应用数学和力学，第17卷 第1期（1996年1月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

求解变系数非齐次亥姆霍茨方程的边界单元法

王守信[1] 刘喜平[1] 彭天国[1]
赵忠生[2] 赵素华[2]

（林宗池推荐，1994年11月10日收到）

摘 要

本文利用拉普拉斯方程的基本解作为权函数，给出求解变系数非齐次亥姆霍茨方程的迭代格式，进而得到求解这类方程的边界元迭代法。文中给出了算例。最后，把本文给出的边界元迭代法与作者早些时候提出的边界元耦合法进行了比较。

关键词 亥姆霍茨方程 迭代法 耦合法

一、引 言

亥姆霍茨方程在物理和力学的很多问题中有着广泛的应用。我们先看电磁场问题。根据Maxwell 方程，若材料均匀且无源，则在定常状态下电磁波在区域Ω内的传播满足以下控制方程

$$\nabla^2 u+Eu=0 \tag{1.1}$$

这里，u可以是磁场强度的分量，这时u在边界Γ上满足Neumann条件：$\partial u/\partial n=0$，n是边界Γ的外法线方向。如果u是电场强度的分量，则在边界Γ上满足Dirchlet条件：$u=0$。方程(1.1)中的E与波频率、磁导率及介电常数有关。在很多散射与辐射等实际问题中，常提出(1.1)型的齐次亥姆霍茨方程。此外，在低频正弦电磁场及渗流力学中，又提出非齐次方程

$$\nabla^2 u+Eu=F \tag{1.2}$$

(1.1)和(1.2)都是常系数偏微分方程，它们的定解问题可以通过线性算子的基本解化为积分方程，再用边界单元法求解[1]。

方程(1.1)和(1.2)所控制的问题有一定的适用范围。首先，它们都限于均匀材料。另外，方程(1.1)只适用于无源情况。

为了扩大应用范围，下面从更普遍的问题出发，得到对应的积分方程和边界元方法。给

1 东北重型机械学院，齐齐哈尔 161000.
2 辽宁大学，沈阳 110036

出如下的变系数非齐次型的亥姆霍茨方程边值问题：

$$\begin{aligned}&\nabla^2 u+E(x,\ y)u=F(x,\ y)\quad(\text{在}\Omega\text{内})\\&u=\bar{u}\qquad\qquad(\text{在}\Gamma_1\text{上})\\&q=\frac{\partial u}{\partial n}=\bar{q}\qquad(\text{在}\Gamma_2\text{上})\end{aligned}\tag{1.3}$$

这里 $\Gamma_1+\Gamma_2=\Gamma$是总的边界。

方程(1.3)可应用于非均匀材料并且有源的问题。本文将针对边值问题(1.3)用边界元迭代法进行数值分析。为了简明仅讨论二维问题，三维情况可同样论证。

二、边界元迭代法

用传统的边界单元法求解边值问题(1.3)，将遇到两个难点。第一个难点是：如果 E 是常数，用边界元法求解时所用的基本解是贝塞尔函数（零阶第一类和第二类汉克尔函数），运算过程中只能取前边的有限项，这将造成误差，而且运算过程复杂。第二个难点是：当E是变系数时，找不到基本解的表达式，因此无法实现边界单元法。其实，前一个难点对于方程(1.1)和(1.2)也存在。而且，若第二个难点得到克服，第一个难点也就迎刃而解了。所以，方程(1.3)是问题的核心。

为了求解边值问题(1.3)，笔者曾用边界元耦合法进行分析，即对区域和边界上的方程耦合求解，并达到很高的计算精度。但耦合求解法有一个明显的缺点，这就是它不但需要在边界上而且必须在域内设置结点，从而使未知量数目增加。为了克服这个缺点，本文提出求解变系数非齐次亥姆霍茨方程的边界元迭代法。

把(1.3)中的方程改写成

$$\nabla^2 u=F(x,\ y)-E(x,\ y)u\tag{2.1}$$

给出下面的迭代格式：

$$\nabla^2 u^{(m)}=F(x,\ y)-E(x,\ y)u^{(m-1)}\tag{2.2}$$

式中 m是迭代次数。我们用边界单元法实现这个迭代过程。

把方程(2.1)或(2.2)的右端看成源项，令u^*是拉普拉斯方程的基本解，以u^*为权函数给出加权余量式

$$\int_\Omega(\nabla^2 u^{(m)})u^*d\Omega=\int_\Omega(F-Eu^{(m-1)})u^*d\Omega\tag{2.3}$$

根据格林公式，经推导可得到关于域Ω中一点i的积分方程（可参照关于泊松方程的推导过程，这里从略）：

$$u_i^{(m)}+\int_\Gamma q^*u^{(m)}d\Gamma=\int_\Gamma u^*q^{(m)}d\Gamma+\int_\Gamma u^*(Eu^{(m-1)}-F)d\Omega\tag{2.4}$$

当i点在光滑边界上时，由极限过程把上式化为：

$$\frac{1}{2}u_i^{(m)}+\int_\Gamma q^*u^{(m)}d\Gamma=\int_\Gamma u^*q^{(m)}d\Gamma+\int_\Gamma u^*(Eu^{(m-1)}-F)d\Omega\tag{2.5}$$

