

II型平面应力裂纹线场的弹塑性精确解

易志坚 王士杰 王向坚

(重庆交通学院桥梁系, 重庆 630074)

(吴承平推荐, 1995年2月5日收到)

摘 要

本文采用线场分析方法对理想弹塑性II型平面应力裂纹裂纹线附近的应力场及弹塑性边界进行了精确分析。本文完全放弃了小范围屈服条件, 探讨了弹塑性边界上弹塑性应力场匹配条件的正确提法, 通过将裂纹线附近塑性区应力场的通解(而不是过去采用的特解)与弹性应力场的精确解(而不是通常的裂尖应力强度因子 K 场)在裂纹线附近的弹塑性边界上匹配, 本文得出了塑性区应力场, 塑性区长度及弹塑性边界的单位法向量在裂纹线附近的足够精确的表达式。

关键词 II型裂纹 线场分析方法 裂纹线 弹塑性边界 匹配条件

一、引 言

用线场分析方法分析裂纹体弹塑性场的早期工作由 Achenbach 等人^{[1],[2]}及郭全信等人^[3]给出。作者在文[4]~[6]中对线场分析方法进行了进一步研究。但是, 真正全新意义下的线场分析方法是由作者[7]、[8]的工作提出。在文[7]、[8]中, 作者从根本上突破了通常不得不采用的小范围屈服条件的限制, 通过在裂纹线附近求得塑性场的通解(而不是通常采用的特解), 使之与裂纹弹性场的精确解(而不是通常的裂尖弹性奇异 K 场)在裂纹线附近的弹塑性边界上匹配, 求得了理想弹塑性II型静止裂纹及III型准静态扩展裂纹裂纹线附近足够精确的解答。文[7]、[8]的分析表明, 小范围屈服条件的近似假定之一, 即裂尖塑性区的存在使弹性场虚拟地向前移动了一距离这一假定是由于不恰当地选用了塑性场的一特解造成的。由于文[7]、[8]从根本上放弃了小范围屈服条件, 即不再假定塑性区的存在使裂纹的弹性场沿裂纹线虚拟地移动一距离, 且不再假定塑性区外的弹性场为裂尖弹性奇异 K 场而是选用裂纹弹性场的精确解, 因而文[7]、[8]的解答不仅适用于塑性区足够小的情形, 而且适用于塑性区不断增大的情形。

本文将采用由文[7]、[8]提出的全新意义下的线场分析方法对理想弹塑性II型平面应力裂纹无限板进行分析。通过在裂纹线附近求得塑性区应力场的通解, 使之与含裂纹无限板弹性应力场的精确解在裂纹线附近弹塑性边界上匹配, 从而求得了裂纹线附近塑性区应力场、塑性区长度及弹塑性边界单位法向量的足够精确的解答。本文探讨了弹塑性边界上匹配条件的正确提法, 指出了以前匹配条件提法上的错误。结果表明, 由于在弹塑性边界附近存在 σ_{xx} (沿弹塑性边界切线方向的正应力)的间断, 因而弹性应力场在偏离裂纹线一定范围

后不再满足屈服条件。由于本文完全放弃了小范围屈服假定，且不再附加任何其它的近似假定，因而其结果不仅适用于塑性区足够小的情形，而且适用于塑性区不断增大的情形。

二、裂纹线附近的弹塑性应力场及弹塑性边界

对图1所示的理想弹塑性Ⅱ型平面应力裂纹，不为零的应力分量为 σ_x 、 σ_y 及 σ_{xy} ，平衡微分方程及屈服条件分别为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.1a, b)$$

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_{xy}^2 = 3k^2 \quad (2.2)$$

式中 k 为剪切屈服极限。

2.1 裂纹线附近塑性应力场的通解

在裂纹线附近，塑性区的应力场可按小 y 的幂级数展为($y/x \ll 1$)

$$\sigma_x = p_1(x)y + O(y^3) \quad (2.3a)$$

$$\sigma_y = q_1(x)y + O(y^3) \quad (2.3b)$$

$$\sigma_{xy} = s_0(x) + s_2(x)y^2 + O(y^4) \quad (2.3c)$$

这里我们已经考虑了 σ_x 、 σ_y 关于 $y=0$ 的反对称性及 σ_{xy} 关于 $y=0$ 的对称性。由于仅考虑裂纹线附近的量，展开式(2.3)中我们已略去 y^3 以上微量级的项。

