

环肋圆柱壳在流场中辐射声场 压力的解析解*

谢官模¹ 骆东平²

(钱伟长推荐, 1994年7月18日收到, 1995年3月8日收到修改稿)

摘 要

本文应用Hamilton原理、Huygens原理和Green函数方法导出了环肋圆柱壳在流场中辐射声压的解析公式, 可用来计算壳体表面、近场和远场的声压。

关键词 环肋圆柱壳 辐射声场压力 Huygens原理

一、引 言

环肋圆柱壳是潜艇耐压船体的主要结构形式, 研究其在流场中受激振动后的声辐射具有重要意义。研究理想流体介质中结构振动辐射的谐和声场归结为求解由结构动力方程、流场Helmholtz方程、Sommerfeld辐射条件、流体和结构交界面上的协调条件组成的声振耦合系统。

文献[1, 2]研究了已知表面振速分布的壳体的辐射声压和辐射阻抗; 文献[3, 4]分别研究了圆柱壳和环肋圆柱壳的声辐射, 但它们只给出了壳体表面声压的最一般的不能用于计算的表达式。本文导出了环肋圆柱壳表面、近场和远场声压的解析公式, 并将计算结果和实验结果进行了比较, 验证了本文公式的正确性。

二、基 本 方 程

本文研究的力学模型为沉浸在无限流场中的环肋圆柱壳, 如图1所示。假设壳体两端简支在无限长刚性圆柱障板上, 结构的响应在线弹性范围内, 流体满足线性声学条件。

壳体运动方程可由Hamilton变分原理导出, 变分方程为:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(U_s + \sum_{i=1}^{N_R} U_i \right) - \left(V_s + \sum_{i=1}^{N_R} V_i \right) - (E_P + E_Q + E_F) \right] dt = 0 \quad (2.1)$$

式中, U_s 和 V_s 分别为壳板的变形能和动能, U_i 和 V_i 分别为第*i*根环肋的变形能和动能, E_P ,

1 武汉工业大学工程力学系, 武昌 430070.

2 华中理工大学, 武昌 430074.

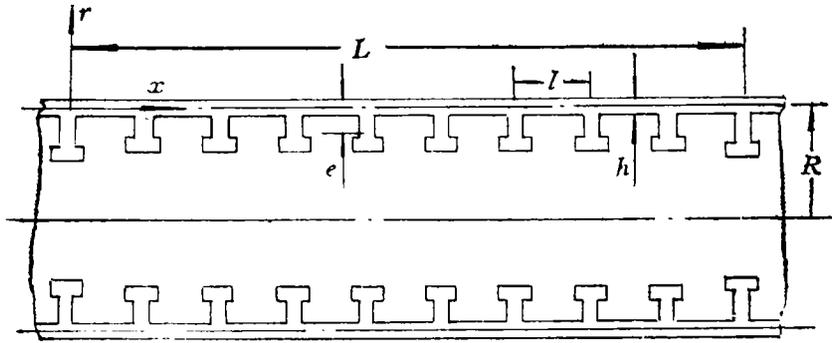


图1 环肋圆柱壳模型

E_θ 和 E_r 分别为壳体表面声压、静水压力和外激励力所做的功。

在壳体受谐和激励的情况下，由于外载荷、声压和壳体位移中均含时间因子 $e^{-i\omega t}$ ，为了书写简便，在后面的公式推导中均略去不写。

环肋圆柱壳的位移函数可用圆柱壳在真空中自由振动的模态展开^[4]：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 a_{nmj}^{\alpha} \begin{pmatrix} D_{nmj} \sin\left(n\theta + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \cos \frac{m\pi x}{L} \\ E_{nmj} \cos\left(n\theta + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \sin \frac{m\pi x}{L} \\ \sin\left(n\theta + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \sin \frac{m\pi x}{L} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

式中 u ， v ， w 分别为壳体中面位移的轴向、周向和径向分量， a_{nmj}^{α} 为广义坐标， $\alpha=0$ （或 $\alpha=1$ ）代表反对称（或对称）模态， n ， m 分别为壳体周向波数和轴向半波数， j 代表模态类型， $(D_{nmj}$ ， E_{nmj} ， 1)为特征矢量分量。

