应用数学和力学，第17卷 第2期（1996年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

闭轨道直径函数的不动点*

B.K.沙玛[1]　B.S.撒克[1]

（丁协平推荐，1994年11月3日收到）

摘　　要

由引入最一般的压缩条件，在完备度量空间中，对一类具有闭轨道直径函数的自映射证明了不动点的存在性。这一条件不仅包括了Kannan型也包括了Reich型、Hardy和Rogers型压缩条件。给出的实例表明了本文方法的有效性。

关键词　闭轨道直径函数　不动点

一、前　　言

Reich型[4]、Hardy和Rogers型[1]压缩条件比Kannan型[3]压缩条件更为一般。但是迄今仅有 Kannan 压缩条件被用来证明在度量空间中具有闭轨道直径函数的不动点的存在性。

本文首次导出了在度量空间中证明闭轨道直径函数不动点存在性的一类压缩条件。

Kannan型[3]、Reich型[4]、Hardy和Rogers型[1]压缩条件仅是本文提出的压缩条件的特例。

二、预 备 知 识

定义1[2]　设 $(E,\ d)$ 为度量空间，T为E中的自映射。如果用$O(z)=\{T^n z:n\in N\}$表示T在E中z点处的轨道，用$\rho(z)$表示$O(z)$的直径，即

$$\rho(z)\ \sup_{m,n\in N} d(T^m z,\ T^n z)$$

则称函数$\rho(z)$为关于T的轨道直径函数。如果

$$\lim_{n\to\infty} z_k = z \text{和} \lim_{n\to\infty} \rho(z_k)=y$$

蕴含$y=\rho(z)$，则称ρ是闭的。

定义2[2]　如果$\inf\limits_{z\in N}\rho(z)=0$，则称轨道直径函数$\rho(z)$在度量空间$E$中是递减的。

现证明如下一些引理：

---

* 本文原文为英文，由吴承平译为中文，丁协平校。

1 印度皮特·莱维桑卡苏克拉大学数学研究院

引理1　设(E, d)为一度量空间，对所有的$x, y\in E$，$T:E\to E$为满足下列不等式的映射，

$$\begin{aligned}d(Tx, Ty)\leqslant & ad(x, y)+b[d(x, Tx)+d(y, Ty)]\\ &+c[d(x, Ty)+d(y, Tx)]+e[d(x, T^2x)\\ &+d(y, T^2x)]+g[d(Tx, T^2x)+d(Ty, T^2x)]\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中，$a, b, c, e, g\geqslant 0$且$3a+2b+4c+5e+3g\leqslant 1$。则对所有的$m\in N$和$z\in E$有

$$d(T^mx, T^{m+1}z)\leqslant d(T^{m-1}z, T^mz)$$

证明　利用不等式(2.1)，有

$$\begin{aligned}d(T^mz, T^{m+1}z)\leqslant & ad(T^{m-1}z, T^mz)+b[d(T^{m-1}z, T^mz)\\ &+d(T^mz, T^{m+1}z)]+c[d(T^{m-1}z, T^{m+1}z)\\ &+d(T^mz, T^mz)]+e[d(T^{m-1}z, T^{m+1}z)\\ &+d(T^mz, T^{m+1}z)]+g[d(T^mz, T^{m+1}z)\\ &+d(T^{m+1}z, T^{m+1}z)]\end{aligned}$$

化简得

$$\begin{aligned}d(T^mz, T^{m+1}z)&\leqslant(a+b+c+e)(1-b-c-2e-g)^{-1}d(T^{m-1}z, T^mz)\\ &\leqslant d(T^{m-1}z, T^mz)\end{aligned}$$

引理1证毕。

引理2　设T为度量空间(E, d)中满足(2.1)式的自映射，则

$$\rho(z)=\sup_{n\in N}d(z, T^nz)$$

证明　显然

$$\sup_{n\in N}d(z, T^nz)\leqslant\rho(z)$$

对任意$m, n\in N\backslash\{0\}$，由(2.1)可得

$$\begin{aligned}d(T^mz, T^nz)\leqslant & ad(T^{m-1}z, T^{n-1}z)\\ &+b[d(T^{m-1}z, T^mz)+d(T^{n-1}z, T^nz)]\\ &+c[d(T^{m-1}z, T^nz)+d(T^{n-1}z, T^mz)]\\ &+e[d(T^{m-1}z, T^{m+1}z)+d(T^{n-1}z, T^{m+1}z)]\\ &+g[d(T^mz, T^{m+1}z)+d(T^nz, T^{m+1}z)]\end{aligned}$$

