

# 关于绕任意机翼非定常流动的一种 无条件稳定的欧拉方程解

高 正 红<sup>1</sup>

(钱伟长推荐, 1995年1月12日收到)

## 摘 要

本文给出了绕二维与三维刚性或弹性振动机翼非定常无粘流动的欧拉方程解。

首先利用Jameson的有限体积方法建立了求解欧拉方程的 Runge-Kutta 方法。为了提高受 Runge-Kutta法稳定性限制的时间步长, 文中采用了变系数的残值光滑方法。该方法避免了常系数残值光滑引起局部流场损失较大的问题。同时可在保证原计算格式精度要求下, 大幅度提高计算时间步长, 从而提高了计算效率。

文中以二维与三维矩形机翼为例, 分别对其在跨音速流场中作刚性或弹性振动的非定常气动力进行了计算, 研究了不同振动频率对流动产生的影响。部分计算结果与相应实验结果进行了比较。结果证明本方法是可靠的, 可以用于求解绕任意运动机翼非定常流动问题。

**关键词** 欧拉方程 非定常流动 跨音速流动 计算流体力学

## 一、引 言

由于欧拉方程可以正确地反映流场中的激波、激波的运动、由激波产生的熵增及流场中旋度等的影响, 所以利用欧拉方程可建立用途广泛的求解非定常流动的计算方法<sup>[1]</sup>。

对于非定常问题而言, 由于物体在流场中运动, 为了准确地模拟其非定常流动过程, 必须在建立满足一定时间精度要求的计算方法的同时, 采用随时间变化的贴体网格。这样, 相对于定常流动问题, 需要花费更多的计算量。因此, 要进行非定常流动计算, 在要求计算准确的同时, 计算方法还应该具有快速的特点。本文从Jameson的 Runge-Kutta<sup>[2]</sup>方法出发, 建立求解欧拉方程的有限体积方法。该方法具有适应性强, 能够较好地反映跨音速流动的基本特点。然而由于受稳定性的限制, 用该方法计算 CFL 数必须小于确定的量, 而对于非定常流动, 为了正确地模拟其非定常物理过程, 必须使用统一的时间步长。这样计算时间步长只能限制到很小。为了提高计算效率, 文中采用了变系数的残值光滑方法, 它不仅大幅度提高时间步长, 同时排除了常系数残值光滑在局部流场误差较大的问题。

本文以带 NACA—0012 翼型的二维与三维矩形机翼为例, 分别就其在跨音速流场中绕 1/4弦轴做不同频率的俯仰振动的非定常气动力进行了研究, 部分结果与相应的实验结果吻

<sup>1</sup> 西北工业大学503教研室, 西安 710072。

合良好,同时完成了在跨音速流场中二维机翼绕 1/4 弦做弹性俯仰振动的流场与气动力的数值模拟计算。结果证明该方法是可靠的,可用于飞机跨音速气动弹性问题分析计算及其它有关非定常流动问题计算。

## 二、基本方法简介

### 1 基本方程

在笛卡尔坐标系下,描述无粘流的三维欧拉方程可以写成:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad N_x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho Hu \end{bmatrix}, \quad N_y = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho Hv \end{bmatrix}, \quad N_z = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho Hw \end{bmatrix}$$

其中,  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $E$  及  $H$  分别表示流体密度、速度的三个分量、总内能及总焓等。总焓与内能的关系有  $H = E + p/\rho$ 。对于完全气体有:

$$E = \frac{p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

$\gamma$  为比热比。

利用坐标变换  $\xi = \xi(x, y, z, t)$ ,  $\eta = \eta(x, y, z, t)$ ,  $\zeta = \zeta(x, y, z, t)$ ,  $\tau = t$ , 可将方程 (2.1) 变换到贴体坐标:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial N_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial N_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial N_\zeta}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q} &= JQ \\ N_\xi &= J(\xi_x Q + \xi_x N_x + \xi_y N_y + \xi_z N_z) \\ N_\eta &= J(\eta_x Q + \eta_x N_x + \eta_y N_y + \eta_z N_z) \\ N_\zeta &= J(\zeta_x Q + \zeta_x N_x + \zeta_y N_y + \zeta_z N_z) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$J$  是坐标变换的 Jacobian 式的倒数。

### 2. 求解欧拉方程的数值方法

首先利用 Jameson 的有限体积法, 方程 (2.2) 可以写成:

$$\frac{d}{dt} (J_{i,j,k} Q_{i,j,k}) + F_{i,j,k} = 0 \quad (2.4)$$

其中  $Q_{i,j,k}$  是流场变量在第  $(i, j, k)$  网格中点的值,  $J_{i,j,k}$  是该网格的体积,  $F_{i,j,k}$  是流出该网格的流量, 利用中心差分可有<sup>[7]</sup>:

$$F_{i,j,k} = N_{\xi i+\frac{1}{2}, j, k} - N_{\xi i-\frac{1}{2}, j, k} + N_{\eta i, j+\frac{1}{2}, k} - N_{\eta i, j-\frac{1}{2}, k} + N_{\zeta i, j, k+\frac{1}{2}} - N_{\zeta i, j, k-\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

其  $N_{\xi i+\frac{1}{2}, j, k}$ ,  $N_{\eta i, j+\frac{1}{2}, k}$ ,  $N_{\zeta i, j, k+\frac{1}{2}}$  是通过相应网格面上的流量, 其值分别由相邻两点的  $Q$  值的平均值计算。

通常方程(2.4)是不稳定的, 必须增加相应的人工粘性项 $D_{i,j,k}$ , 因此有:

$$\frac{d}{dt}(J_{i,j,k}Q_{i,j,k}) + F_{i,j,k} - D_{i,j,k} = 0 \quad (2.6)$$

人工粘性项可以写为:

$$D_{i,j,k}(Q) = D_{xi,j,k}(Q) + D_{yi,j,k}(Q) + D_{zi,j,k}(Q) \quad (2.7)$$

这里的人工粘性项 $D_{i,j,k}$ 包括有4阶和2阶两项<sup>[2]</sup>.

