应用数学和力学，第17卷 第2期（1996年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非游荡算子的性质*

田立新[1]　　卢殿臣[1]

（戴世强推荐，1995年1月20日收到）

摘　要

本文研究一类具有混纯性质的线性算子：非游荡算子，该类算子仅在无穷维线性空间中。我们给出非游荡算子紧集上的超循环分解。

关键词　移位算子　超循环算子　非游荡算子

无穷维线性空间中动力系统混纯性质的研究正越来越引起人们的注视(见[7]～[9])。自从J. H. Shapiro, D. A. Herrero 等人研究超循环算子具有初始条件的敏感性与周期点的稠密性以来，发现“大多数”超循环算子是线性混纯算子，即有“周期点的稠密性”和“初始条件的敏感性”（见[1]～[5]）。这是一个奇特的性质。线性算子仅仅在无穷维空间有这一性质。有限维空间中的线性算子没有这一性质。有限维空间中混纯的研究限制为非线性算子。

另一方面，当人们对符号动力系统的动力性质有了很好的了解之后，就希望研究一般的系统，如公理A系统的研究，这起源于 Smale 在微分动力系统的结构稳定性和非游荡集的稳定性的研究。Smale 的工作基于有限维。

本文给出无穷维线性空间中的一类线性算子——非游荡算子。并给出几类该算子，同时研究该算子的紧集下超循环分解。该工作是我们研究无穷维线性空间中线性算子的动力特征的基础，将为进一步研究有限维空间中非线性算子的混纯特征与无穷维空间中线性混纯算子的联系作好准备。该类算子的动力结构将另文给出。

本文中，X是可析的无穷维 Bahach 空间，E表示X的子集，X中有界线性算子全体记为$L(X)$。

一、定义及例子

若$T\in(X)$，$x\in X$是T的周期点，充要条件是存在$i\in\mathbb{N}$（自然数），使$T^ix=x$，i称为x的周期。T的所有周期点记为$\mathrm{Per}(T)$。

定义1　$x\in X$，T的x轨道是集

$$\mathrm{Orb}(T,x)=\{x,\ Tx,\ T^2x,\cdots\}$$

---

* 国家自然科学基金资助课题

1 江苏理工大学数理系，江苏省镇江市 212013

若$x\in X$，$\mathrm{Orb}(T,x)$在X中稠密，则称x是超循环向量．若 $\mathrm{Orb}(T,x)$ 及其数乘在 X 中稠密，则称x为亚循环向量．若$T\in L(X)$，T有超循环向量，则称T是超循环算子，类似有亚循环算子．这二类算子的研究见[1]～[5]．

定义2 (见 Devaney[10],p.50) 若$T\in L(X)$，具有

（1）初始条件的敏感性

$$\lim_{n\to\infty}\inf\|T^nx-T^nw\|=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sup\|T^nx-T^nw\|=\infty$$

其中$x\in X$，任意w属于X的某稠密点集．

（2）X中T的周期点是稠密的．

（3）T是拓扑传递（即有超循环向量存在）．

定义3 $A\in L(X)$，称A是相对于E的非游荡算子，若

（1）$E\subset X$，且满足双曲结构：$E=E^u\oplus E^s$，$AE^u=E^u$，$AE^s=E^s$．$\oplus$表示直和．存在$\tau>0$，$0<\tau<1$，满足

$$\|A^k\xi\|\geqslant C\tau^{-k}\|\xi\|,\qquad 任意\xi\in E^u,\ k\in\mathbf{N}$$
$$\|A^k\eta\|\leqslant C\tau^{k}\|\eta\|,\qquad 任意\eta\in E^s,\ k\in\mathbf{N}$$

（2）$\mathrm{Per}A$在E中稠密．

由于吸引子的紧不变性质，定义3中E不一定是线性子空间．本文定理 1～3 的非游荡算子相应的E是子空间．由于紧线性子空间是有限维的特征，在定理4我们研究无穷维空间紧集上非游荡算子的超循环分解．若算子是非游荡且超循环的，则它一定是线性混纯算子．

