应用数学和力学，第17卷 第1期（1996年1月）
APPlied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

旋量法在机器人动力学分析中的应用*

林端麟[1] 蒋少茵[1] 林 碧[1]

（汤任基推荐，1994年8月3日收到）

摘 要

本文用旋量方法研究机器人的动力学模型，将速度和角速度，力和力矩的内在联系有机地融合为一体，使 Newton-Euler 方法更加简明有效率。文中相对于机器人各臂质心建立参考系，使惯性张量和质心加速度计算简化，进一步减少计算量，达到快速实时计算。

关键词 机器人动力学 旋量 牛顿-欧拉方法

一、前 言

机器人的运动学和动力学研究直接关系到机器人的设计和控制，研究的目的在于寻找能够快速计算机器人动力学模型的方法，目前关于这方面的研究有许多方法：如 Lagrange-Euler 方法；Newton-Euler 方法；递推形式 Lagrange-Euler 方法；广义 D'Alembert 原理方法等[1~4]，Newton-Euler 方法的计算量较小，但是难以用它设计机器人的控制系统。旋量方法是沿着另一条独立途径发展的动力学分析方法，它将矢量与矢量矩融合为一体，使牛顿-欧拉方程具有更加简明的表达形式，将对偶数记法用矩阵形式表达使运算程式化而便于程式控制，文中在构件的质心建立附体坐标系，使惯性张量和质心加速度计算简化，更进一步减少了计算量。

二、旋 量 矩 阵

定义矢量S在不同参考系$(0,x)_i$及$(0,x)_j$的旋量坐标列阵$\hat{S}^i$与$\hat{S}^j$之间满足关系式

$$\hat{S}^i=\hat{A}^{ij}\hat{S}^j \tag{2.1}$$

$\hat{A}^{ij}$为旋量变换矩阵[5]

$$\hat{A}^{ij}=\left[\begin{array}{c|c} A^{ij} & 0 \\ \hline B^{ij} & A^{ij} \end{array}\right] \tag{2.2}$$

式中A^{ij}是将参考系$(O,x)_i$旋转至$(O,x)_j$系的旋转螺旋变换矩阵

---

* 本课题得到福建自然科学基金资助。

1 华侨大学，泉州 362011。

$$A^{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$a_{\xi\gamma}$是第ξ行，第γ列基矢量x^i_ξ，x^j_γ之间夹角$\theta_{\xi\gamma}$的余弦．B^{ij}为在三维空间将参考系$(O,x)_i$平移至基系$(O,x)_i$的平移螺旋变换矩阵．

$$B^{ij}=\tilde{d}A^{ij}$$

$$\underset{\sim}{p}=\begin{bmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{bmatrix}$$

d_1，d_2，d_3为参考系原点O_i至O_j的矢径d^{ij}在参考系$(O,x)_i$中的三个投影．

任意两参考系之间的变换矩阵等于一系列相邻系之间变换矩阵的连乘积

$$\hat{A}^{ij}=\prod_{\lambda=i}^{j-1}\hat{A}^{\lambda,\lambda+1}$$

螺旋变换矩阵$\hat{A}^{ij}$和其微分$d\hat{A}^{ij}$的变换式为

$$d\hat{A}^{ij}=\Delta\hat{A}^{ij}$$

在微分情况下$\sin\delta\to\delta$，$\cos\delta\to 1$，并略去高阶微量，此时

$$\Delta=\begin{bmatrix} 0 & -\delta x_3 & \delta x_2 & 0 & 0 & 0 \\ \delta x_3 & 0 & -\delta x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta x_2 & \delta x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dx_3 & dx_2 & 0 & -\delta x_3 & \delta x_2 \\ dx_3 & 0 & -dx_1 & \delta x_3 & 0 & -\delta x_1 \\ -dx_2 & dx_1 & 0 & -\delta x_2 & \delta x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

式中δ表示参考系的微旋转，d表示参考系的微平移，定义函数

$$\mu_i=\begin{cases} 1 & \text{(当第}i\text{个关节是转动关节时)} \\ 0 & \text{(当第}i\text{个关节是移动关节时)} \end{cases}$$