为了求解方程(2.6), 本文采用了多步的 Runge-Kutta 方法, 其中的人工粘性项只在第一步中计算, 于是有:

$$Q_{i,j,k}^{(0)} = Q_{i,j,k}^n$$

$$Q_{i,j,k}^{(l)} = \frac{J_{i,j,k}^n}{J_{i,j,k}^{n+1}} Q_{i,j,k}^n - \frac{\alpha_l \Delta t}{J_{i,j,k}^{n+1}} [F(Q_{i,j,k}^{(l-1)}) - D(Q_{i,j,k}^{(0)})]$$

$$(l = 1, 2, \dots, m) \quad (2.8)$$

$$Q^{n+1} = Q^{(m)} \quad (2.9)$$

其中,  $J_{i,j,k}^n$  是第 $n$ 步时间状态下元素 $i, j, k$  网格的体积,  $J_{i,j,k}^{n+1}$  是 $n+1$ 步该元素网格的体积. 当机翼做刚性运动时, 可采用与机翼固连的刚性网格, 这时 $J_{i,j,k}$  则不随时间变化, 即 $J_{i,j,k}^n = J_{i,j,k}^{n+1} = J_{i,j,k}$ . 当采用4步 Runge-Kutta 法时,  $\alpha_l = (1/4, 1/3, 1/2, 1)$ .

### 3. 变系数残值光顺

对于多步 Runge-Kutta 方法, 由于受到稳定性的限制, 使得 CFL 数必须限制在一定的范围之内, 例如4阶 Runge-Kutta 法,  $CFL \leq 2.8$ . 而对于非定常流动计算, 为了正确模拟非定常物理过程, 只能采用全流场唯一的时间步长, 即对应于确定的 CFL 数取流场最小时间步长. 因此, 如果用上述方法计算非定常流动, 必须将时间步长限制到很小. 然而实践证明, 用欧拉方程计算非定常流动, 在靠近物体表面网格点的 CFL 取到10~20均可保证必须的精度要求<sup>[5]</sup>. 为了提高计算效率, 本文采用了残值光顺方法以提高 Runge-Kutta 法的计算 CFL 数. 然而, 由于在计算时采用的全流场统一的时间步长, 这时流场中的 CFL 数是不同的, 如果直接采用 Leral<sup>[4]</sup> 提出的残值光顺方法, 即在第 $l$ 步 Runge-Kutta 推进后进行残值光顺:

$$(1 - \varepsilon \delta_\xi^2)(1 - \varepsilon \delta_\eta^2)(1 - \varepsilon \delta_\zeta^2) [\Delta \bar{Q}_{i,j,k}^{(l)}] = \Delta Q_{i,j,k}^{(l)}$$

其中 $\delta_\xi(\eta, \zeta)$ 为二阶微分算子.

那么光顺参数 $\varepsilon$ 应该取为

$$\varepsilon \geq \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{CFL_{\max}}{CFL^*} \right)^2 - 1 \right]$$

而此时在远离物面处的  $CFL \ll CFL_{\max}$  ( $CFL^*$  为稳定性限制的 CFL 数), 因此采用上述常系数的残值光顺方法, 就可能导致这些地方物理量损失过大的问题. 为此, 这里使用了由 Jorgenson<sup>[6]</sup> 提出的变系数残值光顺的方法, 即在第 $l$ 步 Runge-Kutta 推进后采用下面的方法进行残值光顺:

$$(1 - \varepsilon_{i,j,k} \delta_\xi^2)(1 - \varepsilon_{i,j,k} \delta_\eta^2)(1 - \varepsilon_{i,j,k} \delta_\zeta^2) [\Delta \bar{Q}_{i,j,k}^{(l)}] = \Delta O_{i,j,k}^{(l)} \quad (2.10)$$

其中光顺参数按照当地计算 CFL 数选定即:

$$\varepsilon_{i,j,k} = \max \left\{ 0, \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{CFL_{i,j,k}}{CFL^*} \right)^2 - 1 \right] \right\} \quad (2.11)$$

这样根据当地计算 CFL 数进行适当的残值光滑, 就避免了常值残值光滑产生的问题。理论分析已证明, 利用上述方法计算将是稳定的<sup>[5]</sup>。

因为在计算时,  $\Delta t = O(\Delta x)$ , 这样由于使用残值光滑对流场计算精度产生的影响是

$$\Delta \bar{Q} = \Delta Q + O(\varepsilon \Delta x^3) \quad (2.12)$$

因此, 只要  $\varepsilon$  不要太大, 使用上述残值光滑并不改变原差分格式的二阶精度。

#### 4. 边界条件

本文在物体表面与远场边界均采用了由文献[3]提出的特征边界条件方法。该方法是在局部一维流动假设的前提下建立的, 详细内容参看文献[6]。

## 三、计算结果

本文完成的计算均是在由无限差值的代数方法生成的 O-O 型网格上进行的。

### 1. 绕刚性振动机翼跨音速非定常运动

当机翼做刚性振动时, 可采用与机翼固连的刚性网格。这样就不需每一时刻都重新生成网格, 而只需对机翼一次生成相应的网格, 然后再利用随机翼振动坐标与固定坐标系之间的变换就可得到任意时刻的网格点坐标  $(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$ 。对于机翼的振动问题, 通常可分解为随机翼某振动轴  $(x_i, y_i, 0)$  的沉浮振动  $(x_m(t), y_m(t), z_m(t))$  与绕振动轴的俯仰振动  $(\alpha(t))$  的迭加。那么任意时刻网格点的坐标与固连于物体的动坐标  $(x_b, y_b, z_b)$  的关系为:

$$\left. \begin{aligned} x &= (x_b - x_i) \cos(\alpha(t)) + z_b \sin(\alpha(t)) + x_m(t) + x_i \\ z &= -(x_b - x_i) \sin(\alpha(t)) + z_b \cos(\alpha(t)) + z_m(t) \\ y &= y_b + y_m(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

