应用数学和力学，第16卷 第12期（1995年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

矩阵方程AX-XB=C的显式解*

——纪念导师郭仲衡教授

陈玉明[1]　　肖　衡[2]

（钱伟长推荐，1995年2月28日收到）

摘　要

现有关于矩阵方程$AX-XB=C$的显式解的几乎所有结论都是在A与B无公共特征值的条件下获得的。本文利用特征投影给出了方程在A与B均对称或反对称时一般解的显式形式。我们所得到的结果不仅适用于任何特征值重数情形，而且可以用来讨论该方程的一般情形。

关键词　矩阵方程　显式解　特征投影　矩阵方积

一、引　　言

求解矩阵方程

$$AX-XB=C \tag{1.1}$$

是一个很基本的问题，其中A，B，C及待求矩阵X分别为$m\times m$，$n\times n$，$m\times n$及$m\times n$阶实矩阵。首先是由于该方程在力学、物理、控制论等实际应用领域中的重要性决定的。例如，在决定稳定性时需求解以下著名的 Liapunov 矩阵方程

$$A^TX+XA=-Q \tag{1.2}$$

此外，该方程的结构也向矩阵论学者提出了富有吸引力的挑战。

现在，在一些相关领域有大量文献讨论方程(1.1)的解的存在性、解的唯一性、解的性质及解的显式表达，例如文献[1～10]。但几乎所有的结论都是在A与B无公共特征值的假设下获得的。

A与B有公共特征值的情形相当复杂，还没有进行过彻底研究。只有Ma[11]和B.N.Datta & K.Datta[12]分别讨论了$B(=A)$只有单特征值或$C=0$及$B(=A^T)$为不可约 Hessenberg 矩阵的情形。另外，Roth[1]给出了方程(1.1)有解的充分必要条件。最近，郭等在文[13，15]中彻底讨论了以下张量方程

$$\mathbf{AX}-\mathbf{XA}=\mathbf{C},\ \mathbf{A}^T=\mathbf{A} \tag{1.3}$$

$$\sum_{r=1}^{m}\mathbf{U}^{m-r}\mathbf{X}\mathbf{U}^{r-1}=\mathbf{C},\ \mathbf{U}^T=\mathbf{U} \tag{1.4}$$

并得到了内禀解（即抽象或基无关解）。

在文献[14]的启发下，我们将利用特征投影来研究方程(1.1)关于A与B均对称或反对称

* 国家自然科学基金资助项目。

1 湖南大学数学系，长沙 410012.
2 北京大学数学系，北京 100871.

时的显式解. 所得的结果不仅对任何特征值重数适用，而且有助于一般情形下方程(1.1)的讨论.

二、准 备 知 识

在这一节我们将陈述 Hermite 矩阵的一些性质. 以下假设A与B分别为$m\times m$，$n\times n$阶Hermite矩阵.

我们道知，任何$m\times m$阶Hermite矩阵A可看成通常 Hilbert 空间$\mathbf{C}^m$上的 Hermite算子.因此，假设$\lambda_1,\cdots,\lambda_k(k\leqslant m)$是$A$的所有互不相同的特征值,则存在一族特征投影$\{P_\alpha\}_{\alpha=1}^k$满足

$$P_\alpha P_\sigma=\begin{cases}P_\alpha, & \sigma=\alpha\\ 0, & \sigma\neq\alpha\end{cases}\tag{2.1}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k}P_\alpha=I\tag{2.2}$$

其中0和I分别为$m\times m$阶零矩阵和单位矩阵（对于不同的m不加区别）. 此时A可表成

$$A=\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha P_\alpha\tag{2.3}$$

当$k\geqslant 2$时，对于给定的α，将

$$A-\lambda_\beta I=\sum_{\sigma=1}^{k}(\lambda_\sigma-\lambda_\beta)P_\sigma$$

代入以下连乘可得

$$\prod_{\beta\neq\alpha}(A-\lambda_\beta I)=\prod_{\beta\neq\alpha}\left\{\sum_{\sigma=1}^{k}(\lambda_\sigma-\lambda_\beta)P_\sigma\right\}$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{k}\left\{\prod_{\beta\neq\alpha}(\lambda_\sigma-\lambda_\beta)\right\}P_\sigma=\prod_{\beta\neq\alpha}(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)P_\alpha=p_\alpha P_\alpha\tag{2.4}$$

其中

$$p_\alpha=\prod_{\beta\neq\alpha}(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)\neq 0\tag{2.5}$$