令 $\hat{\mu}_i=[0\ \ 0\ \ \mu_i\ \ 0\ \ 0\ \ (1-\mu_i)]$

取第i关节付的转角θ_i，或滑移距离z_i作为广义坐标 $q_i=(1-\mu_i)z_i+\mu_i\theta_i(i=1,2\cdots,n)$可以得到

$$\partial\hat{A}^{ij}/\partial q_i=\sigma\hat{A}^{ij},\quad \partial\hat{A}^{ij}/\partial q_i=\hat{A}^{ji}\sigma'$$

$$\sigma=\begin{bmatrix} 0 & -\mu_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\mu_i) & 0 & 0 & -\mu_i & 0 \\ (1-\mu_i) & 0 & 0 & \mu_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\qquad \sigma'=\begin{bmatrix} 0 & \mu_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\mu_j) & 0 & 0 & \mu_j & 0 \\ -(1-\mu_j) & 0 & 0 & -\mu_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

三、动力学模型的旋量表达式

1. 运动方程

为了使惯性张量和质心加速度计算简化，进而减少关节力（力矩）的计算，将固联于机器人各可动件上的附体参考系原点放在相应构件的质心$O_i(i=1,2,\cdots,n)$如图1，设附体参考系$(O,x^k)_{i-1}$及$(O,x^k)_i(k=1,2,3)$中x^3_{i-1}、x^3_i分别平行于前（或后）关节轴S_i、S_{i+1}，x^3_{i-1}与S_i之间距离为b_{i-1}，x^3_i与S_{i+1}之间距离为b_i，参考轴x^1_i，x^1_{i-1}分别沿b_i，b_{i-1}，图示箭头方向为正方向，并令x^1_i同时与S_i及x^3_i正交，x^3_{i-1}与x^3_i之间的扭向角为α_i，x^1_{i-1}与x^1_i在关节轴S_i的垂足p，t之间距离无滑移时为h，有滑移量z时为$(h+z)$。点t与O_i的长度为a_i，θ为x^3_{i-1}与x^3_i在垂直于x^3_i轴平面上的夹角。b_{i-1}、b_i，h，a_i均为结构常量，θ和z分别为转动关节变量和移动关节变量。

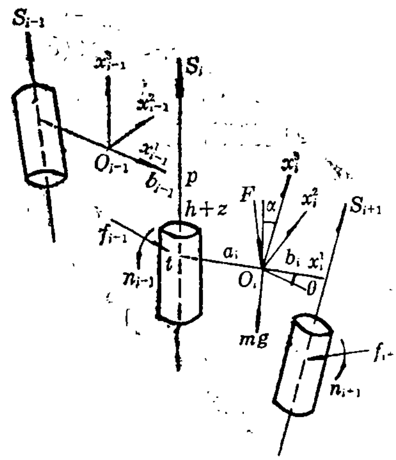

图1 质心附体参考系

将附体参考系$(O,x^k)_{i-1}$变换到$(O,x^k)_i$位置的变换步骤为(1)将参考系$(O,x)_{i-1}$沿x^1_{i-1}移动距离b_{i-1}至S_i轴的垂足p点，使x^3_{i-1}轴与S_i轴重合，(2)再沿S_i轴移动h至t点，(3)绕x^1_{i-1}轴转过α角，使x^3_{i-1}与x^3_i轴平行，(4)沿x^1_i轴方向移动a_i距离至O_i位置，使x^3_{i-1}与x^3_i轴重合，(5)绕轴x^3_i转过θ角，使x^1_{i-1}与x^1_i重合。

于此，第i构件附体参考系相对于第$i-1$构件的旋转变换矩阵为

$$A^i_{i-1}=\begin{bmatrix} c\theta & -c\alpha s\theta & s\alpha s\theta \\ s\theta & c\alpha c\theta & -s\alpha c\theta \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}$$

平移变换矩阵为

$$B^i_{i-1}=\begin{bmatrix} 0 & -(h+z) & a_i s\theta \\ h+z & 0 & -(b_{i-1}+ac\theta) \\ -a_i s\theta & b_{i-1}+a_i c\theta & 0 \end{bmatrix}\cdot A^i_{i-1}$$