由于网格点是随时间变化的, 网格点的运动速度可由上式对时间求导得到

$$x_t = \frac{dx}{dt}, \quad y_t = \frac{dy}{dt}, \quad z_t = \frac{dz}{dt} \quad (3.2)$$

为了验证上述方法, 我们首先以带 NACA-0012 翼型的二维机翼为例, 对其绕 1/4 弦轴 (即  $x_i = 0.25, x_m = 0, z_m = 0$ ) 俯仰振动的非定常气动力进行了计算。机翼的振动规律为:

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\sqrt{\gamma} M_\infty k t) \quad (3.3)$$

其中  $M_\infty$  为来流马赫数,  $\alpha_m$  为平均迎角,  $\alpha_0$  为振动振幅,  $k$  为减缩频率 [ $k = (k^*/U_\infty^c)$ ,  $k^*$  为

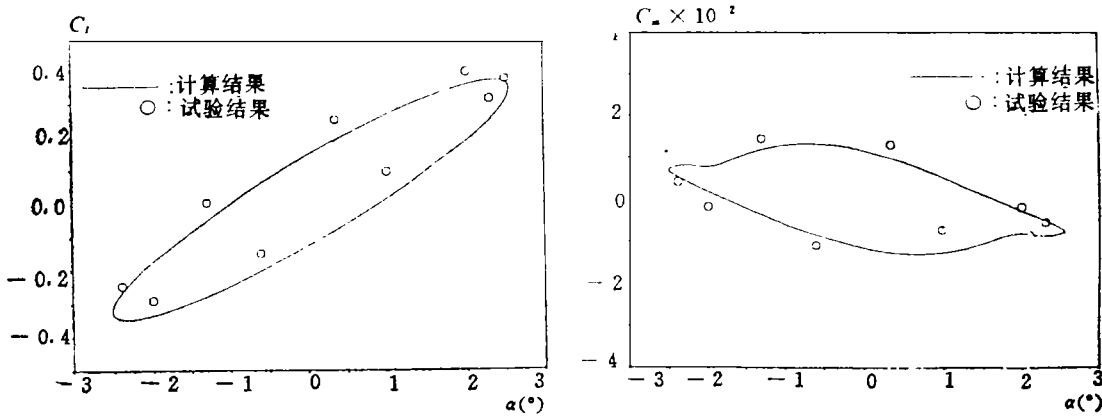


图1 机翼在来流  $M_\infty = 0.755$  以  $\alpha_m = 0.016^\circ$ ,  $k = 0.168$ ,  $\alpha_0 = 2.51^\circ$  振动的  $C_l$  与  $C_m$  随迎角的变化

频率]。图1示出了机翼在来流 $M_\infty=0.755$ ，以 $\alpha_m=0.016^\circ$ ， $\alpha_0=2.51^\circ$ ， $k=0.168$ 振动的计算升力系数与俯仰力矩系数随迎角的变化过程，以及与相应试验结果的比较。为了进一步验证方法，本文作了 $M_\infty=0.64$ ， $\alpha_m=4.86^\circ$ ， $\alpha_0=2.44^\circ$ ， $k=0.168$ 的情况的算例计算。图2给出了计算升力系数与俯仰力矩系数随迎角的变化过程及相应试验结果比较。上述两算例同样

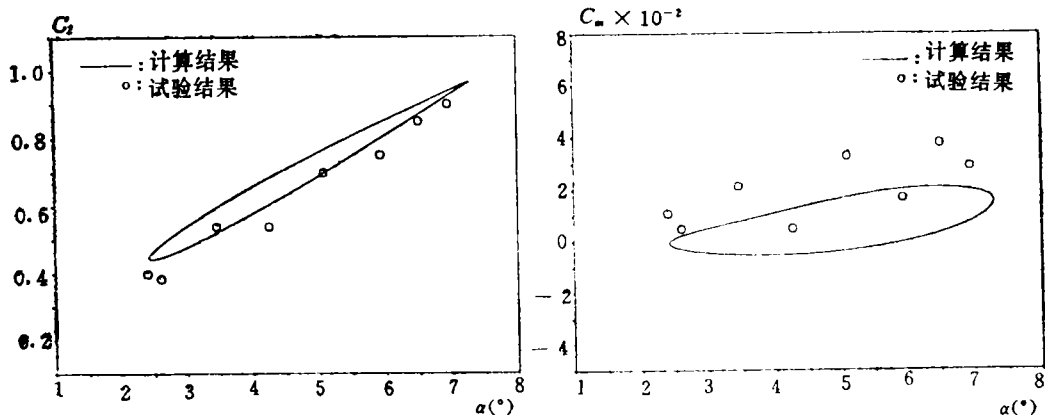
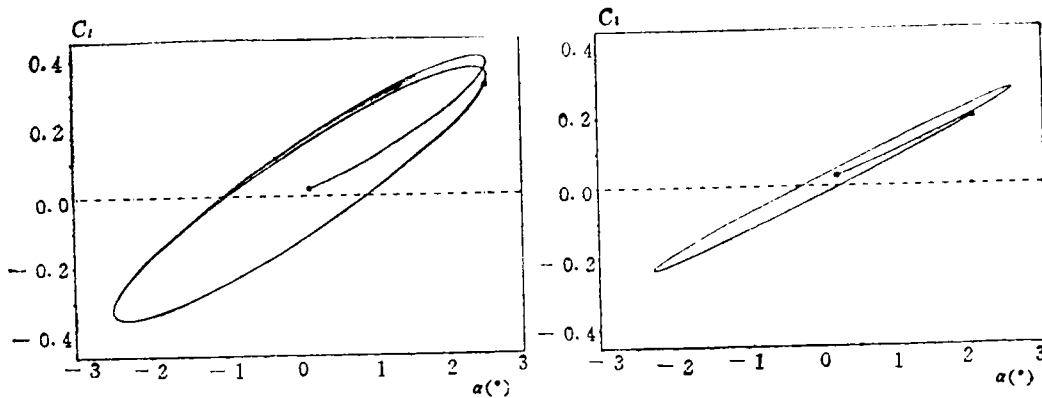