设H是可分的 Hilbert 空间，H中正交基$\{e_n\}_1^\infty$，H中定义线性算子B为

$$Be_n=e_{n-1},\quad Be_1=0$$

定理1 若数λ满足$|\lambda|>1$，则λB是非游荡算子．

证明 若 $\lambda Bx=x$，$x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i$，则

$$x_1=\left\{1,\frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{\lambda^2},\ \cdots\right\},\ Y_1=\mathrm{span}\{x_1\}.\ x\in Y_1,\ \lambda Bx=x$$

若$(\lambda B)^2x=x$，则

$$x_2=\left\{0,1,\frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{\lambda^2},\ \cdots\right\},\ Y_2=\mathrm{span}\{x_2\}.\ x\in Y_2,\ (\lambda B)^2x=x$$

则得到

$$x_i=\{0,\cdots,\ 0,1,1/\lambda,\cdots\},\ Y_i=\mathrm{span}\{x_i\},\ x\in Y_i时,\ (\lambda B)^ix=x$$

显然$\{x_i\}_1^\infty$在H中稠密，则$\mathrm{Per}(\lambda B)$在H中稠密．

下面找$E\subset H$，使λB在E中满足双曲结构．

设$\lambda By=ly$，取l满足$0<l<1$，则$l^n/|\lambda|^n>1$，设

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}b_i\,e_i$$

则 $$\lambda By=\lambda\sum_{i=2}^{\infty}b_i\,e_{i-1}=l\sum_{i=1}^{\infty}b_ie_i$$

则 $$y_0=\left\{b_1,\ \frac{l}{\lambda}b_1,\ \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 b_1,\ \cdots\right\}$$

λB以$Y_0=\mathrm{span}\{y_0\}$为特征向量，l为特征值．作$E=E^s=\mathrm{span}\{y_0\}$，$E^u=\{0\}$，则对任意$x\in E$，$x=my_0$，$\|(\lambda B)x\|=\|\lambda mBy_0\|=l\|my_0\|=l\|x\|$．取$\tau=l$，则

$$\|(\lambda B)^k x\|\leqslant\tau^k\|x\|$$

所以λB满足双曲结构．因为 $\mathrm{Per}(\lambda B)$在H中稠密，则 $\mathrm{Per}(\lambda B)$在E中稠密．证毕．

注 在定理1中，如果$|\lambda|\leqslant 1$，显然λB满足双曲结构．但由于λB有非周期点，所以此时λB不是非游荡的．

定理2 $A\in L(X)$，$A\not\equiv 0$，$AB=BA$，B为移位算子，则存在常数λ，使λA是非游荡算子．

证明 由定理1，$x_1\in\mathrm{Per}(\lambda B)$，则对数$m$，成立

$$mAx_1=\lambda(mA)Bx_1=\lambda B(mAx_1) \tag{1.1}$$

$mAx_1\in\mathrm{Per}(\lambda B)$，$mAx_1\in Y_1=\mathrm{span}\{x_1\}$．由定理1，则存在

$$k\neq 0,\ mAx_1=kx_1,\ (k^{-1}mA)x_1=x_1,\ x_1\in\mathrm{Per}(k^{-1}mA)$$

依次可得，若$\{x_n\}\subset\mathrm{Per}(\lambda B)$，则$\{x_n\}$都是$k^{-1}mA$的周期．因为$\{x_n\}$线性无关，$\{x_n\}$在$H$中稠密．设$y_0$为特征向量，满足$\lambda By_0=ly_0$，$0<l<1$，则

$$k^{-1}(mA)By_0=k^{-1}(mA\lambda^{-1})(\lambda B)y_0=lk^{-1}\lambda^{-1}(mA)y_0=B(k^{-1}mAy_0)$$

$$\lambda B(k^{-1}mAy_0)=l(k^{-1}mAy_0)$$

因为λB关于特征值l的特征向量是1维的，则存在常数C_0，使$k^{-1}mAy_0=C_0y_0$．因为式(1.1)中m的任意性，取m，使C_0满足$|C_0|\neq 1$．记$\alpha=k^{-1}m$．作$E=\mathrm{span}\{y_0\}$．当 $x\in E$ 时，$\|\alpha Ax\|=|C_0|\,\|x\|$．

