应用数学和力学，第17卷 第2期（1996年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类不确定双线性系统的状态反馈Robust控制*

陈松林[1]　　朱祖慈[1]

（林宗池推荐，1993年7月4日收到）

摘　　要

本文针对一类含不确定性的双线性系统设计了一种线性状态反馈控制。在一定的条件下，利用改进的李雅普诺夫第二方法关于稳定性的理论，证明了系统的稳定性。并给出例子说明。

关键词　鲁棒控制　双线性系统　不确定性　稳定性分析　李雅普诺夫函数

一、引　言

目前，对于含不确定性的线性系统稳定性的研究已有较多的成果，可以用许多稳定性判据来进行控制系统的分析与设计[1,2]。然而，对于双线性系统，由于它具非线性性，因此，其稳定性不仅与系统的结构、输入的形式有关，而且与初始状态向量有关，因而要困难得多[3,4]。

在有关双线性系统稳定化反馈控制的研究中，已有一些十分便于应用的控制器设计方法，如线性状态反馈控制、线性输出控制、二次型状态反馈控制律以及截顶型反馈控制律等[5]。究竟采用哪种控制，要视双线性系统的具体形式来定。本文中，我们假设所论系统的标称部分是在线性状态反馈控制下能稳的。

二、问题的描述与稳定性分析

我们考虑如下不确定双线性系统

$$\dot{X}=(A+\Delta A)X+\sum_{i=1}^{n}x_i(M_i+\Delta M_i)u+(B+\Delta B)u \tag{2.1}$$

这里 $X(t)\in\mathbf{R}^n$，$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$M_i$，$B\in\mathbf{R}^{n\times l}$，$u\in\mathbf{R}^l$，$\Delta A$，$\Delta M_i$，$\Delta B$ 为具相应规模的不确定量。

设在如下线性状态反馈

$$u=K^TX \tag{2.2}$$

下，系统可整理成下述形式

---

* 冶金部自然科学基金资助项目。

1 华东冶金学院，马鞍山 243002.

$$\left.\begin{aligned}\dot{z}_1&=f_1(t,\ z_1)+\Delta f_1(t,\ z_1)+g_1(t,\ z_1,\ \cdots,\ z_m)+\Delta g_1(t,\ z_1,\ \cdots,\ z_m)\\ \dot{z}_2&=f_2(t,\ z_2)+\Delta f_2(t,\ z_2)+g_2(t,\ z_1,\ \cdots,\ z_m)+\Delta g_2(t,\ z_1,\ \cdots,\ z_m)\\ &\cdots\cdots\\ \dot{z}_m&=f_m(t,\ z_m)+\Delta f_m(t,\ z_m)+g_m(t,\ z_1,\ \cdots,\ z_m)+\Delta g_m(t,z_1,\cdots,z_m)\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

该形式具有下述特点：系统(2.1)在反馈(2.2)作用下可看成由相互独立的子系统和关联项所组成。对(2.3)作如下假设

（Ⅰ） 各标称子系统

$$\dot{z}_i=f_i(t,\ z_i)\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

在控制(2.2)下能稳。即存在可微函数$V_i(t,\ z_i(t))$，以及正常数C_{i1}，C_{i2}，C_{i3}，使得

$$C_{i1}\|z_i\|^2\leqslant V_i(t,\ z_i(t))\leqslant C_{i2}\|z_i\|^2$$

$$\dot{V}_i(t,\ z_i(t))\leqslant -C_{i3}\|z_i\|^2$$

（Ⅱ） 记

$$g(t,\ x)=(g_1(t,\ z_1,\ \cdots,\ z_m),\ \cdots,\ g_m(t,\ z_1,\ \cdots,\ z_m))^T$$

$$f(t,\ x)=(f_1(t,\ z_1),\ f_2(t,\ z_2),\ \cdots,\ f_m(t,\ z_m))^T$$

且对$\Delta g(t,\ x)$和$\Delta f(t,\ x)$也给出类似的记号。

设存在非负常数a_i，$b_i(i=1,\ 2)$使

$$\|g(t,\ x)\|\leqslant a_1\|x\|^2+b_1\|x\|,\quad \|\Delta g(t,\ x)\|\leqslant a_2\|x\|^2+b_2\|x\|$$

（Ⅲ） （匹配条件）存在函数$\tilde{f}(t,\ x)$和常数l，使得

$$\Delta f(t,\ x)=f(t,\ x)\tilde{f}(t,\ x),\quad |\tilde{f}(t,\ x)|\leqslant l<1$$

（Ⅳ） $\left\|\dfrac{\partial V_i(t,\ z_i)}{\partial z_i}\right\|\leqslant C_{i4}\qquad(C_{i4}>0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$