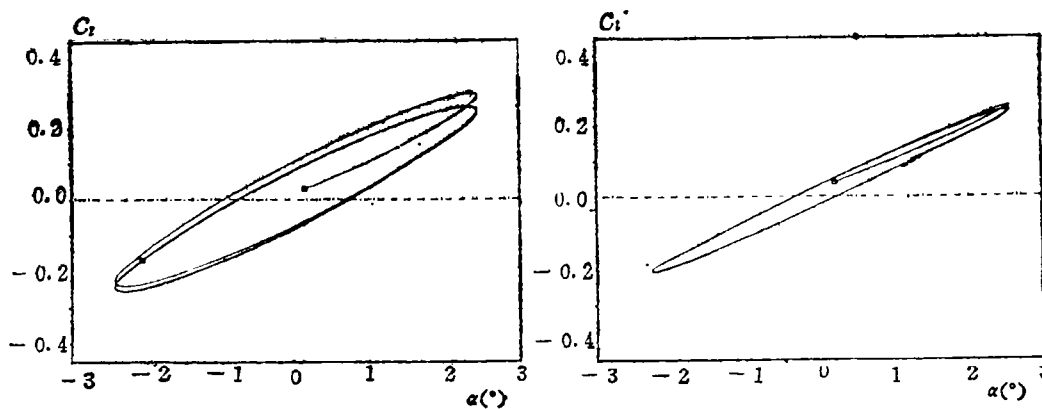
图2 计算升力系数与俯仰力矩系数随迎角的变化过程及相应试验结果比较

$M_\infty=0.60$ ， $\alpha_m=4.86^\circ$ ， $k=0.168$ ， $\alpha^*=2.44^\circ$



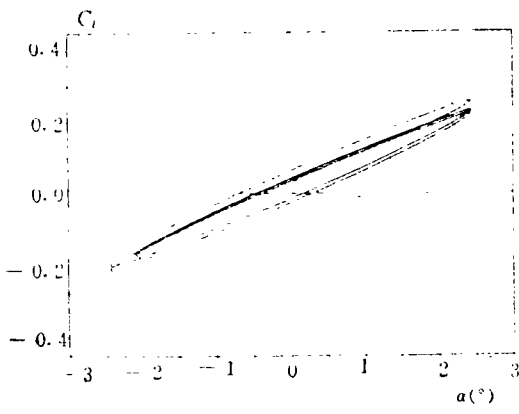
(a)  $k=0.163$  二维

(b)  $k=0.163$  三维

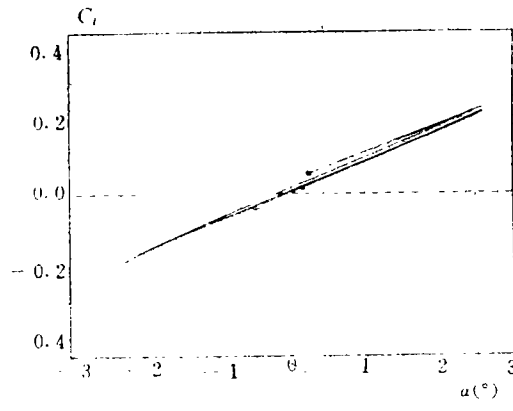


(c)  $k=0.336$  二维

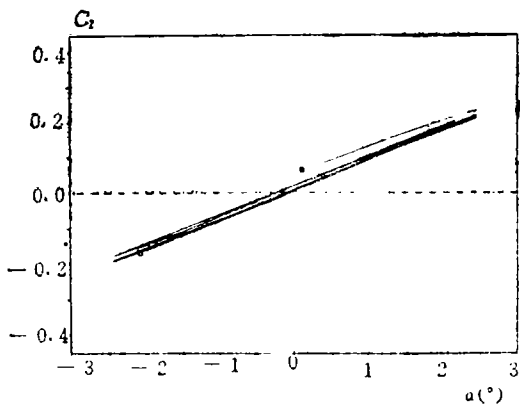
(d)  $k=0.336$  三维



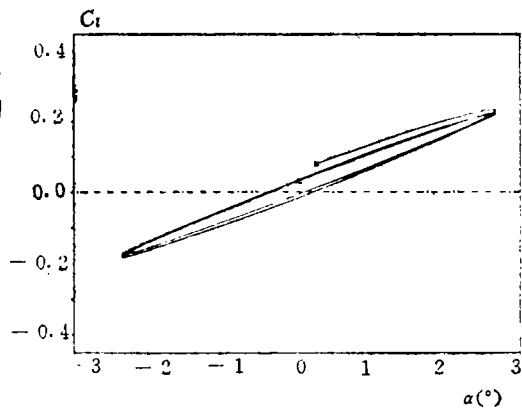