若$|C_0|>1$，取$E=E^u$，$E^s=\{0\}$；若$|C_0|<1$，取$E=E^s$，$E^u=\{0\}$，则在E上αA满足双曲结构．因为 $\mathrm{Per}A$在H中稠密，则 $\mathrm{Per}A$在E中稠密．A为非游荡算子．

推论1 若$A\not\equiv 0$，$AB^m=B^mA$，$m\in\mathbf{N}$，则存在$|\lambda|\neq 0$，使λA是非游荡算子．

上述定理中E是1维的，E^u与E^s中有一个为空间$\{0\}$．下面我们举一例，E^u与E^s均是非零空间且是无穷维，相应的A是非游荡算子．

设Ω为C^N中的连通开区域．H为Ω中解析函数全体，假设

(1) $H\not\equiv 0$

(2) $f\to f(z)$，$\forall z\in\Omega$，在H中是连续的．

由 Riesz 表示定理，存在唯一$k_z\in H$，使$f(z)=\langle f,k_z\rangle$，$f\in H$．记$H_E=\mathrm{span}\{k_z:z\in E\}$．若$E$的闭包中含有$\Omega$的开子集，则$H_E$在$H$中稠密（见[1]，命题4.2）．

Ω中复值函数φ，对任意$f\in H$，称$\varphi f\in H$为H的乘子（multiplier）．H的乘子确定一个线性乘子算子M_φ：

$$M_\varphi f=\varphi f,\qquad f\in H$$

由点值的有界性和闭图象定理，M_φ很难得到性质．但能证明乘子φ是Ω中有界解析函数（见[1]）．若φ是乘子，则

$$M_\varphi^* k_z=\overline{\varphi(z)}k_z,\qquad z\in\Omega$$

定理3 若非常数的乘子φ满足$\varphi(\Omega)\cap S^1\cap S^2\cap S^3\neq\phi$，这儿$S^i$是中心在原点，半径为$i$的圆周，则$M_\varphi^*|_X$是$X=H\oplus H$中的非游荡算子，$\oplus$为直和，这儿

$$M_\varphi^*|_X=M_\varphi^*|_H\oplus M_\varphi^*|_H$$

证明 记$V=\{z\in\Omega,\ |\varphi(z)|<1/2\}$，$W=\{z\in\Omega,\ |\varphi(z)|>2\}$．因为$\varphi(\Omega)$是开集，则

V与W是开集. 由假设, V与W非空, 所以V与W中含有Ω的开子集, 则H_V与H_W在H中稠密 (见[1]命题4.2).

在$X=H\oplus H$中, X的范数定义为$\|\cdot\|_0$: $x=x_1+x_2\in X$, $x_1,x_2\in H$, $\|x\|_0=\max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$, 显然$(X,\|\cdot\|_0)$是 Banach 空间.

在X中仍用M_φ表示$M_\varphi|_X=M_\varphi|_H+M_\varphi|_H$. 易证

$$M_\varphi^*|_X=M_\varphi^*|_H+M_\varphi^*|_H,\quad M_\varphi^*k_z=\overline{\varphi(z)}k_z,\quad z\in\Omega,\quad k_z\in X$$

设$E=H_V\oplus H_W$. 若$k_z\in H_V$, $|\varphi(z)|<1/2$, 则$|\overline{\varphi(z)}|<1/2$, $M_\varphi^*H_V=H_V$且$M_\varphi^*H_W=H_W$, 事实上, $k_z\in H_V$, $f(z)=\langle f.k_z\rangle$,

$$\begin{aligned}\varphi(z)f(z)&=\langle\varphi(z)f,\ k_z\rangle=\overline{\overline{\varphi(z)}\langle k_z,\ f\rangle}=\overline{\langle\overline{\varphi(z)}k_z,\ f\rangle}=\langle f,\ \overline{\varphi(z)}k_z\rangle\\&=\langle f,\ M_\varphi^*k_z\rangle\end{aligned}$$

$$M_\varphi^*k_z\in H_V,\quad M_\varphi^*H_V\subset H_V,\quad \text{同理} M_\varphi^*H_W\subset H_W$$

由$M_\varphi^*k_z=\overline{\varphi(z)}k_z$, $z\in\Omega$, 易得$M_\varphi^*H_V\supset H_V$, $M_\varphi^*H_W\supset H_W$, 所以$H_V=M_\varphi^*H_V$, $H_W=M_\varphi^*H_W$.

