

冲击扭矩作用下弹性圆柱壳中应力波 导致的动力屈曲问题*

韩强¹ 马宏伟¹ 张善元¹ 杨桂通¹
武 际 可²

(1994年11月18日收到)

摘 要

圆柱壳的屈曲问题曾被许多力学工作者从不同的角度进行过研究。本文以半无限长弹性圆柱壳为研究对象, 将冲击扭矩作用下圆柱壳的动力屈曲归结为由于扭转应力波的传播导致的分叉问题, 最后将此分叉问题化为一个非线性方程组的求解, 并对动力屈曲时横向惯性的影响进行了讨论, 最后进行了数值分析, 得到了一些有益的结论。

关键词 动力屈曲 应力波 分叉

一、引 言

圆柱壳是工程中常见的结构, 它在各类载荷作用下的屈曲受到了人们广泛的重视。

Donnell^[1]是最早进行圆柱壳扭转屈曲的研究者之一, Lundquist^[2]和Nash^[3]曾进行过一些实验研究, 较系统的实验研究和理论分析是Yamaki^[4]的工作, 但以上这些工作都仅限于圆柱壳弹性静态屈曲问题。关于圆柱壳的动态稳定性问题, 日本Tohoku大学高速力学研究所曾对周期作用扭矩下圆柱壳的动态稳定性问题进行过一系列的研究^[5~7]。Leyko^[8]则研究了受随时间线性增加扭矩作用下的圆柱壳动态屈曲。王德禹、马宏伟等^[9]也曾对冲击扭矩作用下弹性圆柱壳的动态屈曲问题进行过理论和实验分析。但在冲击扭矩作用下弹性圆柱壳动态屈曲的理论分析中考虑应力波传播的影响, 至今未见报道, 关于在结构动态屈曲分析中考虑应力波的影响, 大都仅限于直杆, 王仁^[10]等曾对圆柱壳受轴向撞击时应力波对壳体屈曲的影响进行过初步探讨。本文针对冲击扭矩作用下, 半无限长弹性圆柱壳的动力屈曲问题, 分析了横向惯性效应的影响, 考虑了应力波的传播过程, 将动力屈曲归结为扭转应力波的传播导致的分叉问题, 最后将其化为一个非线性方程组的求解, 进行了数值计算, 并对结果进行了讨论。

* 感谢国家自然科学基金和山西省留学归国人员基金的资助

1 太原工业大学, 太原 030024.

2 北京大学, 北京 100871.

二、横向惯性效应和分叉问题的提法

如图 1 所示为一半无限长薄壁圆壳, 假定壳体是完善的, 其端部作用一突加阶跃剪应力 τ , 壳体左端为铰支边界。

扭矩 $T(0, t)$ 为:

$$T(0, t) = 2\pi R^2 h \tau(0, t) \quad (2.1)$$

$$\text{而 } \tau(x, t) = \begin{cases} S & (0 \leq x \leq ct) \\ 0 & (x > ct) \end{cases} \quad (2.2)$$

S 为阶跃剪应力幅值, $c = \sqrt{G/\rho}$ 为剪切波速,

G 为剪切模量, ρ 为材料密度, t 为时间参量。

圆柱壳在前屈曲状态时, 位移分量 $u = w = 0$, v 则满足下列波动方程及边界条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ 2\pi R^2 h G \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = T(0, t) \\ v(x, t) = 0 \quad (x > ct) \end{cases} \quad (2.3)$$

则(2.3)式满足位移连续条件的解是:

$$v(x, t) = \begin{cases} \frac{T(0, t) \cdot c}{2\pi R^2 h G} \left(t - \frac{x}{c}\right) & (0 \leq x \leq ct) \\ 0 & (x > ct) \end{cases} \quad (2.4)$$

而圆柱壳中的扭矩为:

$$T(x, t) = 2\pi R^2 h G \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.5)$$

将(2.4)式代入:

$$T(x, t) = \begin{cases} T(0, t) & (0 \leq x \leq ct) \\ 0 & (x > ct) \end{cases} \quad (2.6)$$

在 t 时刻, 设圆柱壳横向有一微小扰动 $w(x, y, t)$, 在应力波波及的区域内 ($0 \leq x \leq ct$), 动力形式的 Donnell 方程为:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2S \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \rho \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (2.7)$$

设 w 具有分离变量的形式, 即 $w(x, y, t) = w^*(x, y) T(t)$ 代入则有:

$$\left[\frac{D}{h} \nabla^4 w^* + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + 2S \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right) \right] T(t) = -\rho \ddot{T}(t) \nabla^4 w^* \quad (2.8)$$

$$\text{故此: } \frac{\frac{D}{h} \nabla^4 w^* + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + 2S \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right)}{\rho \nabla^4 w^*} = -\frac{\ddot{T}}{T} = \lambda \quad (2.9)$$