化简后可得

$$\begin{aligned}d(T^mz, T^nz)\leqslant & (a+b+c+e)(1-a-2c-e-g)^{-1}\cdot[d(T^{m-1}z, T^mz)\\ &+d(T^{n-1}z, T^nz)]+2(e+g)(1-a-2c-e-g)^{-1}\\ &\cdot[d(T^mz, T^{m+1}z)]\end{aligned}$$

由归纳法，利用引理1，很容易证明对任意$m\in N$有

$$d(T^mz, T^{m+1}z)\leqslant d(z, Tz)$$

当T满足条件(2.1)时，则有

$$\begin{aligned}d(T^mz, T^nz)&\leqslant(a+b+c+e)(1-a-2c-e-g)^{-1}\\ &\quad\cdot[d(z, Tz)+d(z, Tz)]+2(e+g)(1-a-2c-e-g)^{-1}\\ &\quad\cdot[d(z, Tz)]\\ &=(2a+2b+2c+4e+2g)(1-a-2c-e-g)^{-1}\cdot d(z, Tz)\end{aligned}$$

$$\leqslant d(z,\ Tz) \qquad \text{对所有}m,\ n\in N\backslash\{0\} \tag{2.2}$$

因此有

$$\rho(z)=\sup_{m,n\in N} d(T^m z,T^m z)\leqslant\sup_{n\in N} d(z,\ T^n z)$$

因此

$$\rho(z)=\sup_{n\in N} d(z,\ T^n z)$$

引理 2 证毕.

三、主 要 结 果

定理 设$(E,\ d)$为完备度量空间. 则满足(2.1)式的具有闭轨道直径函数$\rho(z)$的自映射$T:E\to E$在E中有不动点, 当且仅当$\rho(z)$在E中是减函数.

证明 其必要条件是显然的, 现证充分条件.

因为 $\inf\limits_{z\in E}\rho(z)=0$

则$(\overline{M}_k)_{k\in N\backslash\{0\}}$为$E$的非空闭且$T$不变的子集的套序列, 其中

$$M_k=\{z\in E:\rho(z)\leqslant 1/k\}$$

现在我们来说明, 当k趋近于无穷大时,

$$\delta(\overline{M}_k)=\sup_{z,z'\in\overline{M}_k} d(z,\ z')$$

收敛于零. 事实上, 利用引理 2 对任意$z,\ z'\in M_k$和所有$m,\ n\in Z\backslash\{0\}$, 可得

$$\begin{aligned} d(z,\ z')&\leqslant d(z,\ T^m z)+d(T^m z,\ T^n z')+d(T^n z',\ z')\\ &\leqslant\rho(z)+d(T^m z,\ T^n z')+\rho(z') \end{aligned} \tag{3.1}$$

利用(2.1), 可得

$$\begin{aligned} d(T^m z,\ T^n z')\leqslant&(a+b+c+e)(1-a-2c-e-g)^{-1}[d(T^{m-1}z,\ T^m z)\\ &+d(T^{n-1}z',\ T^n z')]+2(e+g)(1-a-2c-e-g)^{-1}\\ &\cdot d(T^m z,\ T^{m+1}z) \end{aligned}$$

由引理2, 又有

$$\begin{aligned} d(T^m z,\ T^n z')\leqslant&(a+b+c+e)(1-a-2c-e-g)^{-1}[\rho(z)+\rho(z')]\\ &+2(e+g)(1-a-2c-e-g)^{-1}\cdot\rho(z) \end{aligned} \tag{3.2}$$

由于$(2a+2b+2c+4e+2g)(1-a-2c-e-g)^{-1}\leqslant 1$, 再由(3.1)和(3.2)就可得

$$\begin{aligned} d(z,\ z')\leqslant&\rho(z)+(a+b+c+e)(1-a-2c-e-g)^{-1}[\rho(z)+\rho(z')]\\ &+2(e+g)(1-a-2c-e-g)^{-1}\cdot\rho(z)+\rho(z')\\ \leqslant&\rho(z)+\rho(z')+(a+b+c+3e+2g)(1-a-2c-e-g)^{-1}\\ &\cdot\rho(z)(a+b+c+e)(1-a-2c-e-g)^{-1}\cdot\rho(z')\\ \leqslant&2/k+(2a+2b+2c+4e+2g)(1-a-2c-e-g)^{-1}\cdot k^{-1} \end{aligned}$$