对任意$k_z\in H_V$, $\|M_\varphi^*k_z\|=|\varphi(z)|\|k_z\|<\|k_z\|/2$

对任意$k_z\in H_W$, $\|M_\varphi^*k_z\|=|\varphi(z)|\|k_z\|>2\|k_z\|$

令$\tau=1/2$, 在$E=E^u\oplus E^s$中, $E^u=H_W$, $E^s=H_V$满足双曲结构. 又$\varphi(\Omega)\cap S^1\neq\phi$, 由[1]定理4.9及定理6.2, M_φ^*周期点在H中稠密, 则M_φ^*的周期点在H_V, H_W中稠密. 所以在$H_V\oplus H_W$中$M_\varphi^*+M_\varphi^*$的周期点稠密. 所以$M_\varphi^*|_X$是非游荡算子, 且E^u, E^s是无穷维空间.

二、非游荡算子的超循环分解

由于无穷维空间中混纯性质的复杂性, 混纯的研究转化为吸引子的研究, 特别是近年来活跃的无穷维动力系统中惯性流形的研究. 不论吸引子还是惯性流形作为无穷维空间中集均有紧性要求(见[7]、[8]). 本节我们考虑 Banach 空间X中一个无穷维线性子空间$X_1\subset X$的紧集$E\subset X_1$.

定理4 无穷维线性空间X_1中的可逆算子A是相对于E的非游荡算子. 若$E\subset X_1$为紧集, 则存在不相交的集E_i, 使$E=\bigcup_{i=1}^{s}E_i$, 且$A|_{E_i}$是超循环算子.

为此引入如下记号, 设A可逆, $y\in X_1$

$$W_\varepsilon^u(y,A)=\{x\in E\mid\|A^{-j}(y-x)\|<\varepsilon,\ \lim_{k\to\infty}\|A^{-k}(y-x)\|=0\}$$

$$W_\varepsilon^s(y,A)=\{x\in E\mid\|A^{-j}(y-x)\|<\varepsilon,\ \lim_{k\to\infty}\|A^{k}(y-x)\|=0\}$$

$$W^s(y,A)=\{x\in E\mid\lim_{k\to\infty}\|A^{k}(y-x)\|=0\}$$

$$W^u(y,A)=\{x\in E\mid\lim_{k\to\infty}\|A^{-k}(y-x)\|=0\}$$

令$W_p=W^u(p,A)\cap E$, $X_p=\overline{W}_p$ (闭). 设$B_\eta(s)=\{y\in E\mid\|y-s\|<\eta\}$, $s\in E$, 显然成立$X_p\subset B_\eta(W_p)\subset B_\eta(X_p)$.

引理1 设$E=E^u\oplus E^s$是E的双曲结构, 在$E'=(\mathrm{span}\ E^u)\oplus(\mathrm{span}\ E^s)$上定义新范数$\|x\|_0$如下: $x\in E'$, $x=\xi+\eta$, $\xi\in\mathrm{span}\ E^u\subset X_1$, $\eta\in\mathrm{span}E^s\subset X_1$, $\|x\|_0=\max\{\|\xi\|, \|\eta\|\}$, $\|\cdot\|$是X中范数, 则$\|\cdot\|_0$与$\|\cdot\|$等价. 从而存在常数C_i, $i=1,\cdots,4$, 使

$$C_2\|x\|_0\leqslant\|x\|\leqslant C_1\|x\|_0,\quad C_4\|x\|\leqslant\|x\|_0\leqslant C_3\|x\|$$

本引理的证明易得，略去.