在这里我们利用了正交性(2.1). 这样就有

$$P_\alpha=\frac{1}{p_\alpha}\prod_{\sigma\neq\alpha}(A-\lambda_\sigma I)=\frac{1}{p_\alpha}\sum_{p=0}^{k-1}I_{k-1-p}^{\alpha}A^p\tag{2.6}$$

其中,

$$I_0^\alpha=1,\ I_p^\alpha=(-1)^p\sum_{\substack{1\leqslant\sigma_1<\cdots<\sigma_p\leqslant k\\(\neq\alpha)}}\lambda_{\sigma_1}\cdots\lambda_{\sigma_p}\quad(p=1,\ \cdots,\ k-1)\tag{2.7}$$

当$k=1$时，我们约定$p_1=1$，则(2.6)式对$k=1$也成立.

类似地，设μ_1，…，$\mu_l(l\leqslant n)$是B的所有互不相同的特征值，则也存在一族特征投影$\{Q_\beta\}_{\beta=1}^l$使得

$$Q_\beta Q_\gamma=\begin{cases}Q_\beta, & \beta=\gamma\\ 0, & \beta\neq\gamma\end{cases} \tag{2.8}$$

$$\sum_{\beta=1}^{l}Q_\beta=I \tag{2.9}$$

$$B=\sum_{\beta=1}^{l}\mu_\beta Q_\beta \tag{2.10}$$

且

$$Q_\beta=\frac{1}{q_\beta}\prod_{\gamma\neq\beta}(B-\mu_\gamma I)=\frac{1}{q_\beta}\sum_{q=0}^{l-1}J_{l-1-q}^{\beta}B^q \tag{2.11}$$

其中，

$$q_\beta=\prod_{\gamma\neq\beta}(\mu_\beta-\mu_\gamma)\neq 0 \tag{2.12}$$

且

$$J_0^\beta=1,\quad J_q^\beta=(-1)^q\sum_{\substack{1\leq\gamma_1<\cdots<\gamma_q\leq l\\(\neq\beta)}}\mu_{\gamma_1}\cdots\mu_{\gamma_q}\quad (q=1,\ \cdots,\ l-1) \tag{2.13}$$

三、主 要 结 果

为得到所要的结果，我们先讨论以下$\mathbf{C}$上的矩阵方程

$$AX-XB=C \tag{3.1}$$

其中A与B如第二节所刻划。

定义3.1 如下定义的

$\boxtimes$：$\mathbf{C}^{m\times m}\times\mathbf{C}^{n\times n}\to\mathrm{Lin}(\mathbf{C}^{m\times n})$：$(S,\ T)\mapsto S\boxtimes T$映射称为矩阵方积，其作用如下：

$$(S\boxtimes T)X=SXT^*,\qquad \forall X\in\mathbf{C}^{m\times n} \tag{3.2}$$

其中T^*表示T的Hermite转置.

对于第二节中定义的$\{P_\alpha\}$及$\{Q_\beta\}$，令

$$\mathbf{P}_{\alpha\beta}=P_\alpha\boxtimes Q_\beta,\qquad (\alpha=1,\ \cdots,\ k,\ \beta=1,\ \cdots,\ l) \tag{3.3}$$

则很容易验证以下关系式：

$$\mathbf{P}_{\alpha\beta}\mathbf{P}_{\sigma\gamma}=\begin{cases}\mathbf{P}_{\alpha\beta}, & (\sigma=\alpha,\ \gamma=\beta)\\ \mathbf{0}, & \text{其他}\end{cases} \tag{3.4}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{l}\mathbf{P}_{\alpha\beta}=\mathbf{I} \tag{3.5}$$

其中$\mathbf{I}$和$\mathbf{0}$分别为$\mathbf{C}^{m\times n}$上的恒同算子和零算子。我们称$\{\mathbf{P}_{\alpha\beta}\}$为$A$与$B$所诱导的特征投影族.

