应用数学和力学，第16卷 第10期（1995年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

三维保测度映射系统不变流形及其稳定性

刘 杰

（应用物理与计算数学研究所，北京8009信箱 北京 100088）

（周焕文推荐，1994年12月1日收到）

摘 要

本文通过构造形式级数的方式，给出了一种三维保测度映射系统中一维不变流形和二维不变流形的计算方法。利用不变流形的解析表达式我们估计了导致共振带完全失稳的临界参数。

关键词 保测度映射 混沌 不变流形 稳定性

一、引 言

不同于偶次维映射，三维保测度映射有着其特有的、丰富的动力学特性[2~4]。对于三维保测度映射，在不动点邻域内的线性化映射，至少有一个特征值为实的。此外，由于所有的特征值之积为1，故一般存在一些特征值，其模大于1。这样，对线性化映射而言，不动点一般是不稳定的，这与偶次维保测度映射有很大差异。在所研究的三维保测度映射中，在不动点邻域内一般不存在一维或二维的不变流形。文[2]不仅从数值上而且从理论上严格证明了在三维保测度映射的一维不变流形的邻域内一定存在二维不变流形。因此，在三维保测度系统中，不动点的寻找及其稳定性研究已不甚重要了，而一维不变流形的寻找及其稳定性研究就显得非常重要了。文[3]中给出了一个关于一维不变流形失稳的充分性判据。文[4]中我们发现有其它可能的失稳机制。所有这些失稳判据都需有不变曲线的表达式。因而精确计算出不变曲线的表达式将有助于精确计算失稳时的临界参数。

一般$2n$维Hamilton系统通过能量截面以及Poincaré截面将对应于一个偶次维映射。那么三维保测度映射的研究是否仅仅具有理论上的意义？事实上三维保测度映射可以用来研究许多复杂系统，如Couette-Taylor流体系统以及近抛物轨道彗星运动[4,5]。我们在文[4]中推导出一个反映近抛物线轨道彗星运动的三维映射，这个映射是一个二维映射的受摄扩张。本文将侧重于研究这类映射。

二、映 射 系 统

在文[4]中，我们研究了一个天体力学问题——近抛物线轨道彗星的运动，导出了以下映射：

$$\left.\begin{aligned} K' &= K+\mu\left(\sum_{i=1}^{7} b_i \sin ig + \rho \sin\omega \cos g\right) \\ g' &= g + 2\pi/(-K')^{3/2} \qquad \bmod (2\pi) \\ \omega' &= \omega + \mu \sum_{i=0}^{7} a_i \cos ig \qquad \bmod (2\pi) \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

其中K，g和ω分别代表彗星的能量、相角以及近地点平黄经；ρ是主天体轨道偏心率参量；a_i和b_i是常系数；μ是摄动小参数。

为了方便下面研究，我们忽略摄动因素中的高频项得到如下三维映射：

$$M_3:\ \begin{cases} K' = K + \mu R(g,\ \omega) \\ g' = g + 2\pi/(-K')^{3/2} \qquad \bmod (2\pi) \\ \omega' = \omega + \mu(\alpha + \cos g) \qquad \bmod (2\pi) \end{cases} \tag{2.2}$$

其中α为参数并且

$$R(g,\ \omega) = \sin g + \rho \cos g \sin\omega \tag{2.3}$$

当参数ρ取为零时，M_3退化为Kepler映射[6]

$$M_2:\ \begin{cases} K' = K + \mu \sin g \\ g' = g + 2\pi/(-K')^{3/2} \qquad \bmod (2\pi) \end{cases} \tag{2.4}$$

其中

由于

$$\det\left|\frac{\partial(K',g',\omega')}{\partial(K,g,\omega)}\right| = \det\left|\frac{\partial(K',g')}{\partial(K,g)}\right| = 1$$

因此M_3为M_2的保测度扩张．映射M_2有如下1周期解

$$\left.\begin{aligned} & g^* = 0,\ \pi \\ & K^* = -(1/m)^{2/3} \qquad m\text{为正整数} \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