令 $\lambda = \omega^2$, 有

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (2.10)$$

其通解形如:

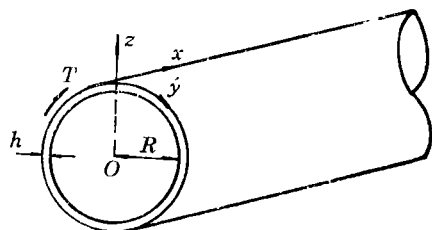


图 1

$$T(t) = c_1 \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.11)$$

其中 φ 为初位相, 对此问题不难判定 $\varphi = 0$, 故此, 动力形式 Donnell 方程的解形如:

$$w(x, y, t) = w^*(x, y) \sin \omega t \quad (2.12)$$

由此不难发现, 当 $\omega \neq 0$, 它表征一自由振动而不是屈曲, 自由振动的频率 ω 和载荷参量 S 有关, 当 S 达到某一临界值 S_{cr} 时, $\omega = 0$, 这意味着自由振动的周期变成了无穷大, 也即此时对应着分叉, 或者说分叉条件是

$$\omega = 0 \quad (2.13)$$

由此我们可以得出三点结论:

(1) 在有微小扰动的情况下, 壳体的前屈曲运动是一个自由振动, 而并非一个简单的平凡解, 分叉实际上是不能维持在壳体平衡位置附近的微小自由振动而变成发散型运动的过程, 这和我们的直观想象是相同的.

(2) 将分叉条件(2.13)和(2.9)式对比, 有:

$$\frac{D}{h} \nabla^8 w^* + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + 2S \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (0 \leq x \leq ct) \quad (2.14)$$

不难发现, 这是静力形式的 Donnell 方程, 即可以通过静力 Donnell 方程非平凡解来讨论动力分叉问题.

(3) 在讨论此类动力方程寻求分叉点问题时, 不应计及横向惯性项, 当然在进行后分叉分析时, 横向惯性效应是必须考虑的, 因为结构分叉之后的变化过程仍是一瞬态过程, 且在这一过程中横向变形是一主要变形.

综上所述, 我们可以给出分叉问题的提法如下: 在 t 时刻, 设圆柱壳横向有一微小扰动 $w(x, y, t)$, 由线性 Donnell 方程:

$$\begin{cases} \frac{D}{h} \nabla^8 w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2S \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0 & (0 \leq x \leq ct) \\ \frac{D}{h} \nabla^8 w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 & (x > ct) \end{cases} \quad (2.15)$$

其边界条件为在铰支边界处应有:

$w|_{z=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{z=0} = 0$, 在无穷远处横向位移、转角以及内力均为零. 方程的连接条件是, 在连接点 $x = ct$ 处 $w_+ = w_-$, $w'_+ = w'_-$, $M_+ = M_-$, $Q_+ = Q_-$, 其中“+”和“-”分别表示连接点处的左右极限. (2.15) 式即是 将圆柱壳冲击扭矩作用下动力屈曲问题归结为分叉问题所需的方程, 求解此分叉问题, 即是要考虑方程(2.15)的解何时非零, 即何时存在分叉点, 以及在分叉点上各有关参数的关系.

取位移模式 $w(x, y, t)$ 为:

$$\begin{cases} w(x, y, t) = f \left[1 - \cos \frac{2\pi}{ct} (x - ct) \right] \cos \frac{n}{R} (y + \beta x) & (0 \leq x \leq ct) \\ w(x, y, t) = 0 & (x > ct) \end{cases} \quad (2.16)$$

其中 n 为周向波数, β 为波纹与 x 轴夹角, w 应满足如下条件:

(1) 周期性条件: $w(x, y, t) = w(x, y + 2\pi R, t)$

(2) 铰支边界位移和力的条件: $w|_{x=0} = w''|_{x=0} = 0$

(3) 无穷远处位移条件: $w|_{x \rightarrow \infty} = w'|_{x \rightarrow \infty} = 0$

(4) 方程在波阵面 $x = ct$ 处的位移连接条件:

$$w_+ = w_-, \quad w'_+ = w'_-$$

(5) 方程在波阵面 $x = ct$ 处力的连接条件:

$$M_{x^-} = M_{x^+}, \quad M_{y^-} = M_{y^+}, \quad Q_{x^-} = Q_{x^+}, \quad Q_{y^-} = Q_{y^+}$$

$$\text{其中, } M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$Q_y = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}$$

$$H = -D(1-\mu) \left[\frac{1}{2R} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$

注意到:

$$\int_0^{2\pi R} \sin \frac{n}{R} (y + \beta x) dy = \int_0^{2\pi R} \cos \frac{n}{R} (y + \beta x) dy = 0$$

