应用数学和力学，第16卷 第11期(1995年11月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性非完整系统Vacco动力学方程的积分方法*

罗 绍 凯

(河南商丘师专，商丘 476000)

(汪家𬤊推荐，1993年11月2日收到)

(谨以此文祭奠著名的应用数学和力学科学家，中国科学院学部委员郭仲衡 教 授.——罗绍凯)

摘 要

本文给出积分非线性非完整系统 Vacco 动力学方程的积分方法. 首先，将 Vacco 动力学方程表示为正则形式和场方程形式；然后，分别用梯度法，单分量法和场方法积分相应完整系统的动力学方程，并加上非完整约束对初条件的限制而得到非线性非完整系统 Vacco 动力学方程的解.

关键词 非完整约束 Vacco 动力学方程 积分方法

一、引 言

传统上建立非完整力学的各种运动方程，都要对虚位移人为地施加额外的限制[1]. 1990年，郭仲衡等[2]跳出框框、放弃了限制，得到一种新型方程.这种方程与莫斯科大学Козлов所声言的作为新方法、新数学模型的 Vacco 动力学方程形式相同[3]，引起了分析力学研究者的很大兴趣，相继被推广到高阶非完整系统[4]和变质量系统[5]. 但这一问题的研究一直局限于方程的建立，而对此新型方程本身的研究则甚少，对其积分方法尚未曾问及.

复杂系统动力学方程的积分理论是分析力学的重要内容之一，最近，文 [6] 给出了 Vacco 动力学方程的第一积分、降阶方法、积分不变量的构造方法、Poincaré-Cartan 型与 Poincaré 型积分变量关系和积分不变量. 本文把 Vujanović B. 1979—1984 年间提出的积分完整非保守系统方程的方法[7~9]推广应用于积分非线性非完整系统的 Vacco 动力学方程. 首先，将 Vacco 动力学方程表为正则方程形式和场方程形式，并作为完整系统来考虑；其次，分别用梯度法、单分量法和场方法积分相应完整系统的动力学方程；最后，将非完整约束对初始条件的限制加上去，便得原非线性非完整系统 Vacco 动力学方程的解.

* 河南省自然科学基金资助课题.

二、非线性非完整系统Vacco动力学正则方程和场方程

研究N个质点构成的力学系统，其位形由广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$确定。设系统的运动受有g个理想非线性非完整约束的作用

$$f_\rho(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)=0\quad(\rho=1,\cdots,g)\tag{2.1}$$

则系统的运动满足方程[2]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\Lambda_s,\quad \Lambda_s=\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\left(\frac{\partial f_\rho}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\rho}{\partial\dot{q}_s}\right)-\sum_{\rho=1}^{g}\dot{\lambda}_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial\dot{q}_s}\quad(s=1,\cdots,n)\tag{2.2}$$

其中　$L=T-V$，待定乘子λ_ρ为时间t的函数，Λ_s为广义约束反力。

2.1　广义约束反力的求法

将方程(2.2)写为显形式

$$\ddot{q}_l+\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;\ s]\,\dot{q}_k\dot{q}_m=\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+\Lambda_s-\frac{\partial B_s}{\partial t}+\frac{\partial L_0}{\partial q_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\right\}\quad(l=1,\cdots,n)\tag{2.3}$$

其中

$$L=L_2+L_1+L_0,\quad L_2=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k,\quad L_1=\sum_{s=1}^{n}B_s\dot{q}_s,$$

$$[k,\ m;\ s]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}+\frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right)$$

而L_0为L中不含广义速度的项。将约束方程(2.1)对时间t求导数，得

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial f_\gamma}{\partial\dot{q}_l}\ddot{q}_l\right)+\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}=0\qquad(\gamma=1,\cdots,g)\tag{2.4}$$

