应用数学和力学，第16卷 第11期（1995年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

人工压缩方程的OBLC区域分解法

林明森　　黄兰洁

（天津大学力学系，天津 300072）（中科院计算中心，北京 100080）

（吴望一推荐．1994年12月17日收到）

摘　　要

本文根据物理尺度的区域分解法[1],[2]，从奇异摄动的观点把解分为外部解和边界层校正，两者在固定的物面边界上藕合，这样对不同的尺度区域，可用不同的简化方程及计算方法。本文给出了人工压缩N-S方程的特征性质及其合适的边界提法，计算的例子表明，精度和效率是满意的。

关键词　区域分解　奇异摄动　人工压缩

一、控 制 方 程

作变换：

$$\xi=x,\quad \eta=\frac{y-w(x)}{Y-w(x)}$$

其中　$(x,\ y)$为笛卡尔坐标系

$w(x)$为物面方程

Y为常数，即外边界高度．

变换Jacobian为：$J=Y-w(x)=H$

控制方程为：

$$\gamma\frac{\partial p}{\partial y}+\left[\frac{\partial(Hu)}{\partial\xi}+\frac{\partial(H\vartheta)}{\partial\eta}\right]\Big/H=0 \tag{1.1a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial\xi}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial\eta}+D^1p=\frac{1}{Re}\nabla^2u \tag{1.1b}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+u\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}+\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}+D^2p=\frac{1}{HRe}(\nabla^2u\cdot s+\nabla^2v)+s_1 \tag{1.1c}$$

其中：u，ϑ为$\boldsymbol{V}$的逆变分量（u，v为笛卡尔坐标系$\boldsymbol{V}$的分量）

$$\vartheta=\frac{su+v}{H},$$

$$s=-w'(x)(1-\eta),$$

$$s_1=\frac{-w''(1-\eta)u^2+2w'u\vartheta}{H},$$

$$D^1 f = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{s}{H} \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

$$D^2 f = \frac{s}{H} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1+s^2}{H^2} \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

γ为人工压缩系数.

物面边界条件为:

$$\begin{cases} u(\xi, 0, t) = 0 & (1.2a) \\ v(\xi, 0, t) = 0 & (1.2b) \end{cases}$$

对方程（1.1）及边界条件(1.2)，我们让

$$u = U + \bar{U},\quad v = V + \bar{V},\quad \hat{v} = \hat{V} + \tilde{V},\quad p = P + \bar{P}$$

其中，U，V，P，$\tilde{V}$为外部解．定义为满足方程(1.1)及如下边界条件:

$$\begin{cases} U(\xi, 0, t) = U_B(\xi, t) & (1.3a) \\ V(\xi, 0, t) = V_B(\xi, t) & (1.3b) \end{cases}$$

上式中，U_B由外部解延拓而得，V_B由边界修正解给出.修正解$\bar{U}$，$\bar{V}$，$\tilde{V}$，$\bar{P}$为方程(1.1)减去粗网格外部解方程的解，边界条件为:

$$\begin{cases} \bar{U}_B(\xi, 0, t) = -U_B(\xi, t) & (1.4a) \\ \bar{V}_B(\xi, 0, t) = \left(\dfrac{\delta_\xi \Sigma_k \bar{U} H \Delta\bar{\eta}}{\Delta\xi} + \gamma \dfrac{\delta_t \Sigma_k \bar{P} H \Delta\bar{\eta}}{\Delta t}\right) \Big/ H & (1.4b) \end{cases}$$

二、方 程 的 特 征 性 质

二维无粘人工可压缩方程的特征方程为:

$$\begin{vmatrix} \phi_t & \phi_x & \phi_y \\ c^2\phi_x & \phi_t + u\phi_x + v\phi_y & 0 \\ c^2\phi_y & 0 & \phi_t + u\phi_x + v\phi_y \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.1)$$

即　$\phi_t + u\phi_x + v\phi_y = 0$或$\phi_t(\phi_t + u\phi_x + v\phi_y) - c^2(\phi_x + \phi_y^2) = 0$,

$\phi_t + u\phi_x + v\phi_y = 0$表示迹线为一条次特征线．另一式子的特征锥如图1．从图中知，二维无粘AC方程是双曲型方程，双曲起主导作用.

三、边 界 条 件 提 法

我们可以证明，对进口只须让

$$\dot{u} = 0,\quad \dot{v} = 0 \qquad (3.1a、b)$$

即u，v给定，对出口

$$\dot{u} = 0,\quad \dot{v}_x = 0 \qquad (3.2a、b)$$

即u，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$给定，原问题是适定的.