那么, 不难验证, (2.16) 式给定的位移模式满足周期性条件和所有的位移条件, 至于铰支边界和波阵面 $x = ct$ 处力的边界条件则是在积分意义上得到了满足。

今将(2.16)式第一式改写为如下形式:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= f \cos \frac{n}{R} (y + \beta x) - f \cos \frac{2\pi}{ct} (x - ct) \cos \frac{n}{R} (y + \beta x) \\ &= w_1 + w_2 + w_3 \end{aligned} \quad (2.17)$$

其中

$$w_1 = f \cos \frac{n}{R} (y + \beta x)$$

$$w_2 = -\frac{f}{2} \left[\cos \frac{nY}{R} \cos mX - \sin \frac{nY}{R} \sin mX \right]$$

$$w_3 = -\frac{f}{2} \left[\cos \frac{nY}{R} \cos lX - \sin \frac{nY}{R} \sin lX \right]$$

而且

$$m = \frac{n\beta}{R} + \frac{2\pi}{ct}$$

$$l = \frac{n\beta}{R} - \frac{2\pi}{ct}$$

$$X = x - ct$$

$$Y = y + \beta ct$$

将(2.17)式代入(2.15)式第一式则有:

$$\left[\frac{D}{h} \left(\frac{n}{R} \right)^8 (\beta^2 + 1)^4 + \frac{E}{R^2} \left(\frac{n}{R} \beta \right)^4 - 2S\beta \left(\frac{n}{R^2} \right)^6 (\beta^2 + 1)^2 \right] w_1$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{D}{h} (m^2 + \frac{n^2}{R^2})^4 + \frac{E}{R^2} m^4 - 2S \frac{mn}{R} (m^2 + \frac{n^2}{R^2})^2 \right] w_2 \\
& + \left[\frac{D}{h} (l^2 + \frac{n^2}{R^2})^4 + \frac{E}{R^2} l^4 - 2S \frac{l \cdot n}{R} (l^2 + \frac{n^2}{R^2})^2 \right] w_3 \\
& = 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

因 $w_1 \neq 0$, $w_2 \neq 0$, $w_3 \neq 0$, 则利用 w_1 , w_2 , w_3 的系数为零可得非线性方程组:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2S}{E} &= \frac{(m^2 R^2 + n^2)^2}{12(1-\mu^2) m R n} \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \frac{m^3 R^3}{(m^2 R^2 + n^2)^2 n} \end{aligned} \right. \tag{2.19a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2S}{E} &= \frac{(l^2 R^2 + n^2)^2}{12(1-\mu^2) l R n} \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \frac{l^3 R^3}{(l^2 R^2 + n^2)^2 n} \end{aligned} \right. \tag{2.19b}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2S}{E} &= \frac{n^2 (\beta^2 + 1)^2}{12(1-\mu^2) \beta} \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \frac{\beta^3}{n^2 (\beta^2 + 1)^2} \end{aligned} \right. \tag{2.19c}$$

这样就分叉问题转化为非线性方程组(2.19a~c)的求解。

三、数值分析和结论

在前述问题中, 通常感兴趣的是在分叉点上问题中主要参数 S 和 t 之间的关系, 例如, 给定临界屈曲时间 t_{cr} , 由非线性方程组(2.19a~c)知应有一临界屈曲剪应力 S_{cr} 与之对应, 并可求出此时的周向波数 n 和波纹倾角 β 。

计算采用材料参数: $\rho = 2.78(\text{g/cm}^3)$, $E = 71168(\text{MPa})$, $\mu = 0.33$, $c = 4.36(\text{mm}/\mu\text{s})$, 材料为合金铝 LY12。图 2 即为临界屈曲应力 S_{cr} 和临界屈曲时间 t_{cr} 的关系曲线。曲线①对应着 $h/R = 0.02$, 曲线②对应着 $h/R = 0.05$, 二曲线壳体半径 R 均为 15mm 。

表 1 和表 2 则为 $h/R = 0.02$ 和 $h/R = 0.05$ 时不同的临界屈曲时间 t_{cr} 对应的周向波数及波纹倾角。

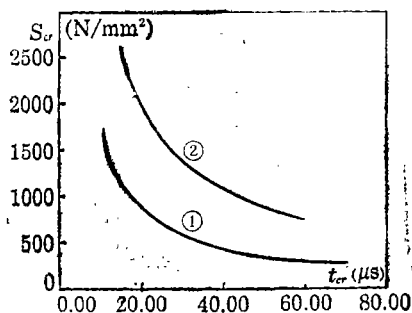


图 2

表 1 $h/R = 0.02$

表 2 $h/R = 0.05$

t_{cr}	S_{cr}	n	β	t_{cr}	S_{cr}	n	β
15	1036.59	13	0.24	15	2516.6	9	0.33
20	840.44	11	0.21	20	2060.1	8	0.31
30	606.65	9	0.19	25	1642.5	7	0.30
45	400.45	7	0.17	30	1321.7	6	0.26
55	323.95	6	0.16	40	—	—	—
70	251.44	5	0.14	50	974.3	5	0.24
80	251.44	5	0.14	60	711.3	4	0.21