有了以上记号，我们可以改写(3.1)式左边为：

$$AX-XB=(A\boxtimes I-I\boxtimes B)X=\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{l}(\lambda_\alpha-\mu_\beta)\mathbf{P}_{\alpha\beta}X \tag{3.6}$$

令
$$\mathbf{L}=\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{l}(\lambda_\alpha-\mu_\beta)\mathbf{P}_{\alpha\beta} \tag{3.7}$$
则$\mathbf{L}$是$\boldsymbol{C}^{m\times n}$上一线性算子，且方程(3.1)等价于$\boldsymbol{C}^{m\times n}$上向量方程：
$$\mathbf{L}X=C \tag{3.8}$$
此外，对于任意给定的α和β，$Y=\boldsymbol{C}^{m\times n}$有
$$\mathbf{L}(\mathbf{P}_{\alpha\beta}Y)=(\lambda_\alpha-\mu_\beta)\mathbf{P}_{\alpha\beta}Y \tag{3.9}$$
这就是说$\Lambda_{\alpha\beta}=\lambda_\alpha-\mu_\beta$是$\mathbf{L}$的一个特征值．

定理3.2 $\boldsymbol{C}$上矩阵方程
$$AX-BX=C \tag{3.1}$$
其中A与B为以上所刻划的Hermite矩阵，有解当且仅当
$$\sum_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}\mathbf{P}_{\alpha\beta}C=\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{l-1}\rho_{pq}A^pCB^q=0 \tag{3.10}$$
其中
$$\rho_{pq}=\sum_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}\frac{I^\alpha_{k-1-p}J^\beta_{l-1-q}}{p_\alpha q_\beta},\quad (p=0,\ \cdots,\ k-1,\ q=0,\ \cdots,\ l-1) \tag{3.11}$$
此时一般解由
$$X=\sum_{\lambda_\alpha\neq\mu_\beta}\frac{\mathbf{P}_{\alpha\beta}C}{\lambda_\alpha-\mu_\beta}+X^{\mathrm{ker}}=\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{l-1}\varepsilon_{pq}A^pCB^q+X^{\mathrm{ker}} \tag{3.12}$$
显式给出．其中
$$\varepsilon_{pq}=\sum_{\lambda_\alpha\neq\mu_\beta}\frac{I^\alpha_{k-1-p}J^\beta_{l-1-q}}{(\lambda_\alpha-\mu_\beta)p_\alpha q_\beta},\quad (p=0,\ \cdots,\ k-1,\ q=0,\ \cdots,\ l-1) \tag{3.13}$$
$$X^{\mathrm{ker}}\in\mathrm{ker}\mathbf{L}=\left\{\sum_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}\mathbf{P}_{\alpha\beta}Y=\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{l-1}\rho_{pq}A^pYB^q\,\middle|\,Y\in\boldsymbol{C}^{m\times n}\right\} \tag{3.14}$$
特别地，当无$\lambda_\alpha=\mu_\beta$时，方程(3.1)对任何C都有唯一解．

证明 首先证明存在性．若方程(3.1)有解，以$\sum\limits_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}\mathbf{P}_{\alpha\beta}$作用于(3.1)的两边则有
$$\sum_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}\mathbf{P}_{\alpha\beta}C=\sum_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}\mathbf{P}_{\alpha\beta}(\mathbf{L}X)=\sum_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}(\lambda_\alpha-\mu_\beta)\mathbf{P}_{\alpha\beta}X$$
$$=0\qquad(\text{利用}(3.4)\text{式})$$
另一方面，若$\sum\limits_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}\mathbf{P}_{\alpha\beta}C=0$，令$X^{\mathrm{Im}}=\sum\limits_{\lambda_\alpha\neq\mu_\beta}\dfrac{\mathbf{P}_{\alpha\beta}C}{\lambda_\alpha-\mu_\beta}$，则
$$AX^{\mathrm{Im}}-X^{\mathrm{Im}}B=\mathbf{L}X^{\mathrm{Im}}$$
$$=\sum_{\lambda_\alpha\neq\mu_\beta}\mathbf{P}_{\alpha\beta}C=\sum_{\lambda_\alpha\neq\mu_\beta}\mathbf{P}_{\alpha\beta}C+\sum_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}\mathbf{P}_{\alpha\beta}C$$
$$=C\qquad(\text{利用}(3.5)\text{式})$$
即方程(3.1)有解．现在我们只需证明(3.14)式．首先由(3.9)式显然有
$$\left\{\sum_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}\mathbf{P}_{\alpha\beta}Y\mid Y\in\boldsymbol{C}^{m\times n}\right\}\subseteq\mathrm{ker}\mathbf{L} \tag{3.15}$$
另外，$\forall Y\in\mathrm{ker}\mathbf{L}$，由(3.5)式有
$$Y=\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{l}\mathbf{P}_{\alpha\beta}Y$$

于是，

$$AY-YB=\mathsf{L}Y=\sum_{\lambda_\alpha\neq\mu_\beta}(\lambda_\alpha-\mu_\beta)\mathsf{P}_{\alpha\beta}Y=0$$