将(2.3a, b, c)代入式(2.1a, b)及(2.2)，比较等式两端 y 的同次幂系数得

$$\frac{dp_1}{dx} + 2s_2 = 0, \quad \frac{ds_0}{dx} + q_1 = 0 \quad (2.4a, b)$$

$$3s^2 = 3k^2 \quad (2.5)$$

$$p_1^2 + q_1^2 - p_1 q_1 + 6s_0 s_2 = 0 \quad (2.6)$$

通过方程(2.4a, b)、(2.5)、(2.6)可解得 $s_0(x)$ 、 $p_1(x)$ 、 $q_1(x)$ 及 $s_2(x)$ ，然后代入式(2.3a, b, c)得

$$\sigma_x = -3k \frac{1}{x+L} y + O(y^3) \quad (2.7a)$$

$$\sigma_y = 0 + O(y^3) \quad (2.7b)$$

$$\sigma_{xy} = k - \frac{3k}{2} \frac{1}{(x+L)^2} y^2 + O(y^4) \quad (2.7c)$$

式中 L 为积分常数，将由裂纹线附近弹塑性边界上的匹配条件定出。

式(2.7a, b, c)即为裂纹线附近塑性区应力场的通解。

这里必须指出，塑性区应力场的全场解的通解需求解偏微分方程(2.1a, b)及(2.2)，这样的通解很难求得。但在裂纹线附近，求解偏微分方程(2.1a, b)、(2.2)的问题已转化为求解常微分方程(2.4a, b)~(2.6)，因而通解(2.7a, b, c)很容易求得。

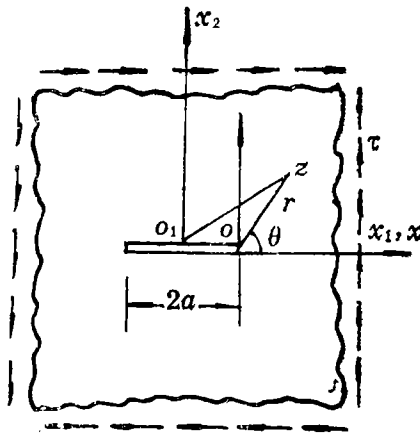


图1 Ⅱ型中心裂纹无限板

作者在文[7]、[8]中对 III 型裂纹的分析表明, 如果选用特解, 就不得不作出塑性区的存在使弹性场虚拟地向前移动一距离这一小范围屈服理论的近似假定。由于特解中不含待定积分常数 L , 以致匹配时未知量数目少于方程数目。为了补充未知量数目, 以前的分析便作了弹性场向前移动了一距离 x_0 这一假定。文[7]的分析表明, 随着外载的增加, x_0 往往大到无法接受的程度。

2.2 裂纹线附近弹性应力场的精确解

小范围屈服理论认为, 裂尖塑性区很小, 塑性区之外的弹性应力场为通常的裂尖弹性奇异 K 场。显然, 小范围屈服理论这一假定只在塑性区足够小的情况下成立, 但是随着外载的增加, 塑性区会逐渐变大, 当塑性区增大到一定程度后, 小范围屈服理论的这一假定便不再成立。

本文不再选用 K 场作为塑性区之外的弹性应力场, 而是直接将弹性应力场的精确解展开到裂纹线附近与塑性应力场匹配, 其结果便不再受屈服范围大小的限制。

对图1所示 I 型裂纹无限板, 采用复变函数方法, 选取 Westergaard 应力函数

$$Z_I(z) = \frac{\tau z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2.8)$$

则应力分量为

$$\sigma_x = 2\operatorname{Im}Z_I(z) + y\operatorname{Re}Z_I'(z) \quad (2.9a)$$

$$\sigma_y = -y\operatorname{Re}Z_I'(z) \quad (2.9b)$$

$$\sigma_{xy} = \operatorname{Re}Z_I(z) - y\operatorname{Im}Z_I'(z) \quad (2.9c)$$