且 $\qquad d(z,\ z')\leqslant 3/k$

又因$\delta(\overline{M}_k)=\delta(M_k)$, 可导得

$$\delta(\overline{M}_k)\leqslant 3/k$$

因此 $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\delta(\overline{M}_k)=0$

由套原理，我们有 $\bigcap_{k\in N\setminus\{0\}} \overline{M}_k\neq\phi$。如果设

$$z\in\bigcap_{k\in N\setminus\{0\}}\overline{M}_k$$

则在E中存在序列$\{z_k\}_{k\in N\setminus\{0\}}$，$z_k\in M_k$，对每一$k\in N\setminus\{0\}$有$\lim\limits_{n\to\infty}z_k=z$。

因为ρ是闭的，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\rho(z_k)=0=\rho(z)$$

这就是说z是T的不动点。

例　现通过下列例证来说明本文定理。

设$X=[0,1]$具有通常的度量d，d由下式定义

$$d(x,y)=|x-y|$$

如果利用$Tx=x/4$定义$T:X\to X$，设$a=1/4$和b，c，e，$g\leqslant 1/100$，则T显然满足(2.1)且 0 为T的不动点。

推论1　如果在不等式(2.1)中取$a=c=e=g=0$及$b=1/2$，则(2.1)变为

$$d(Tx,Ty)\leqslant[d(x,Tx)+d(y,Ty)]/2 \tag{3.3}$$

这就是Kannan型[3]压缩条件，并可导得Kalinde[2]中的结果。

如果在不等式(2.1)中取$e=0=g$，则对所有x，$y\in E$，可得

$$d(Tx,Ty)\leqslant ad(x,y)+b[d(x,Tx)+d(y,Ty)]+c[d(x,Ty)+d(y,Tx)] \tag{3.4}$$

其中a，b，$c\geqslant 0$且$3a+2b+4c\leqslant 1$。

这又是Hardy和Rogers型[1]压缩条件。为此我们有

推论2　设(E,d)为完备度量空间。则具闭轨道直径函数$\rho(z)$，满足(3.4)式的自映射$T:E\to E$在E中有不动点，当且仅当$\rho(z)$在E中为减函数。

证明　可用本文定理证明如下：

如果取不等式(2.1)中$e=0=g=c$，则对所有x，$y\in E$可得

$$d(Tx,Ty)\leqslant ad(x,y)+b[d(x,Tx)+d(y,Ty)] \tag{3.5}$$

其中，a，$b\geqslant 0$且$3a+2b\leqslant 1$。

这就是Reich型[4]压缩条件。为此我们有

推论3　设(E,d)为完备度量空间。则具有闭轨道直径函数$\rho(z)$并满足(3.5)式的自映射$T:E\to E$在E中有不动点，当且仅当$\rho(z)$在E中为减函数。

感谢　本文作者感谢Kailinde教授为作者提供了单行本。

参 考 文 献

[1] G. E. Hardy and T. D. Rogers, A generalization of a fixed point theorem of Reich, *Canad. Math. Bull.*, 16 (1973), 201—206.

[2] A. K. Kalinde, On a fixed point theorem for Kannan's type mappings, *Math. Japon.*, 33(5) (1988), 721—723.

[3] R. Kannan, Some results on fixed point, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 60 (1968), 71—76.

[4] S. Reich, Some remark's concerning contraction mappings, *Canad. Math. Bull.*, 14 (1971), 121—124.

Fixed Point with Orbital Diametral Function

B. K. Sharma B. S. Thakur
(*School of Studies in Mathematics, Pt. Ravishankar Shukla University, Raipur*-492010, *India*)

Abstract

A foremost general contraction condition is introduced to prove the existence of fixed points for a self-mapping in a complete metric space whose orbital diametral functios are closed. This codition covers not only the Kannan type but also covers Reich, and Hardy & Roger's type contractive conditions. An example is given in its support.

Key words closed orbital diametral function, fixed point