根据Huygens原理，声场中任意一点的辐射声压为：

$$P(X) = \int_S G(X|X_0) V_r(X_0) dS_0 \quad (2.3)$$

式中， S 为壳体外表面， $X=(x, r, \theta)$ ， $X_0=(x_0, R, \theta_0)$ ， $V_r(X_0)=-i\omega w(X_0)$ 为壳体表面的径向速度分布， $G(X|X_0)$ 为外Neumann边值问题的谐和Green函数^[5]：

$$G(X|X_0) = \frac{\rho_w \omega}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta - \theta_0) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i H_n^{(1)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} r)}{\sqrt{k^2 - k_z^2} R H_n^{(1)'}(\sqrt{k^2 - k_z^2} R)} \exp[ik_z(x - x_0)] dk_z \quad (2.4)$$

式中， ρ_w 为流体密度， $k=\omega/c$ 为波数， ω 为激励频率， c 为流体中声速， $k^2=k_z^2+k_r^2$ ， k_z 和 k_r 分别为波矢量在轴向和径向的分量， ε_n 为Neumann因子， $H_n^{(1)}(x)$ 为 n 阶第一类Hankel函数。

由于 $V_r(X_0)=-i\omega w(X_0)$ ，将(2.4)式代入(2.3)式并经过化简可得：

$$P(x, r, \theta) = -\frac{i\rho_w \omega^2 R}{2\pi} \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 a_{nmj}^{\alpha} \sin\left(n\theta + \frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iH_n^{(1)}(k_r r)}{k_r R H_n^{(1)'}(k_r R)} \int_0^L \sin \frac{m\pi x_0}{L} \exp[-ik_z x_0] dx_0 \exp[ik_z x] dk_z \quad (2.5)$$

由上面的(2.1)式、(2.2)式、(2.5)式可求得广义坐标 a_{nmj}^a ,详细过程可参见文献[6],在求得 a_{nmj}^a 后,(2.5)式还不能直接用来计算声压,因为该式中含有一个复杂的无穷积分,必须针对近场和远场情况对其化简。

三、声 场 压 力

将(2.5)式写为:

$$P(x, r, \theta) = -\frac{i\rho_w \omega^2 R}{2\pi} \sum_{a=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 a_{nmj}^a \sin\left(n\theta + \frac{\alpha\pi}{2}\right) (R_{nm} - iX_{nm}) \quad (3.1)$$

$$\text{设 } \beta = \frac{k_z}{k}, \quad \alpha = kR\sqrt{1-\beta^2}, \quad Z_n(\alpha) = \frac{iH_n^{(1)}(\alpha r/R)}{H_n^{(1)'}(\alpha)}$$

则由(2.5)式可得:

$$R_{nm} - iX_{nm} = \frac{2m\pi}{LR} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_n(\alpha)}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{S_m(\beta)}{(m\pi/L)^2 - (k\beta)^2} d\beta \quad (3.2)$$

其中

$$S_m(\beta) = \begin{cases} \cos k\beta\left(x - \frac{L}{2}\right) \cos \frac{kL}{2}\beta + i \sin k\beta\left(x - \frac{L}{2}\right) \cos \frac{kL}{2}\beta & (m=1, 3, 5, \dots) \\ -\sin k\beta\left(x - \frac{L}{2}\right) \sin \frac{kL}{2}\beta + i \sin \frac{kL}{2}\beta \cos k\beta\left(x - \frac{L}{2}\right) & (m=2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

从上式可见,当 m 为奇数时,被积函数中只有 $\sin k\beta(x-L/2)\cos(kL/2)\beta$ 为 β 的奇函数,当 m 为偶数时,被积函数中只有 $\sin(kL/2)\beta\cos k\beta(x-L/2)$ 为 β 的奇函数,因此:

$$R_{nm} - iX_{nm} = \frac{4m\pi}{LR} \int_0^{+\infty} \frac{Z_n(\alpha)}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{S_m(\beta)}{(m\pi/L)^2 - (k\beta)^2} d\beta \quad (3.3)$$

式中

$$S_m(\beta) = \begin{cases} \cos k\beta\left(x - \frac{L}{2}\right) \cos \frac{kL}{2}\beta, & (m=1, 3, 5, \dots) \\ \sin k\beta\left(x - \frac{L}{2}\right) \sin \frac{kL}{2}\beta, & (m=2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