由(3.4)，对任意$\lambda_\alpha\neq\mu_\beta$，有$\mathsf{P}_{\alpha\beta}Y=0$，这样就有

$$Y=\sum_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}\mathsf{P}_{\alpha\beta}Y\in\{\sum_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}\mathsf{P}_{\alpha\beta}Y\mid Y\in\boldsymbol{C}^{m\times n}\}$$

即

$$\ker\mathsf{L}\subseteq\{\sum_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}\mathsf{P}_{\alpha\beta}Y\mid Y\in\boldsymbol{C}^{m\times n}\}$$

至此，我们就证明了(3.14)，从而也就证明了定理3.2。 #

注3.3 如令$\{\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_k\}=\{\mu_{l-k+r+1},\cdots,\mu_l\}$是$A$与$B$的所有相同的特征值集合（可能为空集），则$\{\varepsilon_{pq}\}$及$\{\rho_{pq}\}$分别为相应于$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}$，$\{\mu_1,\cdots,\mu_{l-k+r}\}$及$\{\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_k\}$的对称有理多项式。这样，如令$f(\lambda)h(\lambda)$和$g(\lambda)h(\lambda)$分别为$A$和$B$的最小多项式，其中$(f(\lambda),g(\lambda))=1$，则可将$\{\varepsilon_{pq}\}$及$\{\rho_{pq}\}$分别表示成$f(\lambda)$，$g(\lambda)$和$h(\lambda)$的系数的有理多项式。这样应用所得结果时就无须具体计算A与B的特征值，因为Hermite矩阵的最小多项式是很容易求得的。

由于$\boldsymbol{R}^{m\times n}\subseteq\boldsymbol{C}^{m\times n}$，利用复化和定理3.2就很容易得到方程(1.1)当A与B均对称或反对称时的显式解。具体如下：

对于对称矩阵$A\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$和$B\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，$A$与$B$可看作Hermite矩阵。同样假设$\lambda_1$，$\cdots$，$\lambda_k(k\leqslant m)$及$\mu_1$，$\cdots$，$\mu_l(l\leqslant n)$分别为$A$与$B$的互不相同的所有特征值。

对于反对称矩阵$A\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$和$B\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，令$\lambda_1$，$\cdots$，$\lambda_k(k\leqslant m)$及$\mu_1$，$\cdots$，$\mu_l(l\leqslant n)$分别为$A$与$B$互不相同的所有特征值，则$i\lambda_1$，$\cdots$，$i\lambda_k$及$i\mu_1$，$\cdots$，$i\mu_l$分别为Hermite矩阵$iA$及$iB$的所有互不相同的特征值。易见，第二节中对于$iA$和$iB$所定义的$\{P'_\alpha\}$与$\{Q'_\beta\}$形式上与对于$A$和$B$所定义的$\{P_\alpha\}$与$\{Q_\beta\}$一致。此外，如$\lambda_1=0$是$A$的一特征值，则

$$P_1\in\boldsymbol{R}^{m\times m} \tag{3.16}$$

由于反对称矩阵的非零特征值为成对出现的共轭复数，如$\lambda_\alpha\neq0$为A的一特征值，则必有λ_β使$\lambda_\beta=\bar{\lambda}_\alpha$也是$A$的一特征值，且易证

$$\bar{P}_\alpha=P_\beta$$

另一方面，方程

$$AX-XB=C \tag{3.17}$$

有解当且仅当

$$(iA)X-X(iB)=iC \tag{3.18}$$

有解，且(3.18)所有解的实部组成(3.17)的全部解。此外，我们还可以证明

$$\sum_{i\lambda_\alpha\neq i\mu_\beta}\frac{P'_\alpha(iC)Q'_\beta}{(i\lambda_\alpha-i\mu_\beta)}=\sum_{\lambda_\alpha\neq\mu_\beta}\frac{P_\alpha CQ_\beta}{\lambda_\alpha-\mu_\beta}$$

$$=\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{l-1}\varepsilon_{pq}A^pCB^q\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$$

且

$$\sum_{\lambda_\alpha=\mu_\beta}\mathsf{P}_{\alpha\beta}Y\in\boldsymbol{R}^{m\times n},\qquad\forall Y\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$$

这样，由定理3.2就很容易得到推论3.4。

推论3.4 设A与B是如上所描述的同时为对称或反对称的矩阵，则方程

$$AX-XB=C$$

有解当且仅当

$$\sum_{\lambda_\alpha=\mu_\beta} P_\alpha C Q_\beta=\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{l-1}\rho_{pq}A^pCB^q=0 \tag{3.19}$$