将由(2.3)解得的$\ddot{q}_l$代入(2.4)，便得

$$\sum_{\rho=1}^{g}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_{sl}^{-1}\frac{\partial f_\gamma}{\partial\dot{q}_l}\left[\lambda_\rho\left(\frac{\partial f_\rho}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\rho}{\partial\dot{q}_s}\right)-\dot{\lambda}_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial\dot{q}_s}\right]+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial\dot{q}_l}\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;\ s]\dot{q}_k\dot{q}_m+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+\frac{\partial L_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_k}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\right\}=0\quad(\gamma=1,\cdots,g)\tag{2.5}$$

由此可解得λ_ρ，而广义约束反力为

$$\Lambda_s=\Lambda_s(q_k,\ \dot{q}_k,\ t)\qquad(s=1,\cdots,n)\tag{2.6}$$

2.2 Vacco 动力学方程的正则形式

我们取 Hamilton 函数

$$H(q,\ p,\ t)=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-L,\quad p_s=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\tag{2.7}$$

则(2.2)成为

$$\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\tilde{\Lambda}_s,\ \ \dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}\qquad(s=1\cdots,n)\tag{2.8}$$

其中 $\tilde{\Lambda}_s$为Λ_s中$\dot{q}_k$用q，p，t替代所得表达式.

方程(2.8)可作为一个有条件的完整系统问题来研究，当运动的初始条件q_{s0}、p_{s0}满足约束(2.1)时，即

$$\tilde{f}_\rho(q_{s0},\ p_{s0},\ 0)=0\qquad(\rho=1,\cdots,g)\tag{2.9}$$

则方程(2.8)的相应解给出所研究非线性非完整系统的运动.

2.3 Vacco 动力学的场方程形式

由(2.2)、(2.6)可解得广义加速度

$$\ddot{q}_s=g_s(q_k,\ \dot{q}_k,\ t)\qquad(s,\ k=1,\cdots,n)\tag{2.10}$$

令$\chi_s=q_s$、$\chi_{n+k}=\dot{q}_s(s,\ k=1,\cdots,n)$，则(2.10)表为场方程形式

$$\dot{\chi}_k=\chi_{n+k},\ \ \dot{\chi}_{n+k}=g_k(\chi_s,\ \chi_{n+s},\ t)\qquad(k,s=1,\cdots,n)\tag{2.11}$$

而条件(2.1)成为

$$f_\rho(\chi_s,\ \chi_{n+s},t)=0\qquad(\rho=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n)\tag{2.12}$$

方程(2.11)可作为一个有条件的完整系统问题来研究，当运动的初条件满足(2.12)，即

$$f_\rho(\chi_{s0},\ \chi_{n+s,0},0)=0\qquad(p=1,\cdots,g)\tag{2.13}$$

则方程(2.11)的相应解给出所研究非线性非完整系统的运动.

三、积分Vacco动力学方程的梯度法

3.1 方法一

假设广义动量p_s可表为所有广义坐标q_k和时间t的函数，即

$$p_s=\psi_s(q_k,t)\qquad(s,k=1,\cdots,n)\tag{3.1}$$

于是有

$$\dot{p}_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\psi_s}{\partial t}\tag{3.2}$$

把(3.2)代入(2.8)中第一组方程并利用第二组方程，得到一组拟线性偏微分方程

$$\frac{\partial\psi_s}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi_s}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}+\frac{\partial H}{\partial q_s}-\tilde{\Lambda}_s=0\qquad(s=1,\cdots,n)\tag{3.3}$$

(3.3)称为基本偏微分方程．利用(3.1)，方程组(3.3)的完全解表为

$$p_s=\psi_s(q_k,\ t,\ C_A)\qquad(s,\ k=1,\cdots,n;\ A=1,\cdots,2n)\tag{3.4}$$

考虑到初条件

$$q_s(0)=q_{s0},\quad p_s(0)=p_{s0}\qquad (s=1,\cdots,2n)\tag{3.5}$$

将(3.5)代入(3.4)，可将$C_{n+1},\cdots,C_{2n}$用q_{s0}，p_{s0}和C_s表出，于是

$$p_s=\psi_s(q_k,\ t,\ q_{s0},\ p_{s0},\ C_k)\qquad (s,\ k=1,\cdots,n)\tag{3.6}$$