当运动关节为回转付时，滑移量$z=0$，运动关节为移动付时$\theta=0$。式中c，s为cos，sin的缩写。

组成参考系$(O,x)_i$相对于$(O,x)_{i-1}$的旋量变换矩阵为

$$\hat{A}^i_{i-1}=\left[\begin{array}{c|c} A^i_{i-1} & 0 \\ \hline B^i_{i-1} & A^i_{i-1} \end{array}\right]$$

$\hat{A}^i_{i-1}$的逆阵$\hat{A}^{i-1}_i$，则为将组成$\hat{A}^i_{i-1}$的各子矩阵转置

$$\hat{A}^{i-1}_i=(\hat{A}^i_{i-1})^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} (A^i_{i-1})^T & 0 \\ \hline (B^i_{i-1})^T & (A^i_{i-1})^T \end{array}\right]$$

设：V_i为第i构件质心的绝对速度，V_i^e为第$i-1$构件上与O_i重合点的速度

V_i^r为O_i相对于参考系$(O,x)_{i-1}$的相对速度，ω_i为第i构件的角速度

$e_k(k=1,2,3)$为参考系单位矢量

构件质心的速度

$$V_i=V_i^e+V_i^r,\quad V_i^e=\hat{A}_{i-1}^i V_{i-1},\quad V_i^r=\hat{A}_{i-1}^i(\omega_{i-1}\times(b_{i-1})e_1+\hat{\mu}\dot{q}_i)$$

$$\therefore\quad V_i=\hat{A}_{i-1}^i(V_{i-1}+\omega_{i-1}\times(b_{i-1})e_1+\hat{\mu}\dot{q}_i)=\hat{A}_{i-1}^i(V_{i-1}^i+\hat{\mu}\dot{q}_i)$$

式中　$V_{i-1}^i=V_{i-1}+\omega_{i-1}\times(b_{i-1})e_1$

构件i的角速度　$\omega_i=\hat{A}_{i-1}^i(\omega_{i-1}+\hat{\mu}\dot{q}_i)$

将V_i，ω_i写成基系的速度旋量式表示

$$\hat{V}_i=\begin{bmatrix}\omega_i\\ \hdashline V_i\end{bmatrix}=\hat{A}_{i-1}^i(\hat{V}_{i-1}^i+\hat{\mu}\dot{q}_i) \tag{3.1}$$

式中　$\hat{V}_{i-1}^i=\begin{bmatrix}\omega_{i-1}\\ V_{i-1}^i\end{bmatrix}$

将式(3.1)对时间求导得质心加速度旋量式

$$\dot{\hat{V}}_i=\hat{A}_{i-1}^i(\dot{\hat{V}}_{i-1}^i+\hat{\mu}\ddot{q}_i)+\sigma'\hat{A}_{i-1}^i\hat{V}_{i-1}^i\dot{q}_i \tag{3.2}$$

2.　动力学方程

设：m_i为第i构件总质量，$\tilde{J}_i$为第i构件质心对于自身参考系的惯性矩阵

f_{i+1}，n_{i+1}为第$i+1$构件通过$i+1$关节对i构件作用的力和力矩

f_{i-1}，n_{i-1}为第$i-1$构件通过关节i对构件i作用的力和力矩

E_i，N_i为为作用于第i构件质心的主矢和主矩

根据牛顿-欧拉方程

$$F_i=m_i(\dot{V}_i+\omega_i\times V_i),\quad N_i=\tilde{J}_i\cdot\dot{\omega}_i+\omega_i\times\tilde{J}_i\cdot\omega_i$$

将上两式综合写成旋量方程

$$\hat{F}_i=\phi_i\dot{\hat{V}}_i+H_i\phi_i\hat{V}_i \tag{3.3}$$

式中　$\hat{F}_i=\begin{bmatrix}F_i\\ \hdashline N_i\end{bmatrix}$

$$\phi_i=\begin{bmatrix}0&0&0&m_i&0&0\\0&0&0&0&m_i&0\\0&0&0&0&0&m_i\\&&&0&0&0\\&\tilde{J}_i&&0&0&0\\&&&0&0&0\end{bmatrix},\quad H_i=\begin{bmatrix}0&-\omega_i^3&\omega_i^2&0&0&0\\\omega_i^3&0&-\omega_i^1&0&0&0\\-\omega_i^2&\omega_i^1&0&0&0&0\\0&0&0&0&-\omega_i^3&\omega_i^2\\0&0&0&\omega_i^3&0&-\omega_i^1\\0&0&0&-\omega_i^2&\omega_i^1&0\end{bmatrix}$$