引理2 对充分小的$\varepsilon>0$，若$\|y-z\|<\delta<\varepsilon$，$y$及$z\in E$，则$W^u_\varepsilon(y,A)$与$W^s_\varepsilon(z,A)$有唯一交点.

证明 设$y=\xi_0+\eta_0$，$z=\xi_{00}+\eta_{00}$，ξ_0，$\xi_{00}\in E^u$，η_0，$\eta_{00}\in E^s$. 取$x=\xi_{00}+\eta_0$，则$x\in W^u_\varepsilon(y,A)\cap W^s_\varepsilon(z,A)$. 这由$\|y-z\|<\delta<\varepsilon$，用引理1得到. 现证$x$是唯一.

设另有$x_0\in W^u_\varepsilon(y,A)\cap W^s_\varepsilon(z,A)$. $x_0=x_1+x_2$，则$x-x_0=(\xi_{00}-x_1)+(\eta_0-x_2)$，$\xi_{00}-x_1\in E^u$，$\eta_0-x_2\in E^s$.

$$\begin{aligned}\|\xi_{00}-x_1\|&\leqslant\tau^k\|A^k(\xi_{00}-x_1)\|\leqslant\tau^k(\|A^k(z-x)\|\\&\quad+\|A^k(z-x_0)\|)\leqslant\tau^kC_3\varepsilon\to0\qquad(k\to\infty)\\\|\eta_0-x_2\|&\leqslant\tau^k\|A^{-k}(\eta_0-x)\|\leqslant\tau^kC_3\varepsilon\to0\qquad(k\to\infty)\end{aligned}$$

所以$x=x_0$，唯一性得证.

引理3 (1)存在$\delta>0$，$0<\eta<\delta$时，$X_p=B_\eta(X_p)=B_\eta(W_p)$.(2)若$p$，$q\in\operatorname{Per}A$，$X_p\cap X_q\neq\phi$，则$X_p=X_q$.

证明 (1) 若$x\in B_\eta(X_p)\cap\operatorname{Per}A$，因为$X_p\subset B_\eta(W_p)\subset B_\eta(X_p)$，存在$w\in W_p$，$\|x-w\|<\eta=\delta$，由引理2存在唯一$y\in W^u_\varepsilon(w,A)\cap W^s_\varepsilon(x,A)$. 所以$y\in W^u(w)\cap E\subset W^u(p)\cap E=W_p$，$y\in W^s(x)$. 设$x$的周期为$l$，则$x=A^{kl}x$，$k\in\mathbf{N}$. $\|A^{kl}x-A^{kl}y\|\to0$，所以$\|x-A^{kl}y\|\to0$，$x=\lim\limits_{k\to\infty}A^{kl}y\in\overline{W}_p\doteq X_p$. 所以$B_\eta(X_p)\cap\operatorname{Per}A\subset X_p$，对任意$z\in B_\eta(X_p)\subset E$，存在周期点$x_n\in B_\eta(X_p)\cap\operatorname{Per}A\subset X_p$，使$z=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in X_p$. 因此，$B_\eta(X_p)\subset X_p$，所以$X_p=B_\eta(X_p)=B_\eta(W_p)$.

(2) 取$0<\eta<\delta$，由于$B_\eta(W_p)\cap X_q=X_p\cap X_q\neq\phi$，存在$x\in W_p$，$y\in X_q$，$\|x-y\|<\delta$，则$x\in B_\eta(X_q)=X_q$。设$p$与$q$的周期分别为$l$与$m$. 因为$x\in W^u(p)\cap X_q$，$X_q$为$T^m$的闭不变集，则有$p=\lim\limits_{k\to\infty}A^{-klm}x\in X_q$. 任意$z\in W_p$，$\lim\limits_{k\to\infty}A^{-klm}z=p\in X_q$. 则$k$充分大时，$T^{-klm}z\in B_\eta(X_q)=X_q$. 所以存在$z\in X_q$，$W_p\subset W_q$，$X_p=\overline{W}_p\subset X_q$，同理$X_q\subset X_p$，$X_p=X_q$.