(e)  $k=0.628$  二维



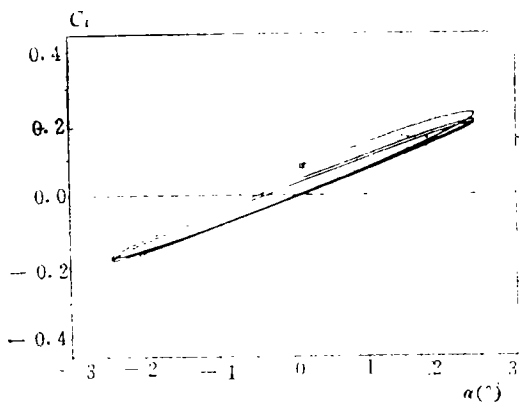
(f)  $k=0.628$  三维



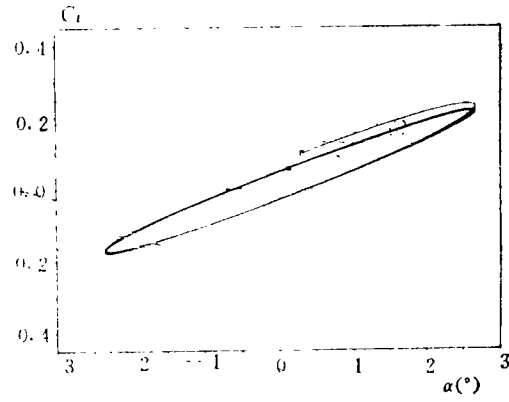
(g)  $k=1.0$  二维



(h)  $k=1.0$  三维



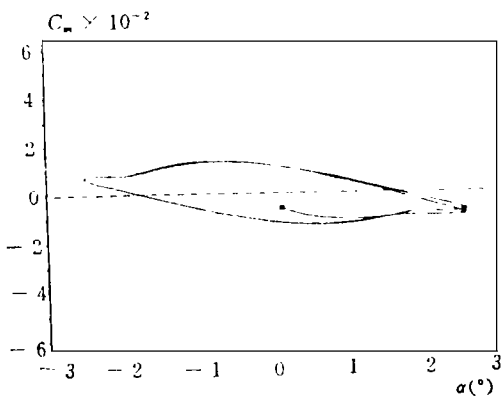
(i)  $k=1.302$  二维



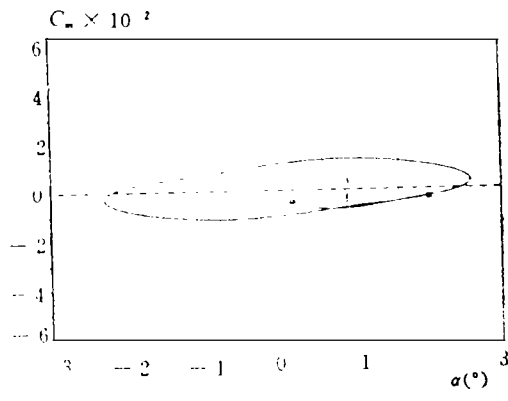
(j)  $k=1.302$  三维

图3 两个机翼振动的升力系数 $C_l$ 随迎角的变化过程

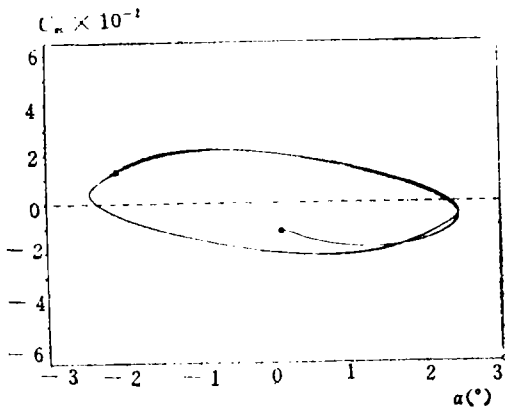
$M_\infty=0.755, \alpha_m=0.0^\circ, \alpha_a=2.44^\circ$