式中 $Z_I'(z) = dZ_I(z)/dz$, $z = x_1 + ix_2$ ($i = \sqrt{-1}$)。将坐标变换到以裂尖为原点的极坐标下 (令 $z = a + re^{i\theta}$), 将 (2.9a, b, c) 按 $r \rightarrow 0$ 展开到裂尖附近即得通常的应力强度因子 K 奇异场。这里我们不再将 (2.9a, b, c) 按 $r \rightarrow 0$ 展开, 而是按 $\theta \rightarrow 0$ 展开。

将 (2.9a, b, c) 在裂纹线附近按小 θ 的幂级数展开得

$$\sigma_x = -\frac{\tau}{\sqrt{r(2a+r)}} \cdot \frac{3a^2}{2a+r} \theta + O(\theta^3) \quad (2.10a)$$

$$\sigma_y = \frac{\tau}{\sqrt{r(2a+r)}} \cdot \frac{a^2}{2a+r} \theta + O(\theta^3) \quad (2.10b)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\tau}{\sqrt{r(2a+r)}} \left[(a+r) - \frac{8a^2r + 7a^3}{2(2a+r)^2} \theta^2 \right] + O(\theta^4) \quad (2.10c)$$

由于式 (2.9a, b, c) 为含裂纹无限板满足裂纹面边界条件及远场边界条件的精确解, 其在裂纹线附近的展式 (2.10a, b, c) 在 $r \rightarrow 0$ 到 $r \rightarrow \infty$ 的邻域精确。

裂纹线附近弹性应力场的精确解 (2.10a, b, c) 将在弹塑性边界上与塑性应力场的通解 (2.7a, b, c) 进行匹配。

2.3 裂纹线附近的弹塑性边界

如图2所示, 裂纹线附近的弹塑性边界定义为 $r = r_p(\theta)$, 由 $r_p(\theta)$ 关于裂纹线 $\theta = 0$ 的对称性, 对于一个小 θ , 有

$$r_p(\theta) = r_0 + r_2\theta^2 + O(\theta^4) \quad (2.11)$$

由此可得弹塑性边界上任一点的单位法向

量 $n = (n_x, n_y)$ 为

$$n_x = 1 - B_1^2\theta^2/2 + O(\theta^4) \quad (2.12a)$$

$$n_y = B_1\theta + O(\theta^3) \quad (2.12b)$$

其中

$$B_1 = 1 - 2r_2/r_0 \quad (2.13)$$

式 (2.11)~(2.13) 中 r_0 为沿裂纹线塑性区的长度, r_0, r_2 将由匹配条件定出。

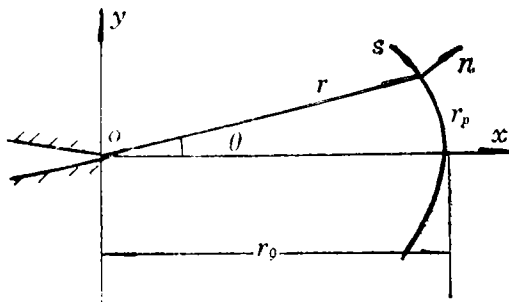


图2 裂纹线附近的弹塑性边界

三、弹塑性边界上匹配条件的提法

由于本文仅求解裂纹线附近应力场及弹塑性边界尺寸及单位法向量, 因此这里只考察弹塑性边界上应力的匹配条件。

在图2所示弹塑性边界上的 n, s 坐标系中, $\sigma_{nn}^p, \sigma_{ss}^p, \sigma_{ns}^p$ 分别表示塑性区应力在弹塑性边界上任一点沿法线、切线方向的正应力及沿切线方向量的剪应力, $\sigma_{nn}^e, \sigma_{ss}^e, \sigma_{ns}^e$ 分别表示弹性区应力在弹塑性边界上相应点的正应力及剪应力。