在我们所取的时间单位下，主天体的运动周期为2π．当彗星能量等于K^*时，运动周期近似为$2m\pi$．因此有$m/1$共振发生．

令$\Theta = D(K',g')/D(K,g)$，则行列式的迹为

$$\mathrm{Trace}\,\Theta = 2 + 3\pi\mu \cos g/(-K)^{5/2} \tag{2.6}$$

当$|\mathrm{Trace}\,\Theta|_{(K^*,g^*)}$大于2时，其对应的1-周期解失稳[7]．因此我们有如下结论：对应于$g^*=0$，1-周期解为不稳定的双曲不动点；对应于$g^*=\pi$，仅当$K^* < -(3\pi\mu/4)^{2/5}$时对应的周期点为稳定椭圆型不动点．

三、一维不变流形的计算

令$(K(\omega),\ g(\omega))$为M_3的一维不变流形，则

$$\left.\begin{aligned} K(\omega') &= K(\omega) + \mu R(g(\omega),\ \omega) \\ g(\omega') &= g(\omega) + 2\pi/(-K(\omega'))^{3/2} \qquad \bmod (2\pi) \\ \omega' &= \omega + \mu[\alpha + \cos g(\omega)] \qquad \bmod (2\pi) \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

)式表示了一个函数方程，我们将其解展开为形式级数，

$$\left.\begin{aligned}&K(\omega)=K_0(\omega)+\mu K_1(\omega)+\mu^2K_2(\omega)+\cdots\\&g(\omega)=g_0(\omega)+\mu g_1(\omega)+\mu^2g_2(\omega)+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

将$K(\omega')$和$g(\omega')$在ω处展开并将(3.2)式代入得到

$$K(\omega')=K(\omega)+\mu\frac{dK_0}{d\omega}(\alpha+\cos g_0)+\mu^2\Big[\frac{dK_0}{d\omega}(-g_1\sin g_0)+\frac{dK_1}{d\omega}(\alpha+\cos g_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2K_0}{d\omega^2}(\alpha+\cos g_0)^2\Big]+\cdots\tag{3.3}$$

$$g(\omega')=g(\omega)+\mu\frac{dg_0}{d\omega}(\alpha+\cos g_0)+\mu^2\Big[-\frac{dg_0}{d\omega}(g_1\sin g_0)+\frac{dg_1}{d\omega}(\alpha+\cos g_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2g_0}{d\omega^2}(\alpha+\cos g_0)^2\Big]+\cdots\tag{3.4}$$

另外$2\pi/(-K')^{3/2}$可以展开为

$$2\pi/(-K')^{3/2}=\frac{2\pi}{(-K_0)^{3/2}}\Big\{1-\frac{3}{2}\Big(\frac{K_1+r_1}{K_0}\Big)\mu+\Big[\frac{15}{8}\Big(\frac{K_1+r_1}{K_0}\Big)^2-\frac{3}{2}\Big(\frac{K_2+r_2}{K_0}\Big)\Big]\mu^2+\cdots\Big\}\tag{3.5}$$

其中

$$r_1=\sin g_0+\rho\sin\omega\cos g_0$$

$$r_2=\cos g_0-\rho\sin\omega\sin g_0$$

将(3.3)、(3.4)、(3.5)式代入函数方程组(3.1)式并比较μ的同次幂系数得

μ^0次项

$$K_0(\omega)=-(1/m)^{2/3}\tag{3.6}$$

μ^1次项

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dK_0}{d\omega}(\alpha+\cos g_0)=r_1\\&\frac{dg_0}{d\omega}(\alpha+\cos g_0)=\frac{3\pi(K_1+r_1)}{(-K_0)^{5/2}}\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

解上式得

$$\left.\begin{aligned}&g_0(\omega)=\pi-\operatorname{arctg}(\rho\sin\omega)\\&K_1(\omega)=\frac{(-K_0)^{5/2}}{3\pi}[\alpha+\cos g_0(\omega)]\frac{dg_0(\omega)}{d\omega}\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