对于右边出口条件，我们还可以用无反射边界条件即$\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$代替$\dot{u} = 0$.

四、计 算 结 果

我们用ULWC[3]格式求解控制方程，对时空为迎风格式(u)，对空间对流为Lax-Wendroff(LW)差分，对空间扩散差分为中心差分(c)，它达到二维最佳稳定性.

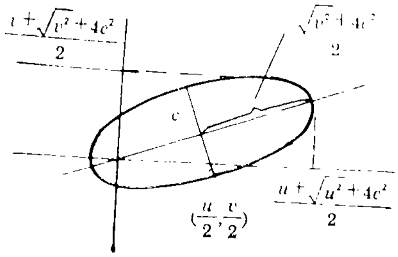


图1 特征锥在$t=1$上的截面

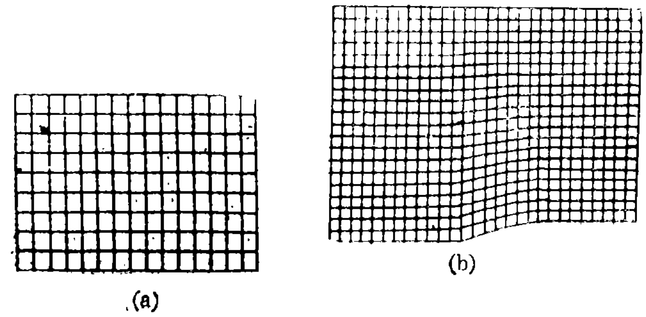


图2 粗网格上的网格图

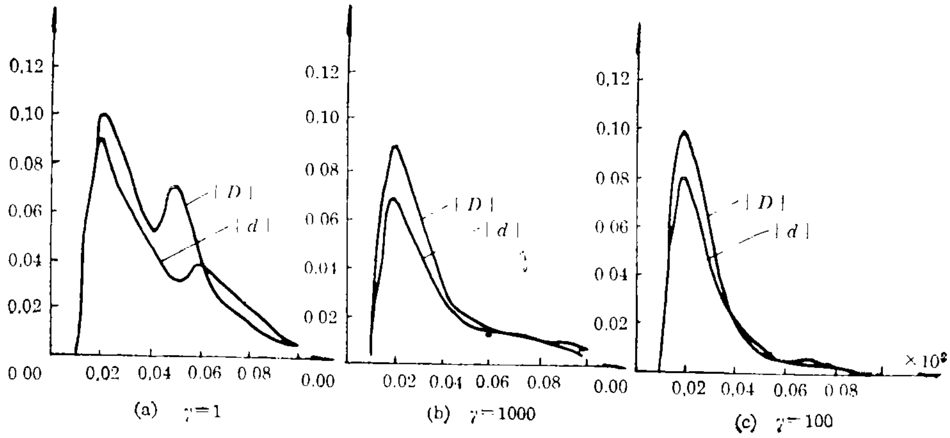
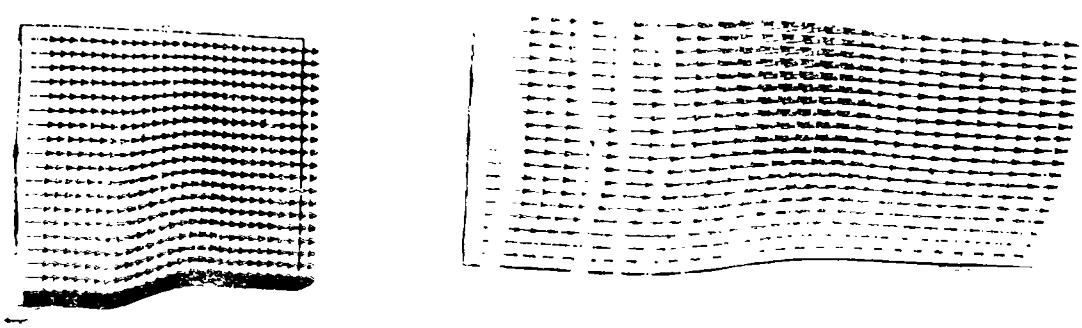
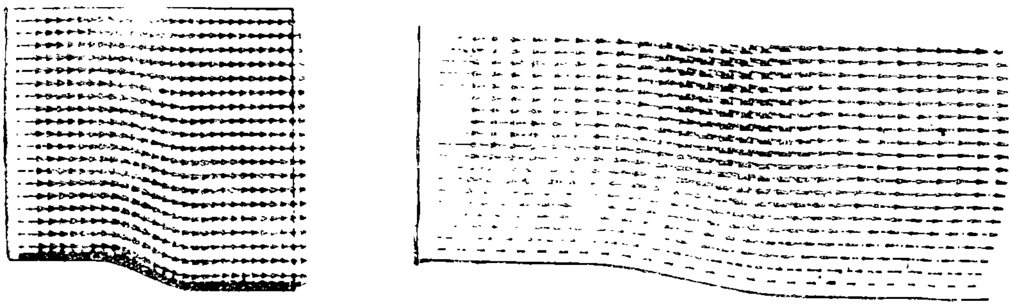