表中各量单位分别为: t_{cr} 为 μs , S_{cr} 为 N/mm^2 , β 为弧度。

从图 2 及表 1、表 2, 我们可以得出以下一些主要结论:

(1) 当 $t_{cr} \rightarrow \infty$ 时, 临界屈曲应力 $S_{cr} \rightarrow S_{cr}^*$, 即曲线有一水平渐近线, 这表明壳体存在

一个临界长度 L^* ，当壳体长度大于此临界长度时，屈曲模态和临界屈曲时间 t_{cr} 不变。

(2) 如果输入一个脉冲宽度为 Δt 的矩形脉冲载荷，如 Δt 较小，则脉冲强度需很高才能使壳体上应力波传播的初期发生屈曲。

(3) 临界屈曲时间不同，相应的屈曲模态也不相同。

(4) 式(2.16)给出的位移模式不仅适用于圆柱壳扭转的动力屈曲问题，而且同样适用于静力屈曲问题。同时，由于能够精确满足所有的位移边界条件，因此与其它形式的位移模式相比，具有精度高，形式简单的优点。

(5) 阶跃载荷作用下（应力波无反射），圆柱壳的动力屈曲问题就相当于壳体长度 $L = ct$ 的圆柱壳的静力扭转屈曲问题，此时，相当于在波阵面 $x = ct$ 处为固定端约束的情形。

(6) 分叉条件是 $\omega = 0$ ，这意味着在平衡状态附近微振动运动形式的破坏即产生了分叉，因此在讨论寻求分叉点的问题时，不应计及横向惯性项，横向惯性是随着分叉的发展而产生的，在进行后分叉分析时，横向惯性效应则是必须考虑的。

由于问题本身的复杂性，我们只考虑了半无限长圆柱壳中应力波传播导致的分叉问题，目的是为了给出一个对简化了的问题的正确提法，并对问题的主要方面进行讨论，所以没有考虑应力波反射的影响，但本文的结果对于其它类型结构中应力波引起的分叉问题有所启示。

参 考 文 献

- [1] L. H. Donnell, Stability of thin walled tubes under torsion, *NACA TR 479*, Washington DC(1939).
- [2] E. E. Lundquist, Strength tests on thin walled duralumin cylinders in torsion, *NACA TN427*, Washington DC(1952).
- [3] W. A. Nash, An experimental analysis of the buckling of thin initially imperfect cylindrical shells subjected to torsion, *Pro. Sci. Exp. Stress Anal.*, 16(1959), 55—68.
- [4] N. Yamaki, *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*, North-Holland (1984).
- [5] N. Yamaki and K. Nagai, Dynamic stability of circular cylindrical shells under Periodic shearing forces, *J. Sound and Vibrations*, 45(1976), 51—527.
- [6] N. Yamaki, J. Tani and H. Doki, Dynamic stability of fluid filled circular cylindrical shells under periodic shearing forces (in Japanese)(trans. by JAME), 45(1979), 406—413.
- [7] M. Chiba, T. Yamashida, H. Sugiyama and H. Tani, Dynamic stability of liquid-filled cylindrical shells under Periodic shearing forces, *J. Press. Vess. Tech., ASME.*, 111(1989), 420—427.
- [8] Leyko, L. and S. Sprzynski, Energy method of analysis of dynamic stability of a cylindrical shell subjected to torsion, *Arch Mech.*, 26(1974), 13—24.
- [9] 马宏伟、王德禹、杨桂通，圆柱形薄壳冲击扭转屈曲的实验研究，固体力学学报，14(4)(1993)，297—303。
- [10] 陈长安、苏先越，圆柱壳轴向冲击下屈曲中的波动效应，中国科学院非线性连续介质力学开放实验室报告(1990)。

The Dynamic Buckling Problem Caused by Propagation of Stress Wave in Elastic Cylindrical Shells under Impact Torque

Han Qiang Ma Hongwei Zhang Shanyuan Yang Guitong

(Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, P. R. China)

Wu Jike

(Peking University, Beijing 100871, P. R. China)

Abstract

The buckling problem of cylindrical shells has been studied by many mechanic researchers from different points of view. In this paper, an elastic cylindrical shell with semi-infinite length is studied. Let its dynamic buckling under impact torque be reduced to a bifurcation problem caused by propagation of the torsional stress wave. The bifurcation problem is converted to a solution of nonlinear equations, the lateral inertia effect on the dynamic buckling is also discussed. Finally, numerical computation is carried out, from which, some beneficial conclusions are obtained.

Key words: dynamic buckling, stress wave, bifurcation