μ^2次项

$$\left.\begin{aligned}&g_1(\omega)=\frac{dK_1}{d\omega}(\alpha+\cos g_0)/(\cos g_0-\rho\sin\omega\sin g_0)\\&K_2(\omega)=\frac{(-K_0)^{5/2}}{3\pi}\Big\{-\frac{dg_0}{d\omega}g_1\sin g_0+\frac{dg_1}{d\omega}(\alpha+\cos g_0)\\&\qquad+\frac{1}{2}\frac{d^2g_0}{d\omega^2}(\alpha+\cos g_0)^2-\frac{15\pi}{4(-K_0)^{7/2}}(K_1+r_1)\Big\}-r_2\end{aligned}\right\}\tag{3.9}$$

……

以此类推，我们可以解出(K_3, g_2)，(K_4, g_3)，…，(K_{n+1}, g_n)，…。

在上面推导中的各阶导数有如下具体解析表达式：

$$dg_0/d\omega=-\rho\cos\omega/(1+\rho^2\sin^2\omega) \tag{3.10}$$

$$d^2g_0/d\omega^2=[\rho\sin\omega+\rho^3\sin\omega(1+\cos^2\omega)]/(1+\rho^2\sin^2\omega)^2 \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}d^3g_0/d\omega^3=&[\rho\cos\omega+\rho^3(\cos\omega+\cos^3\omega-2\cos\omega\sin^2\omega)](1+\rho^2\sin^2\omega)^2\\&-4\rho^2\sin\omega\cos\omega[\rho\sin\omega+\rho^3\sin\omega(1+\cos^2\omega)]/(1+\rho^2\sin^2\omega)^3\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\frac{dK_1}{d\omega}=\frac{(-K_0)^{5/2}}{3\pi}\left[(-\sin g_0)\left(\frac{dg_0}{d\omega}\right)^2+(\alpha+\cos g_0)\frac{d^2g_0}{d\omega^2}\right] \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2K_1}{d\omega^2}=&\frac{(-K_0)^{5/2}}{3\pi}\left\{(-\cos g_0)\left(\frac{dg_0}{d\omega}\right)^3-3\sin g_0\frac{dg_0}{d\omega}\ \frac{d^2g_0}{d\omega^2}\right.\\&\left.+(\alpha+\cos g_0)\frac{d^3g_0}{d\omega^3}\right\}\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{dg_1}{d\omega}=&-\frac{d^2K_1}{d\omega^2}(\alpha+\cos g_0)(1+\rho^2\sin^2\omega)^{-1/2}\\&+\frac{dK_1}{d\omega}\ \frac{dg_0}{d\omega}\sin g_0(1+\rho^2\sin^2\omega)^{-1/2}\\&+\frac{dK_1}{d\omega}(\alpha+\cos g_0)\rho^2\sin\omega\cos\omega(1+\rho^2\sin^2\omega)^{-3/2}\end{aligned} \tag{3.15}$$

上述级数展开方法可给出M_3系统的一维不变流形任意精确度的解析解。

当$\rho=0$时，$m/1$共振带中心为$(g=\pi, K=-(1/m)^{2/3})$。随着ρ的增大，共振带中心发生漂移。由上面不变曲线的解析表达式知，共振中心在g方向漂移量一般为$o(1)$量级，其最大值取在$\omega=\pi/2$，$3\pi/2$处；共振中心在能量K方向的漂移量为$o(\mu)$量级，其最大值取在$\omega=0$，π处。有趣的是参数α也影响着共振中心的漂移。这个结果可通过分析(g_1, K_1)的表达式得到。我们发现随参数α增大，共振带中心在能量K和相角g方向上漂移增大；相同的α值，1/1共振带中心漂移量最大，随共振比增大，漂移量减少。

四、二维不变流形的计算

我们知道三维保测度映射中一维不变流形的邻域一定存在二维不变流形[2]。由于离散的映射系统与连续的微分方程系统有一定的对应关系。因此上述二维不变流形就对应于连续系统的局部不变积分。