（Ⅴ） $C_{3\min}(1-l)-C_{4\max}(a_1+a_2)>0$

式中 $C_{3\min}\triangleq\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}C_{3i}$，$C_{4\max}\triangleq\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}C_{4i}$

$\|\cdot\|$表示Euclidean范数。

在上述假设下，我们将得出系统(2.3)的有界性和稳定性结果。首先引述下面的引理。

引理[3,4] 对于系统 $\dot{x}=f(t,\ x)$，$f(t,\ 0)=0$，若存在一连续可微的实函数$V(t,\ x)$以及正常数C_1，C_2，C_3使得

i) $C_1\|x\|^2\leqslant V(t,\ x)\leqslant C_2\|x\|^2$

ii) $\dot{V}(t,\ x)\leqslant -C_3\|x\|^2$

则$x=0$是该系统指数大范围稳定解(ESL)。

这里$V(t,\ x)$可是t也可不是t的显函数，为了讨论方便，以下设$V(t,\ x)$不是t的显函数。

定理 在假设(Ⅰ)～(Ⅴ)下，不确定系统(2.3)有如下结果：

(a) 当$b_1^2+b_2^2\neq 0$时，系统(2.3)有界；

(b) 当$b_1=b_2=0$时，系统(2.3)渐近稳定。

证明 (a)利用假设(Ⅰ)中各标称孤立子系统的 Liapunov 函数来构造大系统(2.3)的Liapunov函数$V(x)$如下：

$$V(x)=\sum_{i=1}^{m}V_i(z_i) \tag{2.4}$$

则有

$$V(x)=\sum_{i=1}^{m}V_i(z_i)\leqslant\sum_{i=1}^{m}C_{i2}\|z_i\|^2\leqslant C_{2\max}\|x\|^2 \tag{2.5a}$$

$$V(x)=\sum_{i=1}^{m}V_i(z_i)\geqslant\sum_{i=1}^{m}C_{i1}\|z_i\|^2\geqslant C_{1\min}\|x\|^2 \tag{2.5b}$$

又因为

$$\begin{aligned}\dot V(x)&=\sum_{i=1}^{m}\dot V_i(z_i)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial V_i}{\partial z_i}\cdot\dot Z_i\\&=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial V_i}{\partial z_i}(f_i(t,z_i)+\Delta f_i(t,z_i)+g_i(t,z_1,\ \cdots,\ z_m)+\Delta g_i(t,z_1,\cdots,z_m))\\&\leqslant\sum_{i=1}^{m}(-C_{i3}\|z_i\|^2(1-l))+\sum_{i=1}^{m}\left\|\frac{\partial V_i}{\partial z_i}\right\|(\|g_i(\cdot)\|+\|\Delta g_i(\cdot)\|)\\&\leqslant-C_{3\min}(1-l)\|x\|^2+C_{4\max}((a_1+a_2)\|x\|^2+(b_1+b_2)\|x\|)\\&=-(C_{3\min}(1-l)-C_{4\max}(a_1+a_2))\|x\|^2+C_{4\max}(b_1+b_2)\|x\|\\&\triangleq-\tilde a\|x\|^2+\tilde b\|x\|\end{aligned} \tag{2.6}$$

当$\tilde b\neq 0$时，由于(2.6)式中$\dot V(x)$上界的主部系数$\tilde a>0$，因此当$\|x\|>\tilde b/\tilde a$时，$\dot V(x)<0$，从而$\|x\|$有界。

(b) $\tilde b=0$时，(2.6)式成为

$$\dot V(x)\leqslant-\tilde a\|x\|^2$$

利用引理立得系统(2.3)的渐近稳定性。

注 i) 假设(Ⅱ)及定理中的情形(b)，对双线性系统来说是比较自然的，情形(b)总可通过增加孤立子系统的维数来达到。

ii) 本方法稍经修改即可应用于较一般的弱耦合系统，从定理证明可看出，弱耦合系统的稳定性较强地依赖于孤立子系统。

iii) 顺便指出，文献[4]中(3.2)式的推得值得商榷。

三、仿 真 例 子

为简明起见，下面针对不确定量是固定的情形进行仿真。

考虑如下系统

$$\dot X=AX+x_1(M+\Delta M)u+Bu,\qquad \|X_0\|<1/2 \tag{3.1}$$

其中$X=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$，$M=(0,\ 0.4,\ 0.5)^T$，$\Delta M=(0,\ 0.1,\ 0.2)^T$，$B=(0,\ 0,\ 1)$。

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad \Delta A=0,\quad \Delta B=0$$