此时，通解由

$$X=\sum_{\lambda_\alpha\neq\mu_\beta}\frac{P_\alpha CQ_\beta}{\lambda_\alpha-\mu_\beta}+X^{\ker}=\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{l-1}\varepsilon_{pq}A^pCB^q+X^{\ker} \tag{3.20}$$

显式给出，其中

$$X^{\ker}\in\left\{\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{l-1}\rho_{pq}A^pYB^q \mid Y\in\boldsymbol{R}^{m\times n}\right\} \tag{3.21}$$

且$\{\rho_{pq}\}$和$\{\varepsilon_{pq}\}$如定理3.2所定义。 #

对任意实矩阵A，A有唯一分解

$$A=A_1+A_2$$

其中A_1和A_2分别为对称矩阵和反对称矩阵。则以下引理显然成立。

引理3.5 $\boldsymbol{R}$上矩阵方程

$$AX-XB=C \tag{3.22}$$

有解当且仅当存在矩阵D使得以下矩阵方程

$$A_1X-XB_1=C-D \tag{3.23}$$

及

$$A_2X-XB_2=D \tag{3.24}$$

有公共解，且(3.23)与(3.24)的对于使它们有公共解的D而得到的公共解全体为(3.22)的所有解。 #

这样，我们就可以利用推论3.4来讨论$\boldsymbol{R}$上一般情形下的矩阵方程$AX-XB=C$。在第四节将给出一个例子来说明如何用推论3.4来进行讨论。

四、例　子

在这一节，我们研究 Liapunov方程

$$A^TX+XA=-Q \tag{4.1}$$

其中，$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$有不同特征值2和$-2$。

由于$A_1=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$的特征值为$-2$，1和3，由推论3.4知方程

$$A_1X+XA_1=-Q-D \tag{4.2}$$

对给定的Q和D都有唯一解。$A_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$的特征值为$\pm i$和0，由推论3.4知方程

$$A_2X-XA_2=-D \tag{4.3}$$

仅对如下的D有解，

$$D\in\left\{\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{11} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & 0 \end{pmatrix} \middle| \, d_{11},\ d_{12},\ d_{13},\ d_{23},\ d_{31},\ d_{32}\in\boldsymbol{R}\right\} \tag{4.4}$$

利用推论3.4可得方程(4.2)与(4.3)对于这样的D的解分别为：

$$X=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & -24q_{23}-24d_{23} \\ p_{21} & p_{22} & -24q_{13}-24d_{13} \\ -24q_{32}-24d_{32} & -24q_{31}-24d_{31} & 6q_{33} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

和

$$X=\begin{pmatrix} d_{12}/2+x_{11} & -d_{11}/2+x_{12} & d_{23} \\ -d_{11}/2-x_{12} & -d_{12}/2+x_{11} & -d_{13} \\ d_{32} & -d_{31} & x_{33} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

其中，

$$Q=(q_{ij})_{3\times 3}$$
$$p_{11}=-7q_{11}+2q_{12}+2q_{21}-q_{22}-6d_{11}+4d_{12}$$
$$p_{12}=2q_{11}-7q_{12}-q_{21}+2q_{22}-8d_{12}$$
$$p_{21}=2q_{11}-q_{12}-7q_{21}+2q_{22}-8d_{12}$$
$$p_{22}=-q_{11}+2q_{12}+2q_{21}-7q_{22}+6d_{11}+4d_{12}$$

且x_{11}，x_{12}，x_{13}是实参数。令(4.5)与(4.6)两表达式右边相等可得关于D的元素的如下条件：

$$d_{23}=-q_{23}/2,\ d_{32}=-q_{32}/2,\ q_{13}=q_{31}=0,\ x_{33}=q_{33}/4$$

且

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & -8 \\ 12 & -8 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7q_{11}+2q_{12}+2q_{21}-q_{22}-24x_{11} \\ -2q_{11}+7q_{12}+q_{21}-2q_{22}+24x_{12} \\ -2q_{11}+q_{12}+7q_{21}-2q_{22}-24x_{12} \\ q_{11}-2q_{12}-2q_{21}+7q_{22}+24x_{11} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