设$K=K(g, \omega, \mu)$是上述不变曲线邻域的二维不变环面，由于μ是小参数，因此我们可把$K(g, \omega, \mu)$展开为μ的幂级数。但这样却得不到任何有用的结果。在文[8]中我们讨论了$m/1$型共振带的半宽，发现其为$o(\mu^{1/2})$量级，这就提示我们把$K(g, \omega, \mu)$展开为$\mu^{1/2}$的级数

$$K(g, \omega, \mu)=K_0(g, \omega)+\mu^{1/2}K_1(g, \omega)+\mu K_2(g, \omega)+\cdots \tag{4.1}$$

由定义，$K(g, \omega, \mu)$应满足如下函数方程，

$$K(g', \omega', \mu)=K(g, \omega, \mu)+\mu R(g, \omega) \tag{4.2}$$

将(2.2)与(4.1)式代入方程(4.2)并比较两边同阶项系数得：

μ^0次项

$$K_0(g,\ \omega)=-(1/m)^{2/3} \tag{4.3}$$

$\mu^{1/2}$次项

$$\frac{3\pi}{(-K_0)^{5/2}}K_1\frac{\partial K_0}{\partial g}+K_1\left(g+\frac{2\pi}{(-K_0)^{3/2}},\ \omega\right)=K_1(g,\ \omega) \tag{4.4}$$

由于（4.3）成立，因而不能提供任何新结果.

μ^1次项

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{3\pi}{(-K_0)^{5/2}}K_1\right]^2\frac{\partial^2 K_0}{\partial g^2}+\frac{\partial K_0}{\partial\omega}(a+\cos g)\right\}+\frac{3\pi K_1}{(-K_0)^{5/2}}\ \frac{\partial K_1}{\partial g}$$

$$+K_2\left(g+\frac{2\pi}{(-K_0)^{3/2}},\ \omega\right)=K_2(g,\ \omega)+R(g,\ \omega) \tag{4.5}$$

因此有

$$\frac{3\pi}{(-K_0)^{5/2}}K_1\frac{\partial K_1}{\partial g}=R(g,\ \omega) \tag{4.6}$$

积分上式可得

$$\frac{1}{2}K_1^2(g,\ \omega)=\frac{(-K_0)^{5/2}}{3\pi}(-\cos g+\rho\sin g\sin\omega)+U(\omega) \tag{4.7}$$

其中$U(\omega)$是一个待定函数.

我们做如下坐标变换

$$\pi\left\{\begin{array}{l}\bar{K}=K-K(\omega)\\ \bar{g}=g-g(\omega)\\ \bar{\omega}=\omega\end{array}\right. \tag{4.8}$$

其中$(K(\omega),\ g(\omega))$为不变曲线.

容易证明$\bar{M}_3=\pi M_3\pi^{-1}$是保测度的. 因而精确到$o(\mu)$阶$\bar{M}_3$在新坐标（$\bar{K}_1$, $\bar{g}$, ω)中也是保测度的，在新坐标下（4.7）近似为椭圆方程，

$$\frac{1}{2}\bar{K}_1^2+\frac{1}{2}q(\omega)\bar{g}^2=q(\omega)+U(\omega) \tag{4.9}$$

其中 $q(\omega)=(-K_0)^{5/2}\sqrt{1+\rho^2\sin^2\omega}/3\pi$

椭圆面积为

$$A(\omega)=2\pi[1+U(\omega)/q(\omega)]\sqrt{q(\omega)} \tag{4.10}$$

在不变曲线邻域近似有切映射

$$\left.\begin{array}{l}\delta\omega'=\left[1+\dfrac{(-K_0)^{5/2}}{3\pi}\ \dfrac{q'(\omega)}{q^2(\omega)}\mu\right]\delta\omega\\ q'(\omega)=\dfrac{dq(\omega)}{d\omega}\end{array}\right\} \tag{4.11}$$

由于$\bar{M}_3$系统是保测度的，满足$A(\omega')\delta\omega'=A(\omega)\delta\omega$.因此待定函数$U(\omega)$的表达式为

$$U(\omega)=cq^{3/2}(\omega)/[aq(\omega)-(-K_0)^{5/2}/3\pi]-q(\omega) \tag{4.12}$$

其中c为积分常数.