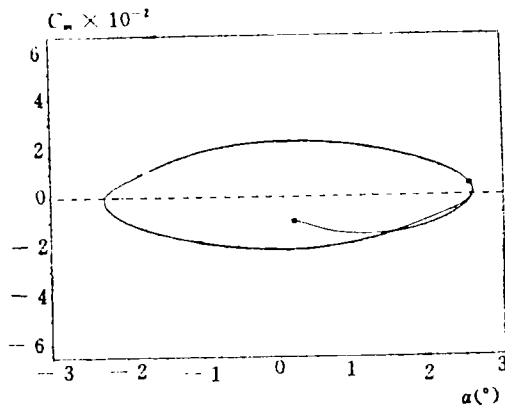
(a)  $k=0.163$  二维



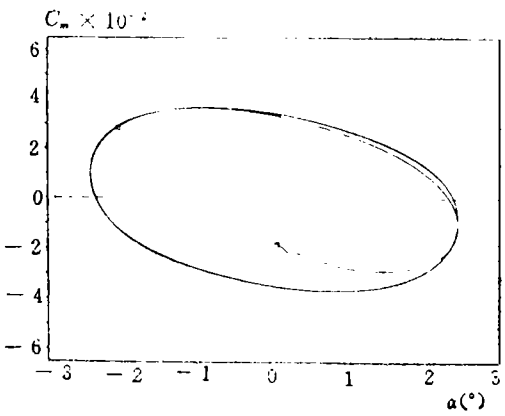
(b)  $k=0.163$  三维



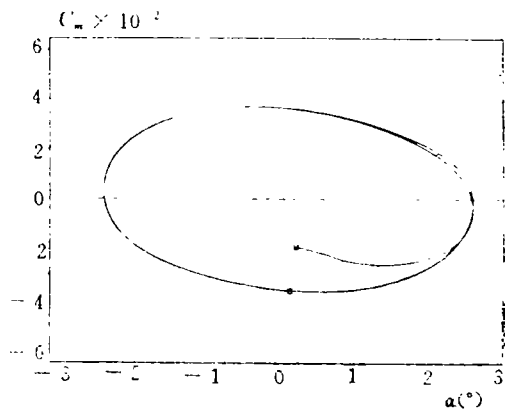
(c)  $k=0.336$  二维



(d)  $k=0.336$  三维



(e)  $k=0.628$  二维



(f)  $k=0.628$  三维

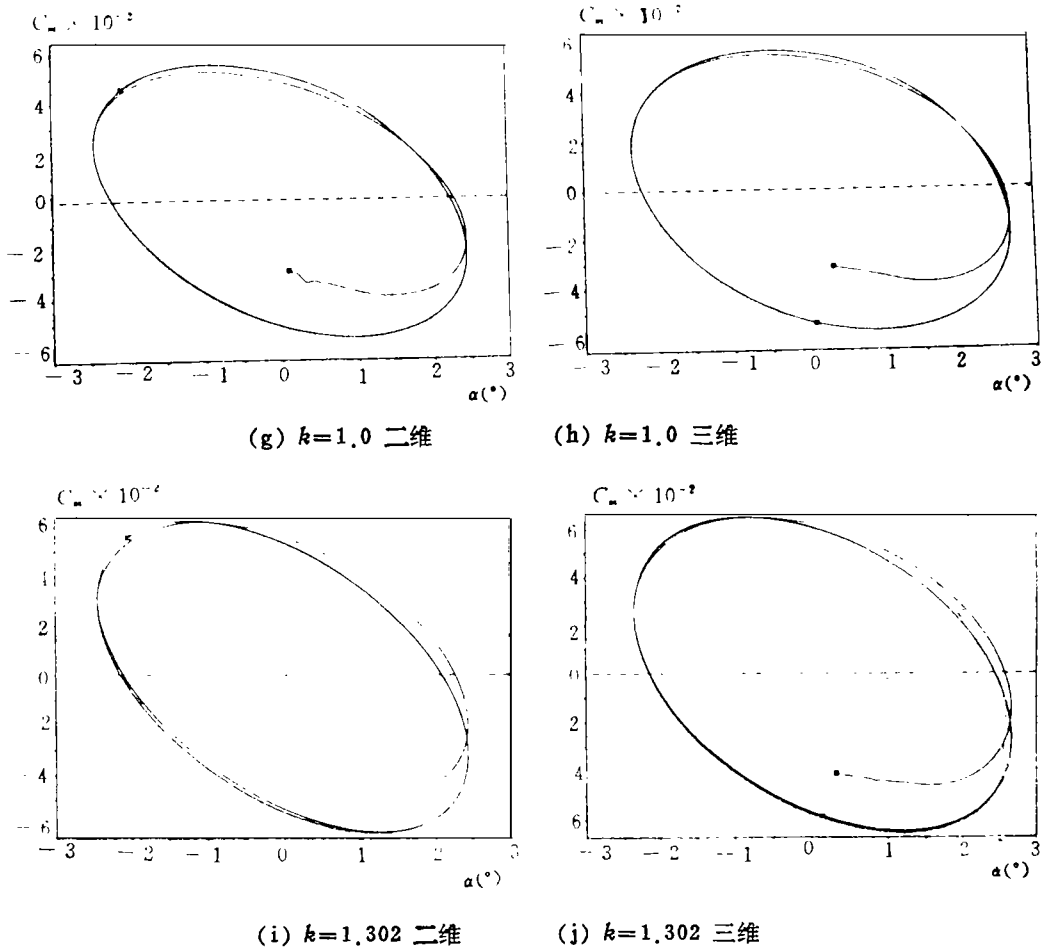


图4 两个机翼振动的力矩系数随迎角的变化过程。  $M_\infty=0.755, \alpha_m=0.0^\circ; \alpha_0=2.44^\circ$

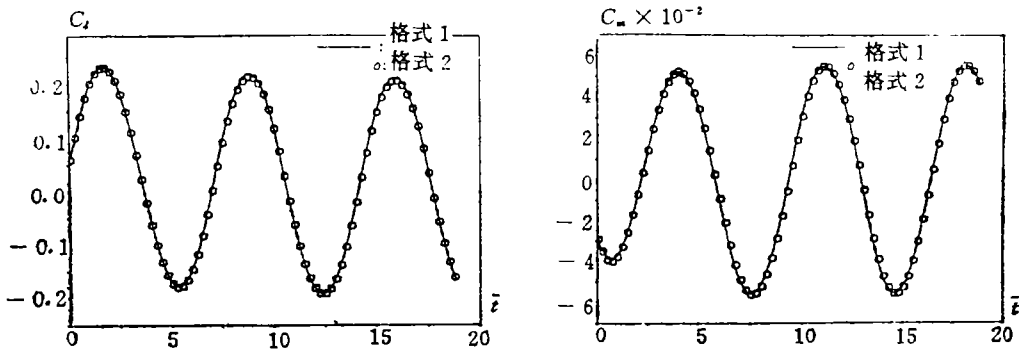


图5 计算升力 $C_l$ 与力矩系数 $C_m$ 随时间的变化过程。  $M_\infty=0.755, \alpha_m=0.0^\circ, \alpha_0=2.44^\circ$

得出了与试验结果吻合良好的不同时刻机翼表面的压力分布<sup>[6]</sup>。

在此基础上，我们对带NACA—0012翼型的二维与三维（展弦比 $A=6$ ）的机翼在来流马赫数 $M_\infty=0.75$ 的跨音速流场中绕1/4弦轴以不同的减缩频率做 $\alpha_m=0, \alpha_0=2.44^\circ$ 振动的非定常气动进行了计算，图3和图4分别给出了两个机翼振动的升力系数与力矩系数随迎角的变化过程。结果表明，随着 $k$ 的增加，非定常升力环将变小；而当 $k$ 值增加到一定值时，该升