该系统在状态反馈

$$u=K^TX=(0,\ 1,\ 0)(x_1,\ x_2,\ x_3)^T=x_2 \tag{3.2}$$

下有如下形式

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=-x_1\\ \dot{x}_2&=-2x_2+0.5x_1x_2, \qquad \|X_0\|<1/2\\ \dot{x}_3&=-x_3+0.7x_1x_2+x_2\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

若将系统(3.3)视为由三个独立子系统经耦合而成，则按定理证明中的记号不难看出

$$C_{i1}=C_{i2}=1 \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$C_{13}=C_{33}=2,\ C_{23}=4$$

$$C_{i4}=1 \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$\begin{aligned}\|g(x)+\Delta g(x)\|&=\|(0,\ 0.5x_1x_2,\ 0.7x_1x_2+x_2)^T\|\\ &\leqslant\|(0,\ 0.5x_1x_2,\ 0.7x_1x_2)^T\|+\|(0,\ 0,\ x_2)^T\|\\ &\leqslant\frac{\sqrt{0.5^2+0.7^2}}{2}\|X\|^2+\|X\|\\ &=0.43\|X\|^2+\|X\|\end{aligned}$$

由定理中的假设(Ⅴ)及结论(a)知，不确定系统(3.3)有界。

进一步，若视(3.3)为由两个独立子系统耦合而成，即

$$\dot{x}_1=-x_1 \tag{3.4a}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2&=-2x_2+0.5x_1x_2 \qquad \|X_0\|<1/2\\ \dot{x}_3&=x_2-x_3+0.7x_1x_2\end{aligned} \tag{3.4b}$$

则应用定理的结论(b)能导出其渐近稳定性。

事实上，对子系统(3.4b)，可按线性系统理论构造所含线性部分的Liapunov函数[6]

$$V_2(x_2,\ x_3)=0.33x_2^2+0.33x_2x_3+0.5x_3^2$$

通过计算可得到如下估计

$$\left\|\frac{dV_2}{d\tilde{x}}\right\|=\sqrt{(0.66x_2+0.33x_3)^2+(0.33x_2+x_3)^2}$$

$$\leqslant 1.54$$

$$\left\|\frac{dV_2}{dt}\right\|=(0.66x_2+0.33x_3,\ 0.33x_2+x_3)\cdot\begin{pmatrix}-2x_2\\ -x_3+x_2\end{pmatrix}$$

$$=-(x_2^2+x_3^2)=-\|\tilde{x}\|^2$$

上面算式中$\tilde{x}\triangleq(x_2,\ x_3)$，且可看出：$C_{23}=1$

又由计算$V_2(\tilde{x})$的过程可知有

$$0.23\|\tilde{x}\|^2\leqslant V_2(\tilde{x})\leqslant 0.60\|\tilde{x}\|^2$$

参照前面的记号和计算结果得

$$C_{3\min}=\min(1,\ 2)=1$$

$$C_{4\max}=\max(2,\ 1.54)=2$$

此时不难验证，条件(Ⅴ)得到满足，根据定理的结论(b)知大系统(3.4a)，(3.4b)渐近稳定。从本文的结果和仿真例子可看出，双线性系统的渐近稳定性与初值有关，因为条件(Ⅳ)对初值进行了约束。

参 考 文 献

[1] W. C. Yang and M. Tomizuka, Discrete-time Robust control via state feedback for single input systems, *IEEE Trans. Automat. Control.*, AC-35 (1990), 590—598.

[2] 俞向罡、顾兴源，一类不确定离散时间系统的最优鲁棒控制，自动化学报，18(5) (1992)，542—550.

[3] B. R. Barmish, M. Corless and G. Leitmann, A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems, *SIAM J. Control Optim.*, 21(2) (1983), 246—255.

[4] K. Liu and F. L. Lewis, An improved result on the stability analysis of nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Control.*, AC-37(9) (1992), 1425—1431.

[5] 华向明，《双线性系统建模与控制》，华东化工学院出版社，上海 (1990)，148—166.

[6] 高为炳，《运动稳定性基础》，高等教育出版社，北京 (1987).

Robust Control via State Feedback for a Class of Uncertain Bilinear Systems

Chen Songlin Zhu Zuchi

(*East China Institute of Metallurgy, Maanshan* 243002, *P. R. China*)

Abstract

This paper is concernted with the problem of designing a stabilizing controller for a class of uncertain bilinear systems. The uncertainties in the systems must satisfy matching condition and their bounds should be known. The so-called improved approach for stability analysis of nonlinear systems is used. Under some suitable assumptions a linear robust state feedback controller can be designed. At last an illustrative example is demonstrated.

Key words Robust control, bilinear system, uncertain, stability analysis, Liapunov function