有了不变环面的解析表达式，我们了解了其几何特性. 当参数a大于1，截面积$A(\omega)$在$\omega=0,\pi$和$\omega=\pi/2$, $3\pi/2$分别取最大最小值. 当参数$0<a<1$时，$A(\omega)$在$\omega=\pi/2$, $3\pi/2$和$\omega=0$, π分别取最大最小值. 最大面积与最小面积的比值为

$$A_{max}/A_{min}=(\alpha-1/\sqrt{1+\rho^2})/(\alpha-1) \qquad \alpha>1 \tag{4.13}$$

$$A_{max}/A_{min}=(1-\alpha)/(1/\sqrt{1+\rho^2}-\alpha) \qquad 0<\alpha<1 \tag{4.14}$$

我们发现对于不同的共振带，不变环面具有相似结构．有了上述分析，我们就完全掌握了不变曲线邻域内的二维不变环面的几何性态．

五、m/1共振带的稳定性

当偏心率参数ρ较小时，$m/1(m=1,2,\cdots,6)$共振带是稳定的．M_3系统具有(3.2)式和(4.1)式所表示的一维和二维不变流形．随着参数ρ的增大，外层不变环面依次破坏，最后当ρ超过某个临界参数ρ_c时，一维不变流形失稳，这也意味着相应的$m/1$共振带失稳．

由M_3映射的表达式及不变曲线表示式(3.2)，我们得到沿不变曲线

$$\Delta\omega=\omega'-\omega=\mu(\alpha-1/\sqrt{1+\rho^2\sin^2\omega})+o(\mu^2) \tag{5.1}$$

当 $\rho\geqslant\rho_c=\sqrt{1/\alpha^2-1}$，$\Delta\omega=0$就有如下解，

$$\omega^*=\beta,\ \pi+\beta,\ \pi-\beta,\ 2\pi-\beta \tag{5.2}$$

其中 $\beta=\arcsin\sqrt{1/\alpha^2-1}/\rho$

在这种情形下，容易证明 $(g^*=g(\omega^*),\ K^*=K(\omega^*),\ \omega^*)$为映射$M_3$系统的不稳定不动点．也就是说 $\rho\geqslant\rho_c=\sqrt{1/\alpha^2-1}$时，不变曲线退化为不稳定不动点．由（4.14）式，我们发现，当$\rho=\rho_c$时，A_{max}在$\omega^*=3\pi/2$趋于无穷大．这意味着在 $\omega=\omega^*$截面上有扩散现象产生．

另外还存在另一种失稳机制($\alpha>1$)．

沿不变曲线可以计算特征矩阵$\Theta=\partial(K',g')/\partial(K,g)$的迹

$$L=|\mathrm{Trace}\Theta|=\left|2+3\pi\mu\frac{\partial R(g,\omega)}{\partial g}\Big/(-K-\mu R(g,\omega))^{5/2}\right| \tag{5.3}$$

将不变曲线表达式（3.2）代入上述方程得

$$L(\omega)=|2-3\pi\mu m^{5/3}\sqrt{1+\rho^2\sin^2\omega}| \tag{5.4}$$

当迹大于2就产生不稳定，因而可以得到临界参数的表达式

$$\rho_c=\left[\left(\frac{4}{3\pi\mu m^{5/3}}\right)^2-1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.5}$$

我们知道Lyapunov特征指数（LCNs）是判断轨道是混沌的或是规则的一个指示器．如果轨道是规则的，所有特征指数为零；反之，最大特征指数大于零．一维不变曲线的失稳过程是轨道由规则变为混沌的过程[4]．根据映射M_3及其切映射TM_3的表达式，我们计算了$m/1(m=2,3,\cdots,6)$共振中心对应的轨道的Lyapunov特征指数，其叠代次数是10^5次．结果列于表1．我们的理论值与计算值相符较好．

表 1 ($\mu=0.01$, $\alpha=1.1$)

共振带	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1
计算值	13.4	6.5	4.3	2.7	1.8
理论值	13.3	6.7	4.1	2.7	1.9