在式(2.4)和(2.5)中

$$q^*=\frac{\partial u^*}{\partial n}\tag{2.6}$$

u_i是i点的u值。式(2.4)和(2.5)就是对应于定解问题(1.3)的积分方程。

对方程(2.5)按边界单元法进行离散化以后，则可得到下面的矩阵方程：

$$HU^{(m)}+GQ^{(m)}=B^{(m-1)} \tag{2.7}$$

方程(2.7)即为用边界元迭代法求解非齐次变系数亥姆霍茨方程的控制方程．其迭代过程如下

1．给出 u^0（可按某种假设给定），代入(2.7)式右端，求解此方程，得到 u 的修正值 $u^{(1)}$；

2．再将$u^{(1)}$代入(2.7)式右端，求出第二次修正值$u^{(2)}$；

3．按上述方式反复进行下去，直到满足收敛判据为止．

这里要说明的一点是，虽然$B^{(m-1)}$是对区域内部积分所形成的矩阵，但由于其中的 $u^{(m-1)}$ 是事先给定或上一次迭代计算出来的结果，因此对于第m次计算来说是已知的，它并不使应求解的代数方程组的阶数增加．如果每个边界结点上的u或q中的一个量已知，便可求解该方程组．

当边界上所有的$u^{(m)}$和$q^{(m)}$求出后，区域内点的 $u^{(m)}$值可由积分方程(2.7)的离散化形式计算．

显然，在每次迭代计算时，H，G矩阵都保持不变，只需重新计算 $B^{(m-1)}$即可．而且，正如下面的算例所表明的，只要经过少数几次迭代就能得到满意的结果．因此，用边界元迭代法求解变系数非齐次亥姆霍茨方程比用边界和区域耦合法对计算机存贮量和计算量的要求都少．

三、数 值 算 例

在矩形区域上（图1），方程为

$$\nabla^2 u-\frac{2u}{(x+y)t+2t^2}=-\frac{(x+y)}{2t}$$

混合边界条件为

$$u(1,\ y)=[0.5y+(t+0.5)]^2 \qquad (-0.4\leqslant y\leqslant 0.4)$$

$$u(x,\ 0.4)=[0.5x+(t+0.2)]^2 \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

$$\partial u/\partial n=0.5y+(t-0.5) \qquad (x=-1,\ -0.4\leqslant y\leqslant 0.4)$$

$$\partial u/\partial n=0.5x+(t-0.2) \qquad (y=-0.4,\ -1\leqslant x\leqslant 1)$$

式中 t为给定常数．

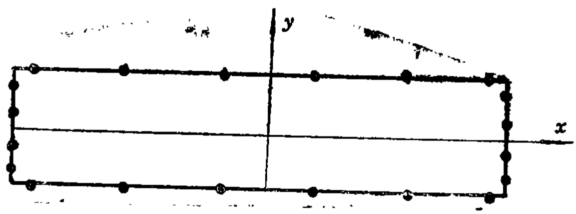

图1 算例简图（·为结点）

为了简便，采用常量单元．在边界上取20个结点．分别计算了当$t=e$和$t=\pi$时的混合边值问题，并把计算结果与解析解进行了比较．列于表1和表2．两组计算都只迭代3次，由表中可以看到，结果是令人满意的．

表 1 ($t=e$)

结点号	本文解	解析解	结点号	本文解	解析解
1	5.681	5.609	11	3.021	3.068
2	5.211	5.145	12	3.131	3.168
3	4.791	4.701	13	3.213	3.268
4	4.376	4.278	14	3.306	3.368
5	4.379	4.278	15	3.301	3.368
6	4.971	4.921	16	3.196	3.218
7	5.860	5.848	17	2.913	3.018
8	6.881	6.855	18	2.760	2.818
9	7.961	7.943	19	2.484	2.618
10	8.871	8.811	20	2.358	2.468

表 2 ($t=\pi$)

结点号	本文解	解析解	结点号	本文解	解析解
1	7.868	7.793	11	3.399	3.492
2	7.321	7.245	12	3.489	3.592
3	6.801	6.718	13	3.594	3.692
4	6.321	6.208	14	3.712	3.792
5	6.330	6.208	15	3.720	3.792
6	7.094	6.978	16	3.589	3.642
7	8.111	8.075	17	3.361	3.442
8	9.301	9.251	18	3.161	3.242
9	10.564	10.518	19	2.913	3.042
10	11.567	11.503	20	2.788	2.892

四、结　束　语

本文利用拉普拉斯方程的基本解，给出了求解变系数非齐次亥姆霍茨方程的边界元迭代法，克服了用传统边界元法求解这类方程时所遇到的困难。

与作者早些时候提出的求解变系数非齐次亥姆霍茨方程的边界元耦合法相比，迭代法具有未知数少（从而对计算机要求的存贮量和计算量少）的优点。但是，迭代法的收敛速度和计算精度与迭代策略有关；而边界元耦合法，由于它是一种直接解法，只要剖分较细并控制计算中的舍入误差，总能达到较高的计算精度。

参 考 文 献

[1] 李忠元，《电磁场边界元素法》，北京工业学院出版社（1987）.

The BEM for Solving the Nonhomogeneous Helmholtz Equation with Variable Coefficients

Wang Shouxin Liu Xiping Peng Tianguo
(*Northeast Heavy Machinery Institute*, *Qiqihaer* 161000, *Heilongjiang*, *P. R. China*)

Zhao Zhongsheng Zhao Suhua
(*Liaoning University*, *Shenyang* 110036, *P. R. China*)

Abstract

Considering the fundamental solution of the Lapleace equation as the weight function, we give the iterative format for solving the nonhomogeneous Helmholtz equation with variable coefficients. Furthermore, the iteration method of BEM for solving the equation mentioned above is obtained. The numerical example is given in this paper. Finally, the iteract ion method of BEM mentioned above is compared with the coupled method of BEM that was pesented before then by authors.

Key words Helmholtz equation, iteraction method, coupled method