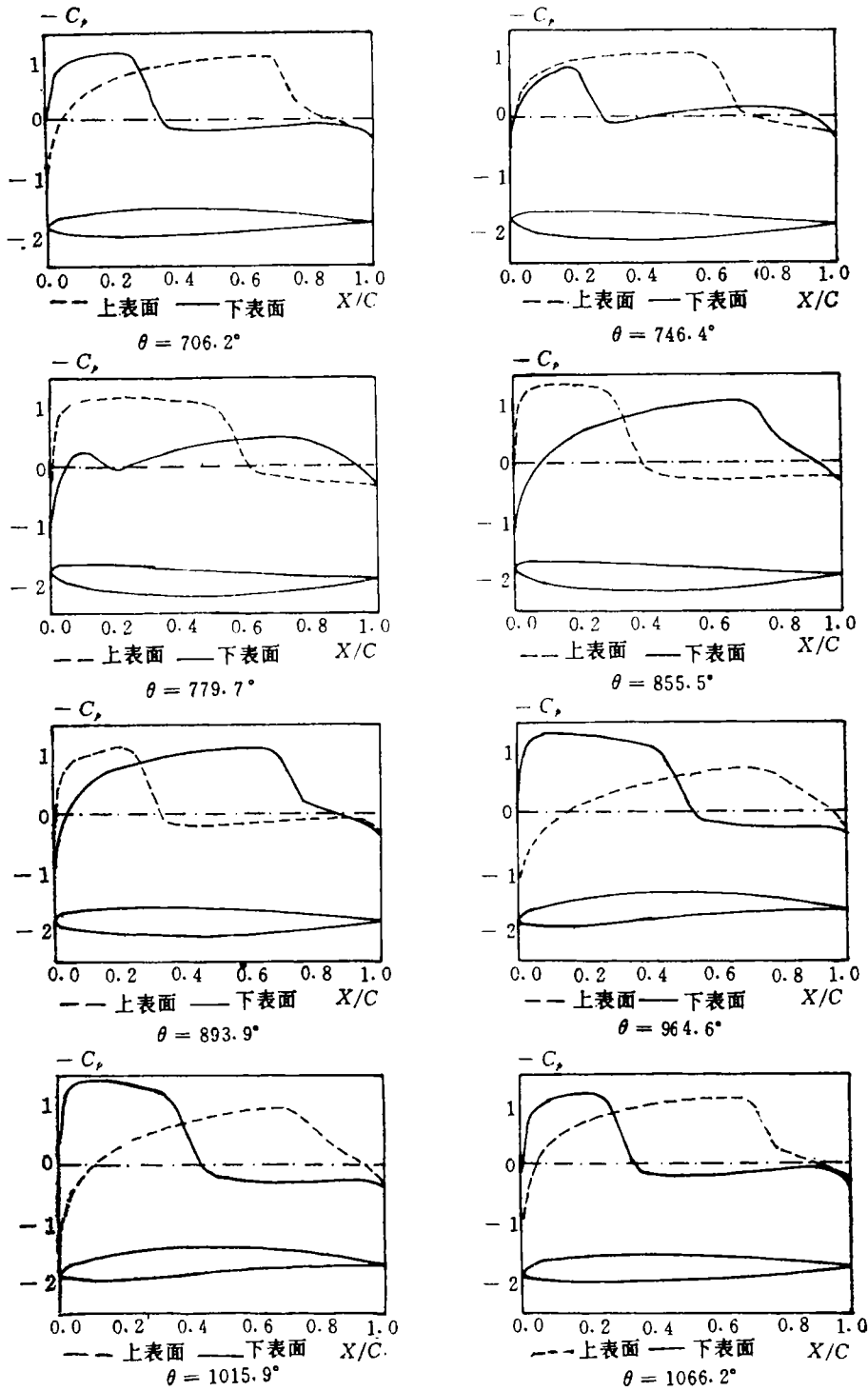


图6 不同时刻下机翼表面压力分布

$M_\infty = 0.755$ ,  $\alpha_m = 0^\circ$ ,  $k_p = k_s = 1.0$ ,  $z_{d0} = 0.2$ ,  $\alpha_0 = 2.44^\circ$

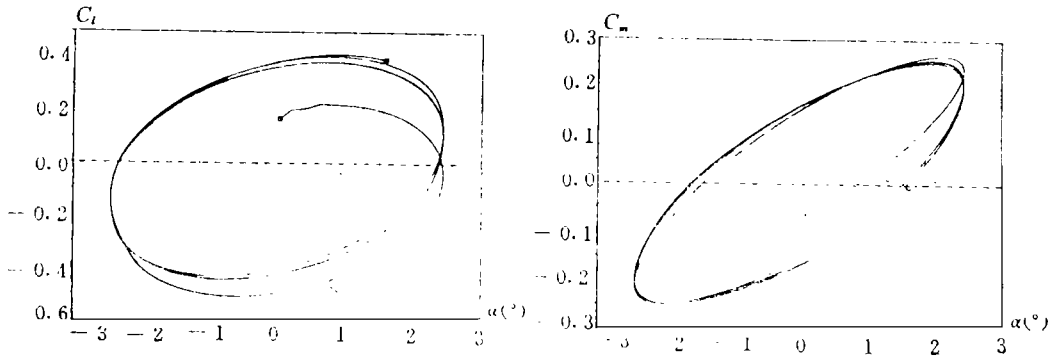


图7 计算升力系数 $C_l$ 与力矩系数 $C_m$ 随迎角的变化过程

$$M_\infty=0.755, k_p=k_d=1.0; z_{d0}=0.2, \alpha_0=2.44^\circ, \alpha_m=0.0^\circ$$

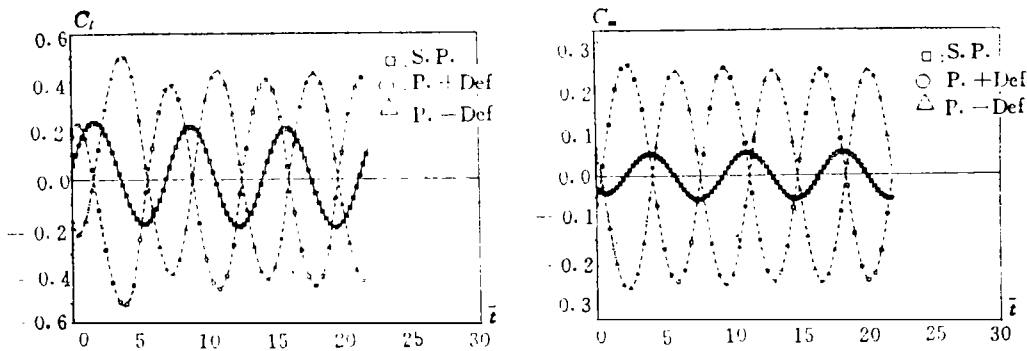


图8 计算升力系数 $C_l$ 与力矩系数 $C_m$ 随时间的变化过程

$$M_\infty=0.755, \alpha_m=0.0^\circ, \alpha_0=2.44^\circ, \text{S.P.}; k_p=1.0, k_d=0.0; z_{d0}=0.0;$$

$$\text{P. + Def.}; k_p=k_d=1.0, z_{d0}=0.2, \text{P. - Def.}; k_p=k_d=1.0, z_{d0}=-0.2$$