这样我们可以建立如下定理

定理1 如果方程组

$$\frac{\partial\psi_s}{\partial C_k}=0\qquad (s,k=1,\cdots,n)\tag{3.7}$$

对于q_1，…，q_n是一次代数方程组，且在t，q_s的定义域内都有

$$\det\left(\frac{\partial^2\psi_s}{\partial C_k\ \partial q_l}\right)\neq 0\qquad (k,l=1,\cdots,n)\tag{3.8}$$

成立，那么联合方程(3.7)和(3.6)便可确定初值问题(2.8)、(3.5)的解。把约束方程限制(2.9)加到相应完整系统的解(3.6)、(3.7)上，便得到非性线非完整系统 Vacco 动力学方程的解。

证明 将(3.7)对时间t求导数，得

$$\frac{\partial^2\psi_s}{\partial t\ \partial C_k}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\psi_s}{\partial q_l\partial C_k}\dot q_l=0\tag{3.9}$$

将方程(3.3)对C_k求偏导数，得

$$\frac{\partial^2\psi_s}{\partial t\partial C_k}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\psi_s}{\partial q_l\partial C_k}\frac{\partial H}{\partial p_l}+\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial\psi_s}{\partial q_l}\frac{\partial^2 H}{\partial p_l\partial p_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial C_k}$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_l}\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}-\Lambda_s\right)\frac{\partial\psi_l}{\partial C_k}=0$$

利用(3.7)，上式成为

$$\frac{\partial^2\psi_s}{\partial t\partial C_k}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\psi_s}{\partial q_l\partial C_k}\frac{\partial H}{\partial p_l}=0\tag{3.10}$$

比较(3.9)、(3.10)，得(2.8)的第二组方程。同理，将(3.6)对时间求导数并利用(3.3)，可以证明(2.8)的第一组方程。

3.2 方法二

替代(3.1)式，可令广义坐标q_s是广义动量p_k和时间t的函数，即

$$q_s=\varphi_s(p_k,t)\qquad (s,k=1,\cdots,n)\tag{3.11}$$

则基本偏微分方程组可表为

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_s}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_s}{\partial p_k}\Lambda_k-\frac{\partial H}{\partial p_s}=0\qquad (s=1,\cdots,n)\tag{3.12}$$

设(3.12)的完全解为

$$q_s=\varphi_s(p_k,t,C_B)\qquad (s,k=1,\cdots,n;\ B=1,\cdots,2n)\tag{3.13}$$

利用初始条件(3.5)，可得

$$q_s=\varphi_s(p_k,t,q_{k0},p_{k0},C_k) \qquad (s,k=1,\cdots,n) \tag{3.14}$$

同理我们可得

定理2 如果方程组

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial C_k}=0 \qquad (s,k=1,\cdots,n) \tag{3.15}$$

对于p_1，…，p_n是一次代数方程组，且在t，p_s的定义域内都有

$$\det\left(\frac{\partial^2\varphi_s}{\partial C_k\partial p_l}\right)\neq 0 \qquad (k,l=1,\cdots,n) \tag{3.16}$$

成立，那么联合方程(3.15)和(3.14)便可确定初值问题(2.8)、(3.5)的解。把约束方程限制(2.9)加到相应完整系统的解(3.14)、(3.15)上，便得到非线性非完整系统 Vacco 动力学方程的解。

四、积分Vacco动力学方程的单分量法

4.1 单动量分量法

令系统的一个广义动量，例如p_1作为所有广义坐标、时间t和其余广义动量的函数，即

$$p_1=u(q_s,\ p_a,\ t) \qquad (s=1,\cdots,n;\ a=2,\cdots,n) \tag{4.1}$$

将(4.1)对时间t求导数并利用(2.8)，得到基本偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial q_a}\frac{\partial H}{\partial p_a}+\sum_{a=2}^{n}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_a}+\Lambda_a\right)+\frac{\partial H}{\partial q_1}-\Lambda=0 \tag{4.2}$$