在弹塑性边界上应力必须连续, 即

$$\sigma_{nn}^p = \sigma_{nn}^e, \quad \sigma_{ns}^p = \sigma_{ns}^e \quad (3.1a, b)$$

此式称为应力连续条件, 在弹塑性应力匹配时必须满足。

下面再考察弹塑性边界上弹性区应力 $\sigma_{nn}^e, \sigma_{ss}^e, \sigma_{ns}^e$ 是否满足屈服条件。

在弹塑性边界上, 塑性区应力 $\sigma_{nn}^p, \sigma_{ss}^p, \sigma_{ns}^p$ 应满足屈服条件 (2.2), 即

$$(\sigma_{nn}^p)^2 + (\sigma_{ss}^p)^2 - \sigma_{nn}^p \cdot \sigma_{ss}^p + 3(\sigma_{ns}^p)^2 = 3k^2 \quad (3.2)$$

由于在弹塑性边界上 $\sigma_{nn}^p = \sigma_{nn}^e, \sigma_{ns}^p = \sigma_{ns}^e$, 如果 $\sigma_{ss}^p = \sigma_{ss}^e$, 则弹性区应力 $\sigma_{nn}^e, \sigma_{ss}^e, \sigma_{ns}^e$ 必然也满足屈服条件。

但是, 如果 $\sigma_{ss}^p \neq \sigma_{ss}^e$, 则弹性区应力 $\sigma_{nn}^e, \sigma_{ss}^e, \sigma_{ns}^e$ 在弹塑性边界上不满足屈服条件。

应力分量 σ_{nn}, σ_{ns} 必须连续, 但 σ_{ss} 却并不要求一定连续, 因为 σ_{ss} 在分界面上的间断是可能的。在塑性极限平衡理论中就有 σ_{ss} 间断的例子 (例如在梁的中性轴两侧, 一侧的 σ_{ss} 为拉伸屈服极限, 另一侧为压缩屈服极限)。

容易推知, 如果弹性区应力在弹塑性边界上不满足屈服条件, 则说明 σ_{ss} 在弹塑性边界两侧有间断, 如果弹性区应力满足屈服条件, 则 σ_{ss} 在弹塑性边界两侧连续 (当 $\sigma_{nn}^p = \sigma_{nn}^e \neq \sigma_{ss}^p + \sigma_{ss}^e$ 时)。

综上所述, 当弹性区应力与塑性区应力在弹塑性边界上匹配时, 应力的连续条件 (3.1a, b) 式必须满足。但由于 σ_{ss} 可能存在间断, 弹性区应力在弹塑性边界上不要求满足屈服条件。弹性区应力在弹塑性边界上满足屈服条件否可作为检验边界上 σ_{ss} 是否连续的条件。

四、裂纹线附近弹塑性边界上的匹配结果

在裂纹线附近的弹塑性边界上

$$x=r, \cos\theta=r_0+r_0\left(\frac{r_2}{r_0}-\frac{1}{2}\right)\theta^2+O(\theta^4) \quad (4.1a)$$

$$y=r, \sin\theta=r_0\theta+O(\theta^3) \quad (4.1b)$$

这里已利用了式 (2.11)。

将 (4.1a, b) 代入 (2.7a, b, c) 可得塑性区应力在弹塑性边界上的表达式为

$$\sigma_x^p = -3k \frac{r_0}{r_0+L} \theta + O(\theta^3) \quad (4.2a)$$

$$\sigma_y^p = 0 + O(\theta^3) \quad (4.2b)$$

$$\sigma_{xy}^p = k - \frac{3k}{2} \frac{r_0^2}{(r_0+L)^2} \theta^2 + O(\theta^4) \quad (4.2c)$$

将式 (2.11) 代入 (2.10a, b, c) 可得弹性区应力在弹塑性边界上的表达式为

$$\sigma_x^e = -\frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \frac{3a^2}{2a+r_0} \theta + O(\theta^3) \quad (4.3a)$$

$$\sigma_y^e = \frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \frac{a^2}{2a+r_0} \theta + O(\theta^3) \quad (4.3b)$$

$$\sigma_{xy}^e = \frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \left\{ (a+r_0) + \left[-\frac{r_2}{r_0} \frac{a^2}{2a+r_0} - \frac{8a^2r_0+7a^3}{2(2a+r_0)^2} \right] \theta^2 \right\} + O(\theta^4) \quad (4.3c)$$