当 $0 < \beta < 1$ 时, k_r 为实数,简正波按行波形式传播, α 为实数,设 $Z_n(\alpha) = \theta_n(\alpha) - iA_n(\alpha)$,对 $Z_n(\alpha)$ 进行化简可得:

$$\theta_n(\alpha) = 2 \frac{J_n(\alpha r/R) [Y_{n-1}(\alpha) - Y_{n+1}(\alpha)] - Y_n(\alpha r/R) [J_{n-1}(\alpha) - J_{n+1}(\alpha)]}{[J_{n-1}(\alpha) - J_{n+1}(\alpha)]^2 + [Y_{n-1}(\alpha) - Y_{n+1}(\alpha)]^2} \quad (3.4a)$$

$$A_n(\alpha) = 2 \frac{J_n(\alpha r/R) [J_{n+1}(\alpha) - J_{n-1}(\alpha)] + Y_n(\alpha r/R) [Y_{n+1}(\alpha) - Y_{n-1}(\alpha)]}{[J_{n-1}(\alpha) - J_{n+1}(\alpha)]^2 + [Y_{n-1}(\alpha) - Y_{n+1}(\alpha)]^2} \quad (3.4b)$$

当 $\beta > 1$ 时, k_r 为纯虚数,简正波蜕化为非均匀波, α 为纯虚数,设 $\alpha = i\delta$,则有:

$$Z_n(\alpha) = \frac{2K_n(\delta)}{K_{n-1}(\delta) + K_{n+1}(\delta)} \quad (3.5)$$

因此, 当 $0 < \beta < 1$ 时作变换 $y = \sqrt{1-\beta^2}$, 当 $\beta > 1$ 时作变换 $z = \sqrt{\beta^2-1}$, 最后可得到:

$$R_{nm} = \frac{4m\pi}{LR} \int_0^1 \frac{\theta_n(kRy)}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{S_m(y)}{(m\pi/L)^2 - k^2(1-y^2)} dy \quad (3.6a)$$

$$X_{nm} = \frac{4m\pi}{LR} \int_0^1 \frac{A_n(kRy)}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{S_m(y)}{(m\pi/L)^2 - k^2(1-y^2)} dy + \frac{8m\pi}{LR} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{K_n(krz)S_m(z)dz}{\sqrt{1+z^2} [K_{n-1}(kRz) + K_{n+1}(kRz)] [(m\pi/L)^2 - k^2(1+z^2)]} \quad (3.6b)$$

在求得 a_{nm}^i 后, 用 (3.1) 式和 (3.6) 式即可计算近场声压, 令这两式中的 $r=R$ 即得壳体表面声压.

远声场的声压可在 (3.1) 式的基础上由 Hankel 函数的渐近表达式得到:

$$R_{nm} = \frac{8m\pi}{LR} \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{\pi kry}} \cdot \frac{\tilde{\theta}_n(kRy)}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{S_m(y)}{[(m\pi/L)^2 - k^2(1-y^2)]} dy \quad (3.7a)$$

$$X_{nm} = \frac{8m\pi}{LR} \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{\pi kry}} \cdot \frac{\tilde{A}_n(kRy)}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{S_m(y)}{[(m\pi/L)^2 - k^2(1-y^2)]} dy + \frac{8m\pi}{LR} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi/2krz} \exp[-krz] S_m(z) dz}{\sqrt{1+z^2} [K_{n-1}(kRz) + K_{n+1}(kRz)] [(m\pi/L)^2 - k^2(1+z^2)]} \quad (3.7b)$$

上式中

$$\tilde{\theta}_n(\alpha) = \frac{S_{1n}[J_{n-1}(\alpha) - J_{n+1}(\alpha)] - S_{2n}[Y_{n-1}(\alpha) - Y_{n+1}(\alpha)]}{[J_{n-1}(\alpha) - J_{n+1}(\alpha)]^2 + [Y_{n-1}(\alpha) - Y_{n+1}(\alpha)]^2} \quad (3.8a)$$

$$\tilde{A}_n(\alpha) = \frac{S_{2n}[J_{n-1}(\alpha) - J_{n+1}(\alpha)] + S_{1n}[Y_{n-1}(\alpha) - Y_{n+1}(\alpha)]}{[J_{n-1}(\alpha) - J_{n+1}(\alpha)]^2 + [Y_{n-1}(\alpha) - Y_{n+1}(\alpha)]^2} \quad (3.8b)$$

$$S_{1n} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \cos\left(kry - \frac{\pi}{4}\right), & (n=1, 3, 5, \dots) \\ (-1)^{(n+1)/2} \sin\left(kry - \frac{\pi}{4}\right), & (n=2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

$$S_{2n} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \cos\left(kry + \frac{\pi}{4}\right), & (n=1, 3, 5, \dots) \\ (-1)^{(n+1)/2} \sin\left(kry + \frac{\pi}{4}\right), & (n=2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

利用 (3.1) 式和 (3.7) 式即可计算远声场压力.