设(4.2)的完全解为

$$p_1=u(q_s,\ p_a,\ t,\ C_1,\cdots,C_{2n}) \qquad (s=1,\cdots,n;\ a=2,\cdots,n) \tag{4.3}$$

利用初始条件(3.5)，可将积分常数C_1用初始条件和其余常数$C_A(A=2,\cdots,2n)$表出，这样(4.3)可写为

$$p_1=u(q_s,\ p_a,\ q_{s0},\ p_{s0},\ t,\ C_A)$$
$$(s=1,\cdots,n;\ a=2,\cdots,n;\ A=2,\cdots,2n) \tag{4.4}$$

于是我们可建立如下定理

定理3 如果方程组

$$\frac{\partial u}{\partial C_A}=0 \qquad (A=2,\cdots,2n) \tag{4.5}$$

对于$q_1,\cdots,q_n$；$p_2,\cdots,p_n$是一次代数方程组，且在t，q_s，p_s的定义域内都有

$$\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2u}{\partial C_2\partial q_1},&\cdots,&\dfrac{\partial^2u}{\partial C_2\partial q_n};&\dfrac{\partial^2u}{\partial C_2\partial p_2},&\cdots,&\dfrac{\partial^2u}{\partial C_2\partial p_n}\\ \dfrac{\partial^2u}{\partial C_{2n}\partial q_1},&\cdots,&\dfrac{\partial^2u}{\partial C_{2n}\partial q_n};&\dfrac{\partial^2u}{\partial C_{2n}\partial p_2},&\cdots,&\dfrac{\partial^2u}{\partial C_{2n}\partial p_n}\end{bmatrix}\neq 0 \tag{4.6}$$

成立，那么联合方程(4.5)和(4.4)便可确定初值问题 (2.8)、(3.5) 的解。把约束方程限制(2.9)加到相应完整系统的解(4.4)、(4.5)上，便得到非线性非完整系统 Vacco 动力学方程的解。

证明 将(4.5)对时间t求导数，得

$$\frac{\partial^2u}{\partial C_A\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial C_A\partial q_s}\dot q_s+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial C_A\partial p_a}\dot p_a=0 \tag{4.7}$$

将方程(4.2)对C_A求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial q_a}\frac{\partial H}{\partial p_a}$$

$$+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial p_a}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_a}+\Lambda_a\right)+\left[\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial q_1}\right)\right.$$

$$+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial q_a}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial p_a}\right)+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_a}+\Lambda_a\right)$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial q_1}-\Lambda_1\right)\right]\frac{\partial u}{\partial C_A}=0 \tag{4.8}$$

利用(4.5)，并把(4.7)减去(4.8)，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial q_1}\left(\dot{q}_1-\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial q_a}\left(\dot{q}_a-\frac{\partial H}{\partial p_a}\right)$$

$$+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial p_a}\left(\dot{p}_a+\frac{\partial H}{\partial q_a}-\Lambda_a\right)=0 \tag{4.9}$$

根据(4.6)，我们得到

$$\dot{p}_a=-\frac{\partial H}{\partial q_a}+\Lambda_a,\quad \dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}\qquad (a=2,\cdots,n;\ s=1,\cdots,n) \tag{4.10}$$

使用(4.3)，并考虑到(4.10)，我们有

$$\dot{p}_1=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial q_a}\frac{\partial H}{\partial p_a}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial p_a}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_a}+\Lambda_a\right) \tag{4.11}$$

联合和(4.2)和(4.11)，得

$$\dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial q_1}+\Lambda_1 \tag{4.12}$$