不变曲线的形状说明了共振中心的漂移．由不变曲线的解析表达式我们知共振中心在能

量K方向以及相角g方向的漂移分别在$\omega=0$（或π）和$\omega=\pi/2$（或$3\pi/2$）处取极值。令其极值的绝对值分别为δK和δg，我们有

$$\delta K=\mu(\alpha-1)\rho/3\pi m^{5/3}+o(\mu^2) \tag{5.6}$$

$$\delta g=\mathrm{arctg}\rho+\mu\rho(\alpha-1/\sqrt{1+\rho^2})^2/(3\pi m^{5/3})(1+\rho^2)^{3/2}+o(\mu^2) \tag{5.7}$$

有意思的是参数α也影响着共振中心的漂移，这个现象在零阶近似所得到的不变曲线的表达式中是看不出来的。参数α增大，δK和δg也增大，这样势必影响到临界参数ρ_c。为了说明这个问题，我们以2/1共振情形为例，取μ等于0.01，利用LCNs方法来计算临界参数ρ_c随参数α的变化。结果列于表2。我们发现当α接近于1时，δK趋于零。此时，计算结果与(5.5)式所解出理论值相符甚好。当参数α逐渐增大，相应的共振中心在能量坐标方向漂移量δK增大，临界参数ρ_c减小并偏离我们理论值。

表 2 （$\mu=0.01$）

参数 α	1.1	2.0	3.0	3.5	4.0
临界参数ρ_c	13.4	13.4	11.1	8.5	6.7
δK	4.46×10^{-4}	4.79×10^{-3}	9.37×10^{-3}	8.93×10^{-3}	8.34×10^{-3}
δg	1.50	1.50	1.48	1.45	1.42

六、结 束 语

本文中，我们利用级数展开方法给出了$m/1$共振带对应的不变流形的解析表达式。根据这些解析表示式我们分析了一维和二维不变流形的几何特性。我们研究了$m/1$共振带的稳定性问题，得到了临界参数的理论估计。在$\alpha<1$时，不变曲线可能退化为不稳定的不动点。当α大于并接近1时，理论结果与通过LCNs方法所得数值结果相符较好。由于参数α增大使共振中心在能量方向漂移量增大，因而使共振带稳定性减弱，临界参数ρ_c减小并偏离理论值，这是容易理解的。而关于临界参数ρ_c对参数α的依赖关系则是一个有待研究的问题。

感谢孙义燧先生、陈式刚、周焕文先生审阅初稿并提出修改意见。

参 考 文 献

[1] Y.S. Sun, A perturbed extension of hyperbolic twist mappings, *Celest. Mech.*, 42 (1988), 369.

[2] C.Q.Cheng, et al., Existence of invariant tori in three-dimensional mapping, *Celest.Mech.*, 47 (1990), 275.

[3] 孙义燧，保测度映射的随机性，中国科学A辑，(10) (1983), 923.

[4] Liu Jie, et al., Chaotic motion of comets with near-parabolic orbit, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 60 (1994), 3.

[5] 张天岭等，Couette-Taylor流中保测度映射，中国科学A辑，(5) (1987), 517.

[6] T.Y. Petrosky, Chaos and cometary clouds in the solar system, *Physics Letters A*. 11(7) (1986), 383—385.

[7] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motions*, Springer-Verlag (1983).

[8] Liu Jie, Stability of resonant zones in a three-dimensional measure-preserving mapping system, *Proceeding of International Conference on Nonlinear Mech.*, Peking University Press (1993).

Invariant Manifolds and Their Stability in a Three-Dimensional Measure-Preserving Mapping System

Liu Jie

(Center for Nonlinear Studies, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, *P.R.China)*

Abstract

In the paper researches on a three-dimensional measure-preserving mapping system are made, which is the three-dimensional extension of the Keplerian mapping. With the the formal series method the expressions of the invariant curves and invariant tori are obtained. Finally the stability of these invariant manifolds is also discussed.

Key words measure-preserving mapping, chaos, invariant manifold, stability