图3 平板的收敛过程



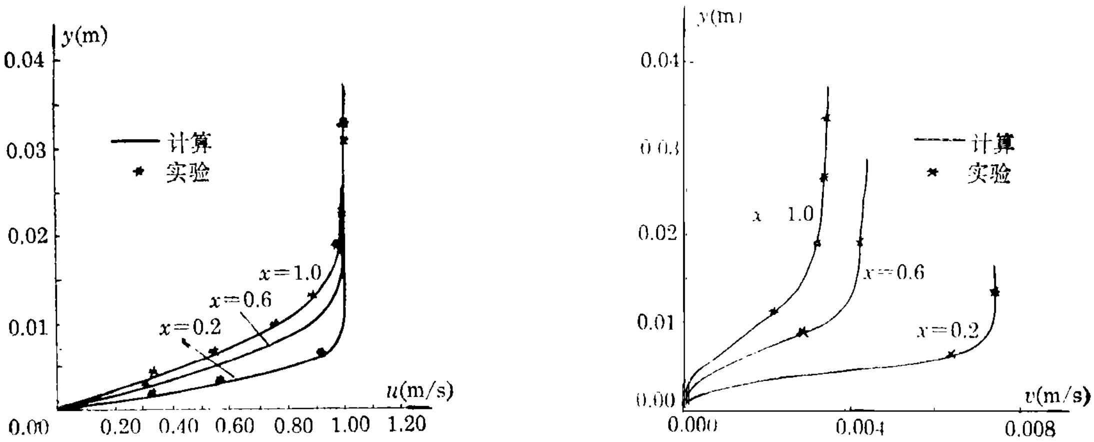
(a) 粗网格 (b) 细网格局部放大图

图4 前台阶流场速度矢图((b)中$y_{[\text{图}]}=40y-39w(x)$)



(a) 粗网格　　　　(b) 细网格局部放大图

网5 后台阶流场速度矢图((b)中$y_{网}=40y-39w(x)$)



(a)　　　　(b)

图6 平板边界层内速度分布

平板计算的结果给出图3的收敛过程，可以看出$\gamma=100$时，收敛最快．计算结果与Blausius解比较如图6，可知其精确度．

由正弦连接的前后台阶，定常时流态如图4，图5所示．

五、结　论

本文给出了人工可压缩方程分区耦合求解不可压缩流场的数值解法，分析了人工压缩方程的性质及其合适的边界条件提法．从计算结果看出，本分区方法具有推广到可压缩流动的前景．

参 考 文 献

[1] L.C. Huang, J. X. Shen, J. X. Li Difference solution impressible Navier-Stokes equations with zone Decompose, *in Proc. BAILV Int. Conf.*, Boole Press (1988), 524—528.

[2] 黄兰洁，用区域分解法求解不可压N-S方程差分解，《第四届全国计算流体力学会议论文集》，(1988)，241—245.

[3] 黄兰洁，不可压缩N-S方程的隐式投影法，计算数学，2(1990).
[4] 黄兰洁，《计算流体力学选讲》（讲义）。

Obic Domain Decomposition for Artificial Compressible Equation

Lin Mingsen

(*Dept. of Mechanics, Tianjin Unitersity, Tianjin* 300072)

Huang Lanjie

(*Computing Centre of Sinica, Beijing* 100080)

Abstract

This paper is a continuation of the domain decomppsition method according to the physics scale proposed in[1]and[2]. Starting from systems of ordinary differential equations, a solution is decomposed into an outer solution (0) and its boundary layer correction (BLC) which meets on the fixed boundary for efficient numerical solution, different equations, different numerical methods and different grids can be suitably chosen for the different scales. This paper also gives the characteristic nature and well-posed boundary condition about artificial compressib equations. Numerical experiments show the computational method and the couple process presented in the paper are effective.

Key words zone decompose, singular perturbation, artificial compress