力环开始以相反方向变化；如果  $k$  值继续增加，反向变化的升力环变大，俯仰力矩系数则是随着  $k$  的增加不断变大。

## 2. 绕弹性振动机翼跨音速非定常流动

如果机翼是弹性的，或带有操纵面，这时翼面的形状将随时间变化。为了得到随时间变化的贴体网格，就需要在每一时刻生成相应的贴体网格。做为算例，本文对带有 NACA—0012 翼型的二维机翼的有关问题进行了探讨。

首先为了考察计算方法与程序，取机翼绕  $1/4$  弦轴的刚性俯仰振动为例，利用每一时间重新生成网格的方法进行气动力计算。图5示出了  $M_\infty=0.75$ ,  $k=1.0$ ,  $\alpha_0=2.44^\circ$ ,  $\alpha_m=0^\circ$  计算升力与力矩系数随时间的变化过程 ( $\bar{t}=t/C\sqrt{\rho_\infty/p_\infty}$ )，该结果与用与机翼固联刚性网格的计算结果完全吻合。

在此基础上，我们又对该机翼在来流  $M_\infty=0.75$  的流场中做弹性振动的非定常气动力进行了计算。机翼的形状可以描述为：

$$z(x,t)=z_b(x)+f(x)\zeta(t)$$

其中  $z_b(x)$  表示初始状态机翼的形状， $f(x)$  表示机翼结构自由振动的位移， $\zeta(t)$  为广义坐

标。在本算例中我们取,

$$f(x) = z_{a_0} x(1-x), \quad \zeta(t) = \sin(\sqrt{\gamma} M_{\infty} k_a t)$$

机翼本身绕其1/4弦轴的俯仰振动为

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\sqrt{\gamma} M_{\infty} k_p t)$$

同时取  $k_p = k_a = 1.0$ ,  $z_{a_0} = 0.2$ ,  $\alpha_0 = 2.44$ ,  $\alpha_m = 0$ .

图6给出了不同时刻下机翼表面压力分布, 图7给出了计算升力系数与力矩系数随迎角的变化过程。作为附加计算, 我们又对另一种情况即  $k_p = k_a = 1.0$ ,  $z_{a_0} = -0.2$ ,  $\alpha_0 = -2.44^\circ$ ,  $\alpha_m = 0^\circ$  的情况进行了计算。图8给出了计算升力系数与力矩系数随时间的变化过程, 该图同时示出了前一计算的计算结果以及机翼做单纯刚性俯仰振动的结果比较。可以看出, 弹性振动的两个计算给出了正好反向的计算结果。

#### 四、结 论

本文利用求解欧拉方程无条件稳定的Runge-Kutta方法建立了用于研究绕任意振动二维与三维刚性或弹性机翼非定常流动与气动力研究的计算方法。并以带NACA—0012翼型的矩形机翼为例对有关问题进行了较为详细的数值模拟研究。计算结果表明, 本计算方法是可靠实用的, 它可用于飞机气动弹性问题及其它有关非定常问题的研究中。

#### 参 考 文 献

- [1] H. W. M. Hoeijmakers, et al., Numerical simulation of vortical flow over a delta wing at subsonic and transonic speed, *Proceedings of the 17th ICAS Congress in 1990 ICAS-90-3.3.3* (1990).
- [2] A. Jameson, et al., Numerical Solution of Euler Equations By Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Scheme, AIAA paper 81-1259 (1981).
- [3] D. L. Whitfield and J. M. Janus, Three-Dimensional Unsteady Euler Equations Solution Using Flux Vector Splitting, AIAA paper 84-1014 (1984).
- [4] H. Hollanders, et al., Three-dimensional calculation of transonic viscous flows by an implicit method, *AIAA J.*, **23**(11) (1985), 1670-1678.
- [5] P. C. E. Jorgenson, et al., An unconditional stable Runge-Kutta method for unsteady flows, *27th Aerospace Science Meeting*, Reno, Nevada, Jan. 9-12 (1989).
- [6] Gao Zhenghong, Unconditional Stable Solutions of Unsteady Euler Equations for Rigid and Flexible Oscillating Airfoils, FLM-98/18, Lehrstuhl fuer Fluid Mechanik, TU Muenchen Deutschland (1994).

# Unconditional Stable Solutions of the Euler Equations for Two- and Three-D Wings in Arbitrary Motion

Gao Zhengong

*(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. China)*

## Abstract

The work presented here shows the unsteady inviscid results obtained for the two- and three-dimensional wings which are in rigid and flexible oscillations.

The results are generated by a finite volume Euler method. It is based on the Runge-Kutta time stepping scheme developed by Jameson et al. To increase the time step which is limited by the stability of Runge-Kutta scheme, the implicit residual smoothing which is modified by using variable coefficients to prevent the loss of flow physics for the unsteady flows is engaged in the calculations. With this unconditional stable solver the unsteady flows about the wings in arbitrary motion can be received efficiently.

The two- and three-dimensional rectangular wings which are in rigid flexible pitching oscillations in the transonic flow are investigated here, some of the computational results are compared with the experimental data. The influence of the reduced frequency for the two kinds of the wings are researched. All the results given in this work are reasonable.

**Key words** Euler equations, unsteady flow, transonic flow, CFD