作于用i构件的合力旋量，等于与i构件关联的关节付给予构件的作用力f_{i+1}，f_{i-1}及力矩n_{i+1}，n_{i-1}组成的力旋量，加上作用于该构件的重力相对于O_i的旋量。

$$\hat{F}_i=\hat{A}_i^{i-1}\hat{f}_{i-1}-\hat{f}_{i+1}+\hat{F}_i^g$$

或写成由手部向内递推的方程

$$\hat{f}_{i-1}=\hat{A}^{i}_{i-1}(\hat{f}_{i+1}+\hat{F}_i-\hat{F}^{g}_i)$$

上面均为递推关系式，为已知运动付关节的广义坐标q_i及其导数$\dot{q}_i$，$\ddot{q}_i(i=1,2,\cdots,n)$，应用递推公式(3.1)，(3.2)可求运动参数$V_i$，$\dot{V}_i$，$\omega_i$，$\dot{\omega}_i(i=1,2,\cdots,n)$，从基座向外递推求解。为求各关节的驱动力（力矩），可应用公式(3.3)，(3.4)由手部向内递推求取，未端外作用力$\hat{f}_{i+1}$由工作力确定。

四、算　　例

计算如图 2，三刚体空间机构的动力学方程。

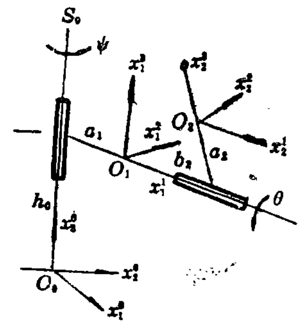

图2　三刚体空间机构

取固定参考系$(O,x)_0$固连于基座，附体参考参系$(O,x)_1$，$(O,x)_2$的原点分别固连于构件 1、2 的质心，使x_0^3通过关节轴S_0，x_1^3平行x_0^3，x_2^1平行x_1^1，x_1^1同时垂直于x_1^3，x_2^3。

构件之间的旋量变换矩阵

$$\hat{A}_0^1=\begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 & 0 & 0 & 0\\ s\psi & c\psi & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ hs\psi & hc\psi & 0 & c\psi & -s\psi & 0\\ -hc\psi & hs\psi & a_1 & s\psi & c\psi & 0\\ 0 & a_1c\psi & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \hat{A}_1^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 & 0 & 0\\ 0 & s\theta & c\theta & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_2c\theta & -a_2s\theta & 1 & 0 & 0\\ -a_2\cdot b_1s\theta & b_1c\theta & 0 & c\theta & -s\theta\\ 0 & -b_1c\theta & b_1s\theta & 0 & s\theta & c\theta\end{bmatrix}$$

据式(3.1)

$$\hat{V}_1=[0\quad 0\quad \dot{\psi}\quad 0\quad a_1\dot{\psi}\quad 0]^T$$

$$\hat{V}_2=[\dot{\theta}\quad -\dot{\psi}s\theta\quad \dot{\psi}c\theta\quad -\dot{\psi}a_2s\theta\quad \dot{\psi}c\theta(a_1+b_1)-\dot{\theta}a_2\quad \dot{\psi}s\theta(a_1+b_1)]^T$$

设：$D=a_1+b_1$，$K_1=b_1+D$，$K_2=c\theta-s\theta$，$K_3=a_1c\psi c\theta-b_1c\theta$，$K_4=b_1s\theta-a_1c\psi s\theta$