定理 4 的证明

若$p\in\operatorname{Per}A$，则$X_p=B_\eta(X_p)$，由引理3，X_p为E中开集.

$$E\subset\bigcup_{p\in\operatorname{Per}A}B_\eta(p)\subset\bigcup_{p\in\operatorname{Per}A}B_\eta(X_p)=\bigcup_{p\in\operatorname{Per}A}X_p$$

因为$E\subset X_1$，E是紧集，对存在有限个$p_1,\cdots$，p_l使$E=\bigcup\limits_{i=1}^{l}X_i$，对这有限个$X_i$重新设置，使它们彼此不交（只需要每个集或者前一个的并）.

因为$AW_{p_j}=W_{Ap_j}$，$AX_{p_j}=X_{Ap_j}$,由引理3得，若将$X_{p_1},\cdots$，X_{p_l}中在A作用下对应于X_{p_i}的那些X_{p_j}的并记为E_i，$i=1,2,\cdots,s$，则有$E=\bigcup\limits_{i=1}^{s}E_i$，$E_i$彼此不交，来证$A|E_i$是超循环的. 设$E_i=X_{p_{i1}}\cup X_{p_{i2}}\cup\cdots\cup X_{p_{ik}}$，$p_{ij}\in\operatorname{Per}A$，$j=1,2,\cdots,k$，则存在$l>0$，$A^lE_i=X_{p_i}$（只需取$l$为$p_{ij}$，$j=1,2,\cdots k$，周期的倍数），设$U$，$V$为$X_{p_i}$中开集，则$A^lU$，$A^lV$为$X_{p_i}$中开集，则存在周期点$q\in(A^lU)\cap X_{p_i}$（由周期点稠密得到）. 由引理3，$X_{p_i}=X_q$，$q\in\operatorname{Per}A$。所以$(A^lV)\cap X_q=(A^lV)\cap X_{p_i}=A^lV\neq\phi$，则存在$x\in(A^lX)\cap X_q$，设$q$周期为$m$，则有$\lim\limits_{k\to\infty}A^{-klm}x=q\in A^lU$. 对充分大的$k$，$A^{-klm}x\in A^lU$，所以$x\in A^{klm}(A^lU)\cap(A^lV)$.

则$A^{klm}(\phi A^lU)\cap(A^lV))\neq\phi$. 令$n=km$, 则$A^{nl}(A^lU)\cap(A^lV)\neq\phi$. 由$A$可逆, 则$(A^{nl}U)\cap V\neq\phi$. 由[1]可得$A|_{E_l}$是超循环算子. 证毕.

参 考 文 献

[1] G. Godefory and J. H. Shapiro, Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds, *J. Funct. Analy.*, **98** (1991), 229—269.

[2] D. A. Herrero, Limits of hypercyclic and supercyclic operators, *J. Funct. Analy.*, **99** (1991), 179—190.

[3] P. S. Bourdon, Invariant manifolds of hypercyclic vectors, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118** (1993), 845—847.

[4] D. A. Herrero and Z. Y. Wang, Compact perturbation of hypercyclic and supercyclic operators, *India. Univ. Math. J.*, **39** (1990), 819—829.

[5] D. A. Herrero, Triangular operators, *Bull. London Math. Soc.*, **23** (1991), 513—554.

[6] F. Riesz and B. S. Nagy, *Function Analysis*, Akademiai Kiado (1965).

[7] C. Foias, G. Sell and R. Teman, Inertial manifold for dissipative PDE's, *J. Diff. Equ.*, **73** (1988), 309—353.

[8] 田立新、徐振源、刘曾荣, 耗散孤立波方程的吸引子, 应用数学和力学, 15(6) (1994), 539—547.

[9] 田立新, Schrödinger 算子的极大耗散扩张, 应用数学和力学, 15(10) (1994), 919—926.

[10] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamic System*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, MA (1989).

The Property of Nonwandering Operator

Tian Lixin　　Lu Dianchen

(*Department of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang, Jiangsu* 212013, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, we study the nonwandering operator, which is a linear operator with chaos character and is in infinite dimensional linear space. We give the hypercyclic decomposition on the compact set of nonwandering operators.

Key words shift operator, hypercyclic operator, nonwandering operator