而 $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & -8 \\ 12 & -8 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$ 的秩为2，因而(4.7)有解则只有唯一解。方程(4.7)有解当且仅当

$$x_{11}=(-3q_{11}+q_{12}+q_{21}-2q_{22})/16,\ x_{12}=(-q_{12}+q_{21})/8$$

且解为

$$d_{11}=(-q_{11}+q_{12}+q_{21})/4,\ d_{12}=(-q_{11}-q_{12}-q_{21}+2q_{22})/8$$

因此，方程(4.1)有解的充分必要条件是$q_{13}=q_{31}=0$，并且通解为

$$X=\begin{pmatrix} -\dfrac{q_{11}}{4} & \dfrac{q_{11}-2q_{12}}{8} & -\dfrac{q_{23}}{2} \\ \dfrac{q_{11}-2q_{21}}{8} & \dfrac{-q_{11}+q_{12}+q_{21}-2q_{22}}{8} & \alpha \\ -\dfrac{q_{32}}{2} & \beta & \dfrac{q_{33}}{4} \end{pmatrix}$$

其中α，β为实参数。

参 考 文 献

[1] W. E. Roth, The equation $AX-YB=C$ and $AX-XB=C$ in matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **97** (1957), 392—396.

[2] S. Barnett and C. Storey, Some applications of Liapunov matrix equations, *J. Inst. Math. Appl.*, **4**(1) (1968), 33—42.

[3] A. Jameson, Solution of the equation $AX+XB=C$ by inversion of an $M\times M$ or $N\times N$ matrix, *SIAM J. Appl. Math.*, **16** (1968), 1020—1023.

[4] P. Lancaster, Explicit solution of Linear matrix equations, *SIAM Rev.*, **12** (1970), 544—566.

[5] D. H. Carlson and B. N. Datta, The Liapunov matrix equation $SA+A^*S=S^*B^*BS$, *Linear Algebra Appl.*, **28** (1979), 43—52.

[6] Eurice de Souza and S. P. Bhattacharyya, Controllability, observability and the solution of $AX-XB=C$, *Linear Algebra Appl.*, **39** (1981), 167—188.

[7] T. E. Djaferis and S. K. Mitter, Algebraic methods for the study of some linear matrix equations, *Linear Algebra Appl.*, **44** (1982), 125—142.

[8] J. K. John Jones and C. Lew, Solutions of Liapunov matrix equation $BX-XA=C$, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-**27** (1982), 464—466.

[9] 高维新, 矩阵方程$AX-XB=C$的连分式解法, 中国科学, A辑, (6) (1988), 576—584.

[10] H. K. Wimmer, Linear matrix equation: The module theoretic approach, *Linear Algebra Appl.*, **120** (1989), 149—164.

[11] Ma Er-chich, A finite series solution of the matrix equation $AX-XB=C$. *SIAM J. Appl. Math.*, **14** (1966), 490—495.

[12] B. N. Datta and K. Datta, The matrix equation $XA=A^TX$ and an associated algorithm for solving the inertia and stability problems, *Linear Algebra Appl.*, **97** (1987), 103—119.

[13] Guo Zhongheng, T. H. Lehman, Liang Haoyun and C. -S. Man, Twirl tensors and the tensor equation $\mathbf{AX}-\mathbf{XA}=\mathbf{C}$, *J. Elasticity*, **27**(2) (1992), 227—245.

[14] C. D. Luehr and M. B. Rubin, The significance of projector operators in the spectral representation of symmetric second order tensors, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **84** (1990), 243—246.

[15] Guo Zhongheng, Li Jianbo, Xiao Heng and Chen Yuming, Intrinsic solution to the n-dimensional tensor equation $\Sigma_{r=1}^{m}\mathbf{U}^{m-r}\times\mathbf{U}^{r-1}=\mathbf{C}$, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **115** (1994), 359—364.

The Explicit Solution of the Matrix Equation $AX-XB=C$

——To the memory of Prof Guo Zhongheng

Chen Yuming

(Department of Applied Mathematics, Hunan University, Changsha 410012, *P. R. China)*

Xiao Heng

(Department of Mathematics, Peking University, Beijing 100871, *P. R. China)*

Abstract

Almost all of the existing results on the explicit solutions of the matrix equation $AX-XB=C$ are obtained under the condition that A and B have no eigenvalues in common. For both symmetric or shewsymmetric matrices A and B, we shall give out the explicit general solutions of this equation by using the notions of eigenprojections. The results we obtained are applicable not only to any cases of eigenvalues regardless of their multiplicities, but also to the discussion of the general case of this equation.

Key words matrix equation, explicit solution, eigenprojection, matrix square-product