4.2 单坐标分量法

替代(4.1)，令系统的一个广义坐标，例如q_1作为所有广义动量、时间和其余广义坐标的函数，即

$$q_1=V(q_a,\ p_s,\ t)\qquad (a=2,\cdots,n;\ s=1,\cdots,n) \tag{4.13}$$

将(4.13)对时间t求导数，并利用(2.8)得基本偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_a}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial V}{\partial p_1}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}+\tilde{\Lambda}_1\right)$$

$$+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial p_a}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_a}+\tilde{\Lambda}_a\right)-\frac{\partial H}{\partial q_1}=0 \tag{4.14}$$

设方程(4.14)的完全解为

$$q_1=V(q_a,\ p_s,\ t,\ C_1,\cdots,C_{2n})\qquad (a=2,\cdots,n) \tag{4.15}$$

利用初始条件(3.5)，得到

$$q_1=V(q_a,\ p_s,\ t,\ q_{s0},\ p_{s0},\ C_B)\qquad(a=2,\cdots,n;\ s=1,\cdots,n;\ B=2,\cdots,2n)\tag{4.16}$$

同理我们得到

定理4 如果方程组

$$\frac{\partial V}{\partial C_B}=0\qquad(B=2,\cdots,2n)\tag{4.17}$$

对于$q_2,\cdots,q_n;\ p_1,\cdots,p_n$是一次代数方程组，且在$t$，$q_s$，$p_s$的定义域内都有

$$\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 V}{\partial C_2\partial q_2},\cdots,\dfrac{\partial^2 V}{\partial C_2\partial q_n};&\dfrac{\partial^2 V}{\partial C_2\partial p_1},\cdots,\dfrac{\partial^2 V}{\partial C_2\partial p_n}\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial C_{2n}\partial q_2},\cdots,\dfrac{\partial^2 V}{\partial C_{2n}\partial q_n};&\dfrac{\partial^2 V}{\partial C_{2n}\partial p_1},\cdots,\dfrac{\partial^2 V}{\partial C_{2n}\partial p_n}\end{bmatrix}\neq 0\tag{4.18}$$

成立，那么联合方程(4.17)和(4.16)便可确定初值问题 (2.8)、(3.5) 的解。把约束方程限制(2.9)加到相应完整系统的解(4.16)、(4.17)上，便得到非线性非完整系统 Vacco 动力学方程的解。

五、积分Vacco动力学方程的场方法

选一个场变量，例如χ_1作为依赖于时间t和其余场变量$\chi_A(A=2,\cdots,2n)$的场函数，即

$$\chi_1=W(\chi_A,t)\qquad(A=2,\cdots,2n)\tag{5.1}$$

将(5.1)对时间t求导数，并利用方程(2.11)的后面$(2n-1)$个方程，得到基本偏微分方程

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial W}{\partial \chi_a}\chi_{n+a}+\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial \chi_{n+b}}g_b(W,\chi_A,t)-\chi_{n+1}=0\tag{5.2}$$

设已找到(5.2)的一个完全解

$$\chi_1=W(\chi_A,\ t,\ C_\alpha)\qquad(A=2,\cdots,2n;\ \alpha=1,\cdots,2n)\tag{5.3}$$

将(5.3)代入(5.2)，则(5.2)对所有χ_A，t，C_α恒满足。令相应完整系统的初条件为

$$\chi_\alpha(0)=\chi_{\alpha 0}\qquad(\alpha=1,\cdots,2n)\tag{5.4}$$

将(5.4)代入(5.3)，并将一个常数，例如C_1表为$\chi_{\alpha 0}$和C_A的函数，于是有

$$\chi_1=W(\chi_A,\ t,\ \chi_{\alpha 0},\ C_A)\qquad(A=2,\cdots,2n;\ \alpha=1,\cdots,2n)\tag{5.5}$$

这样我们可建立如下定理

定理5 如果方程组

$$\frac{\partial W}{\partial C_A}=0\qquad(A=2,\cdots,2n)\tag{5.6}$$

对于$\chi_2,\cdots,\chi_{2n}$是一次代数方程组，且在t，χ_B的定义域内都有

$$\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial C_A\partial \chi_B}\right)\neq 0\tag{5.7}$$

