B_j^i}^{A_{j+1}^i}+\hat{\nu}\Big|_{A_j^i}^{B_j^i}\right)=0$$

由(3.8b)和(3.11)，我们有

$$\left[\bar{u}_\alpha+\frac{1}{2}e_{\alpha\beta}x_\beta\hat{\nu}\right],_s=\tilde{u}_{\alpha\beta}s_\beta,\qquad x_\alpha\in\Gamma_{u_j}^i$$

从而

$$\left(\bar{u}_\alpha+\frac{1}{2}e_{\alpha\beta}x_\beta\hat{\nu}\right)\Big|_{B_j^i}^{x_\alpha}=\int_{B_j^i,\Gamma^i}^{x_\alpha}\tilde{u}_{\alpha\beta}dx_\beta\tag{3.12}$$

特别

$$\left(\bar{u}_\alpha+\frac{1}{2}e_{\alpha\beta}x_\beta\hat{\nu}\right)\Big|_{B_j^i}^{A_{j+1}^i}=\int_{\Gamma_{u_j}^i}\tilde{u}_{\alpha\beta}dx_\beta$$

因而，有

$$\oint_{\Gamma_i}\tilde{u}_{\alpha\beta}dx_\beta=\sum_{j=1}^{k_i}\left(\int_{\Gamma_{f_j}^i}\tilde{u}_{\alpha\beta}dx_\beta+\int_{\Gamma_{u_j}^i}\tilde{u}_{\alpha\beta}dx_\beta\right)=0$$

因此，我们已证明了如果(3.8)～(3.10)成立，则位移单值性条件(2.10)成立。利用(2.10)和(3.9)～(3.12)，可以得到边界条件(2.9)；反之，由(2.10)和(2.19)，容易推出(3.8)～(3.10)。因此，GVP Ⅰ的证明是完全的。

这样一来，BVP Ⅰ可以叙述为：在$\Gamma_{f_j}^i$上给定薄膜力X_α，同时在$\Gamma_{u_j}^i$上给定中面位移$\bar{u}_\alpha$的开孔薄板非线性弯曲问题是寻求两个函数w和F^*以及常数a_j^i，$b_{j\alpha}^i$，M^i和T_α^i使其满足边界条件(2.12)、(2.15)、(3.8)～(3.10)以及微分方程(2.9)，其中，关系式(3.9)、(3.10)是用来决定未知常数a_j^i，$b_{j\alpha}^i$，M^i和T_α^i的。

类似地，我们可以得到下面的变分原理。

广义变分原理 (GVP) Ⅱ：BVP Ⅱ的解等价于寻求在满足几何约束条件(2.1)、(2.6)、(2.12a)、(2.20)和物理约束条件(3.3)下泛函

$$\Pi_{\mathrm{I}}=\iint_\Omega\left[U(K_{\alpha\beta})-V(N_{\alpha\beta})+\frac{1}{2}w,_\alpha w,_\beta N_{\alpha\beta}-qw\right]d\Omega$$

$$+\int_{\Gamma_\sigma}(\bar{M}_n w_{,n}-\bar{V}_n w)ds \tag{3.13}$$

的驻值点w，F^*以及常数a^i，$b^i_\alpha(i=1,2,\cdots,m;\alpha=1,2)$。

当Γ^i上给定的薄膜力$\bar{X}_\alpha(i=1,2,\cdots,m;\alpha=1,2)$自身平衡时，即，$M^i=T^i_\alpha=0$，则GVP Ⅱ即为[12]中的广义变分原理。

广义变分原理（GVP）Ⅲ：BVP Ⅳ的解等价于寻求在满足几何约束条件(2.1)、(2.6)、(2.12a)和物理约束条件(3.3)下泛函

$$\Pi_{\text{Ⅲ}}=\iint_\Omega\left[U(K_{\alpha\beta})-V(N_{\alpha\beta})+\frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta}N_{\alpha\beta}-qw\right]d\Omega$$

$$+\int_{\Gamma_\sigma}(\bar{M}_n w_{,n}-\bar{V}_n w)ds+\int_\Gamma \bar{u}_\alpha N_{\alpha\beta}n_\beta ds \tag{3.14}$$

的驻值点w，F^*以及常数M^i和$T^i_\alpha(i=1,2,\cdots,m;\ \alpha=1,2)$。

因为在 GVP Ⅰ中，函数w和F^*必须满足约束条件(2.12a)和(2.15)，并且由于待定常数a^i_j和$b^i_{j\alpha}$亦参与变分，所以当我们用有限元方法来分析开孔薄板的屈曲和过屈曲时，单元的性质非常复杂[12]。为了便于分析，我们引入 Lagrange 乘子来消除约束条件(2.12a)和(2.15)，从而得到下面的变分原理。

广义变分原理Ⅰ*：BVP Ⅰ的解等价于在满足几何约束条件(2.1)、(2.6)和物理约束条件(3.3)下，寻求泛函

$$\Pi_{\text{Ⅰ}}^*=\Pi_{\text{Ⅰ}}+\int_{\Gamma_w}[M_{nn}(w_{,n}-\bar{\theta})-V_n(w-\bar{w})]ds$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}h\int_{\Gamma^i_{f_j}}[R_1(w,F^*+\hat{F})\mathscr{F}^i_j+R_2(w,F^*+\hat{F})\mathscr{F}^i_{jn}]ds$$

$$-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}h[n_\alpha\bar{u}_{\alpha,s}\mathscr{F}^i_j-e_{\alpha\gamma}\bar{u}_\alpha\mathscr{F}^i_{j\gamma}]\Big|_{A^i_j}^{B^i_j} \tag{3.15}$$