据式(3.2)：$\dot{\hat{V}}_1=[0\quad 0\quad \ddot{\psi}\quad 0\quad a_1\ddot{\psi}\quad 0]^T$，$\dot{\hat{V}}'=[0\quad 0\quad \ddot{\psi}\quad 0\quad D\ddot{\psi}\quad 0]$

$$\dot{\hat{V}}_2=[\ddot{\theta}-\dot{\psi}\dot{\theta}s\theta-\ddot{\psi}s\theta\quad \ddot{\psi}c\theta\quad \dot{\psi}\dot{\theta}c\theta K_1-\ddot{\psi}a_2s\theta\quad \ddot{\psi}c\theta K_1-\ddot{\theta}a_2+\dot{\psi}\dot{\theta}a_2s\theta\quad \ddot{\psi}s\theta K_1]^T$$

据式(3.3)：$\hat{F}^1=[-\dot{\psi}^2m_1a_1\quad \ddot{\psi}m_1a_1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^T$

$$\hat{F}^2=[m_2(\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta K_1-\ddot{\psi}a_2s\theta)-\dot{\psi}m_2(\dot{\psi}c\theta D-\dot{\theta}a_2)$$
$$m_2(\ddot{\psi}c\theta K_1-\ddot{\theta}a_2+\dot{\psi}\dot{\theta}a_2s\theta)+m_2\dot{\psi}s\theta(\dot{\theta}D-\dot{\psi}a_2)$$
$$m_2\ddot{\psi}s\theta K_1+m_2\dot{\theta}\dot{\psi}s\theta D\quad 0\quad 0\quad 0]^T$$

据式(3.4)：$n_1^2=m_2a_2\left(\ddot{\psi}K_1K_2+\frac{1}{2}\dot{\psi}s2\theta(\dot{\theta}D-\dot{\psi}a_2)-\dot{\psi}\dot{\theta}Ds^2\theta\right.$

$$\left.+gK_2\right)+m_2a_2^2\left(\frac{1}{2}\dot{\psi}\dot{\theta}s2\theta-\ddot{\theta}c\theta\right)$$

$$n_3^1=m_2\ddot{\psi}K_1(K_3c\theta+K_4s\theta)+m_2K_3a_2(\dot{\psi}\dot{\theta}s\theta-\ddot{\theta})$$
$$+m_2\dot{\psi}\dot{\theta}Ds\theta(K_3+K_4)-m_2K_3\dot{\psi}\dot{\psi}a_2s\theta-m_2g(K_3s\theta+K_4c\theta)$$

四、结　论

（1） 本文用旋量方法将速度、角速度，力和力矩的内在联系融合成一体，给出的旋量方程是一个更为简洁而有规律和系统性的机器人动力学模型。

（2） 在构件的质心建立附体参考系，由于惯性张量和质心加速度计算的简化，最终使关节力（力矩）的计算量减少。

参 考 文 献

[1] R. P. Poul, Robot manipulators: mathematics programming and control, *The MIT Press*, (1981).

[2] J.Y.S. Luh et al, On-line computational scheme for mechanical manipulators, *Trans. ASME, Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, 102(2) (1981), 69—71.

[3] U.M. Hollerbach, A recursive lagrangian formulation of the manipulation dynamics and comparative study of dynamic formulation, *IEEE Trans. on System, Man and Cydernetics*, 10(11) (1980), 730—736.

[4] C. S G. Lee et al., Development of the generlized D'A lembert Equations of Motion for mechanical manipulators, *Proceedings of the 22nd Conference on Decision and Control*, Son Antonio, Texas (1983), 14—16.

[5] 刘延柱等，《多刚体系统动力学》，高等教育出版社 (1989), 165—194.

Application of Spinor Method to the Dynamic Analysis of Robot

Lin Ruilin　Jiang Shaoyin　Lin Bi

(Department of Prec. Mech. Eng., Huaqiao Univ., Quanzhou 362011, *Fujian P. R. China)*

Abstract

A method known as spinor method is applied to the study of dynamic model of robot. It merges velocity and angular velocity, force and moments into an organic whole by their internal relation; and makes Newton-Euler method more concise and efficient. A reference system is formed with respect to the mass center of the arms of robot, which simplifies the calculation of inertial tensor and mass center acceleration, and further reduces work load in calculation, and thus ensures a fast real-time calcuiation.

Key words robot dynamics, spinors, Newton-Euler method