成立，那么联合方程(5.6)和(5.5)便可确定初值问题 (2.11)、(5.4) 的解。把约束方程限制(2.13)加在相应完整系统的解(5.5)和(5.6)上，便得到非线性非完整系统 Vacco 动力学方程的解。

证明 将(5.6)对时间t求导数，得

$$\frac{\partial^2 W}{\partial C_A \partial t}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial^2 W}{\partial C_A \partial \chi_a}\dot{\chi}_a+\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial^2 W}{\partial C_A \partial \chi_{n+b}}\dot{\chi}_{n+b}=0 \tag{5.8}$$

将方程(5.2)对C_A求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 W}{\partial C_A \partial t}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial^2 W}{\partial C_A \partial \chi_a}\chi_{n+a}+\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial^2 W}{\partial C_A \partial \chi_{n+b}}g_b$$

$$+\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial \chi_{n+b}}\frac{\partial g_b}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial C_A}=0 \tag{5.9}$$

比较(5.8)、(5.9)，并利用(5.6)，我们得到

$$\dot{\chi}_{n+a}=\chi_{n+a},\quad \dot{\chi}_{n+b}=g_b \qquad (a=2,\cdots,n;\ b=1,\cdots,n) \tag{5.10}$$

这即方程(2.11)的后面$(2n-1)$个方程。将(5.5)对时间t求导，并利用(5.2)，我们可以证明(2.11)的第一个方程。

六、讨论和结论

本文与文[6]构成了 Vacco 动力学方程的系统、全面的积分理论。本文方法具有通用性，没有像 Hamilton-Jacobi 方法那样苛刻的条件。本文方法具有灵活性，在单分量法中，任一p都可替代p_1、任一q都可替代q_1；在场方法中，任一场变量都可取代χ_1；对某个具体问题可选取适当的变量，以使基本偏微分方程较易求解。本文方法的主要困难在于求基本偏微分方程的成全解，但只要找到完全解就不用任何积分而求得 Vacco 动力学方程的解。

致谢 感谢汪家訸教授的关心和帮助！

参 考 文 献

[1] 梅凤翔，《非完整系统力学基础》，北京工业学院出版社，(1985)，81—311.

[2] 郭仲衡、高普云，关于经典非完整力学，力学学报，22(2)，(1990)，185—190.

[3] В. В. Козлов, Динамика систем с неинтегрируемыми связями Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ, *Вестник МГУ*, 3(1982), 92—100; 4(1982), 70—76; 3(1983), 102—111.

[4] 陈立群，高阶非完整系统的 Vacco 动力学方程，科学通报，35(23)(1990)，1836—1837.

[5] 岳庆文等，变质量高阶非完整系统的 Vacco 动力学方程，黄淮学刊，7(4)(1991)，11—20.

[6] 罗绍凯，非线性非完整系统 Vacco 动力学的积分理论，新疆大学学报，10(1)(1993)，54—60.

[7] B. Vujanović, On a gradient method in nonconservative mechanics systems, *Acta Mechanica*, 34(1979), 167—169.

[8] B. Vujanović, On the integration of the nonconservative Hamilton dynamical equations, *Int. J. Eugng. Sci.*, 19(12)(1981), 1739—1747.

[9] B. Vujanović, A field method and its application to the theory of vibrations, *Int. J. Nonlinear Mech.*, 19(1984), 383—396.

The Integration Methods of Vacco Dynamics Equation of Nonlinear Nonholonomic Systems

Luo Shaokai

(*Shangqiu Teachers College, Shangqiu* 476000)

Abstract

This paper presents the integration methods for Vacco dynamics equations of nonlinear nonholonomic system. First Vacco dynamic equations are written in the canonical form and the field form. Second, the gradient methods, the single-component methods and the field method are used to integrate the dynamics equations of the corresponding holonomic system respectively. And considering the restriction of nonholonomic constraints to the initial conditions, the solutions of Vacco dynamics equations of nonlinear nonholonomic system are obtained.

Key words nonholonomic constraint, Vacco dynamics equation, integration method