的驻值点w，F^*以及常数M^i，T^i_α，a^i_j，$b^i_{j\alpha}$，式中

$$\left.\begin{aligned}
&R_1(w,F^*+\hat{F})=-\left[n_\alpha s_\beta\left(\frac{1+\nu}{E}F_{,\alpha\beta}+\frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta}\right)\right]_{,s}-\frac{1}{2}\tilde{p}_\alpha s_\alpha\\
&R_2(w,F^*+\hat{F})=s_\alpha s_\beta\left[\frac{1}{E}F_{,\delta\delta}\delta_{\alpha\beta}-\frac{1+\nu}{E}F_{,\alpha\beta}-\frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta}\right]\\
&\mathscr{F}^i_j=\begin{cases}F^*+\hat{F}-f^0_1, & (i,j)=(0,1)\\ F^*+\hat{F}-f^i_j-a^i_j-b^i_{j\alpha}x_\alpha & \begin{matrix}(i=0,1,\cdots,m)\\(j=1,2,\cdots,k_i)\end{matrix}\ (i,j)\neq(0,1)\end{cases}\\
&\mathscr{F}^i_{jn}=\begin{cases}F^*_{,n}+\hat{F}-g^0_1, & (i,j)=(0,1)\\ F^*_{,n}+\hat{F}_{,n}-g^i_j-n_\alpha b^i_{j\alpha} & \begin{matrix}(i=0,1,\cdots,m)\\(j=1,2,\cdots,k_i)\end{matrix}\ (i,j)\neq(0,1)\end{cases}\\
&\mathscr{F}^i_{j\gamma}=\mathscr{F}^i_{j,s}s_\gamma+\mathscr{F}^i_{jn}n_\gamma\\
&\quad=\begin{cases}F^*_{,\gamma}+\hat{F}_{,\gamma}-h^0_{1\gamma}, & (i,j)=(0,1)\\ F^*_{,\gamma}+\hat{F}_{,\gamma}-h^i_{j\gamma}-b^i_{j\gamma}, & \begin{matrix}(i=0,1,\cdots,m)\\(j=1,2,\cdots,k_i)\end{matrix}\ (i,j)\neq(0,1)\end{cases}\\
&h^i_{j\gamma}=\frac{1}{h}e_{\alpha\gamma}\int_{A^i_j,\Gamma^i}^{x_\alpha}\bar{X}_\alpha ds,\qquad x^\alpha\in\Gamma^i_{f_j}
\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

类似地，我们可以得到相应于 BVP Ⅱ 的广义变分原理 Ⅱ*。利用这些广义变分原理可以建立在任意边界条件下开孔薄板非线性分析的有限单元法。

参 考 文 献

[1] P. M. Naghdi, The theory of plates and shells, *Handbuck der Physik*, VIa/2, ed. C. Truesdell, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972).

[2] Zhu Zhengyou and Cheng Changjun, General mathematical theory of large deflections of thin plates with some holes, *Acta Mechanica Sinica*, 2(3) (1986), 278—288.

[3] 程昌钧、吕小安，关于开孔薄板大挠度问题的一般数学理论（续），力学学报，21(2) (1989), 193—203.

[4] 程昌钧、朱正佑，《结构的屈曲和分叉》，兰州大学出版社 (1991).

[5] Cheng Changjun and Zhu Zhengyou, The buckled states of annular plates, *Scientia Sinica, Series A*, 19(9) (1986), 956—965.

[6] Cheng Changjun, Duan Wei and D. F. Parker, Elastic instability of polar orthotropic annular plates, *Int. J. Engng. Sci.*, 27(2) (1989), 109—121.

[7] Cheng Changjun and A. J. M. Spencer, Nor-axisymmetric instability of polar orthotropic annular plates, *J. Engng. Math.*, 23 (1989), 29—51.

[8] Cheng Changjun and Lü Xiaoan, Buckling and post-buckling of annular plates in shearing (Ⅰ): Buckling and (Ⅱ): Post-buckling, *Com. Methods Appl. Mech. Engng.*, 92(2) (1991), 157—172, 173—191.

[9] 吕小安，开孔圆柱壳的非线性理论与稳定性问题，兰州大学博士学位论文 (1990).

[10] 何录武，夹层板的屈曲和分支，兰州大学博士学位论文 (1990).

[11] 程昌钧、杨骁，开孔薄板屈曲状态的存在性，应用数学和力学，13(8) (1992), 699—709.

[12] Yang Xiao and Cheng Changjun, Variational principles on perforated thin plates and finite element method of buckling and post-buckling analysis, *Acta Mechanica Sinica*, 7(2) (1991), 1—10.

[13] 钱伟长，《变分法及有限元》，科学出版社 (1980).

The Mathematical Models and Generalized Variational Principles of Nonlinear Analysis for Perforated Thin Plates

Cheng Changjun   Yang Xiao

(*Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou, Gansu* 730000, *P. R. China*)

Abstract

On the basis of the Kirchhoff-Kármán hypothses for the nonlinear bending of thin plates, the three kinds of boundary value problems of nonlinear analysis for perforated thin plates are presented under the different in-plane boundary conditions and the corresponding generalized variational principles are established. One can see that all mathematical models presented in this paper are completely new ones and differ from the ordinary von Kármán theory. These mathematical models can be applied to the nonlinear analysis and the stability analysis of perforated thin plates in arbitrary plane boundary conditions.

Key words perforated thin plate, non-linear analysis, mathematical model, generalized variational principle