声压级定义为:

$$L_P = 20 \lg \frac{P}{P_0} \quad (3.9)$$

其中, 基准声压 $P_0 = 10^{-6} \text{Pa}$.

在 (3.6) 式中, 两个有限积分具有高阶奇异性, 在积分区间右端点具有奇异性, 在 (3.7) 式中, 两个有限积分具有高阶奇异性, 在积分区间左右端点都有奇异性. (3.6) 式和 (3.7) 式

中的无穷积分具有高阶奇异性。对这些奇异积分按奇异点分成两部分,使它们都只在端点具有奇异性,然后用Patterson的自适应数值积分程序QSUBA^[7]计算,无穷积分用 Gauss-Laguerre求积公式计算。

四、数值计算

表1比较了本文计算的三个实验模型的近场声压和实验中测得的声压^[6],两者的最大误差^[6]不超过10%,表明本文的公式是正确可靠的。

表1 本文计算声压与实测声压的比较

模型号	f (kHz)	L_p (dB)	θ						
			0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
I	4	实测值	142.96	140.14	134.76	129.90	126.80	134.76	134.33
		计算值	144.52	143.17	136.80	128.65	128.15	126.34	132.83
	5	实测值	140.78	136.94	139.07	134.33	128.49	129.14	133.42
		计算值	147.95	146.09	139.75	130.39	131.31	120.16	134.85
II	4	实测值	140.88	139.20	135.36	135.36	133.18	128.31	128.31
		计算值	140.45	134.19	132.73	119.70	137.15	131.77	129.76
	5	实测值	136.27	131.84	131.84	131.08	132.53	130.25	131.84
		计算值	139.37	139.64	137.53	125.48	135.01	135.53	131.62
III	4	实测值	129.90	127.96	119.44	124.30	130.59	129.90	122.96
		计算值	129.78	127.61	129.03	116.59	128.78	126.74	128.18
	5	实测值	137.86	134.76	137.56	129.22	135.55	132.92	135.16
		计算值	138.50	134.71	133.74	133.54	132.91	135.28	125.75

参 考 文 献

- [1] F. R. Stepanishen, Radiated power and radiation loading of cylindrical surfaces with nonuniform velocity distributions, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 63(2) (1978), 329—338.
- [2] P. R. Stepanishen, Modal coupling in the vibration of fluid-loading cylindrical shells, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 71(4) (1982), 813—823.
- [3] B. Laulagnet and J. L. Guyader, Modal analysis of a shell's acoustic radiation in light and heavy fluids, *J. Sound Vibration*, 13(3) (1989), 397—415.
- [4] B. Laulagnet and J. L. Guyader, Sound radiation by finite cylindrical ring-stiffened shells, *J. Sound Vibration*, 138(2) (1990), 173—191.
- [5] P. M. Morse and K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, New York (1978).
- [6] 谢官模, 环肋圆柱壳在流场中的动力响应和声辐射, 华中理工大学博士学位论文 (1994).
- [7] T. N. L. Patterson, Algorithm for automatical numerical integration over a finite interval, *Comm. ACM*, 16(11) (1973), 694—699.

Analytical Solution of Radiated Sound Pressure of Ring-Stiffened Cylindrical Shells in Fluid Medium

Xie Guanmo

*(Department of Engineering Mechanics, Wuhan University
of Technology, Wuhan 430070, P. R. China)*

Luo Dongping

(Huazhong University of Technology, Wuhan 430074, P. R. China)

Abstract

In this paper, analytical formulations of radiated sound pressure of ring-stiffened cylindrical shells in fluid medium are derived by means of Hamilton's principle, Huygens' principle and Green function. These formulations can be used to compute the sound pressure of the shell's surface, nearfield and farfield.

Key words ring-stiffened cylindrical shell, radiated sound pressure, Huygens' principle