在弹塑性边界上, 应力的法向及切向分量分别为

$$\sigma_{nn} = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + 2\sigma_{xy} n_x n_y \quad (4.4a)$$

$$\sigma_{ns} = (n_x^2 - n_y^2) \sigma_{xy} + (\sigma_y - \sigma_x) n_x n_y \quad (4.4b)$$

将 (4.2a, b, c) 及 (2.12) 代入 (4.4a, b) 可得弹塑性边界上的 σ_{nn}^p 及 σ_{ns}^p , 将 (4.3a, b, c) 及 (2.12) 代入 (4.4a, b) 可得弹性区边界上的 σ_{nn}^e 及 σ_{ns}^e , 根据应力的匹配条件 (3.1a, b), 即由弹塑性边界上 σ_{nn} 及 σ_{ns} 的连续性, 比较 θ 的同次幂 $\theta^0, \theta^1, \theta^2$ 的系数并化简得

$$\frac{\tau(a+r_0)}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} = k \quad (4.5)$$

$$\frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \frac{a^2}{2a+r_0} = k \frac{r_0}{r_0+L} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \left[-\frac{r_2}{r_0} \frac{a^2}{2a+r_0} - \frac{8a^2r_0+7a^3}{2(2a+r_0)^2} + \frac{4a^2}{2a+r_0} B_1 \right] \\ & = -\frac{3k}{2} \frac{r_0^2}{(r_0+L)^2} + 3kB_1 \cdot \frac{r_0}{r_0+L} \end{aligned} \quad (4.7)$$

求解方程 (4.5) ~ (4.7) 得

$$r_0 = a \left(\sqrt{\frac{k^2}{k^2 - \tau^2}} - 1 \right) \quad (4.8)$$

$$L = a \left[\frac{2\tau^2 - k^2}{k^2 - \tau^2} \sqrt{\frac{k^2}{k^2 - \tau^2}} + 1 \right] \quad (4.9)$$

$$\frac{r_2}{r_0} = -\frac{k^2}{\tau^2} + \frac{2k^2 + \tau^2}{2\tau^2} \sqrt{\frac{k^2 - \tau^2}{k^2}} \quad (4.10)$$

本文的 r_0 与 L 与文 [7]、[8] 的相应结果完全相同, 但 r_2/r_0 不同, r_0 为裂纹线上塑性区的长度。将 L 代入式 (2.7a, b, c) 即得裂纹线附近塑性区的应力场。将 r_2/r_0 代入式 (2.12a, b) 即可得裂纹线附近弹塑性边界的单位法向量。

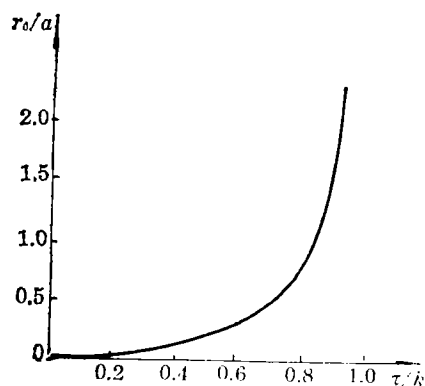
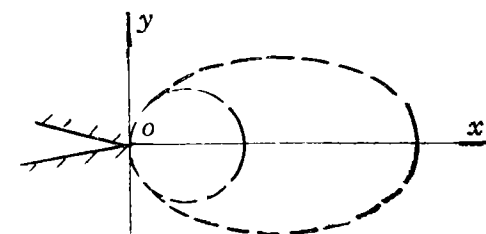
图3 r_0/a 随 τ/k 的变化曲线

图4 弹性边界的变化

将(2.10a,b,c)代入屈服条件(2.2)检验知,零次幂 θ^0 项满足,但二次幂 θ^2 项已不满足,说明在无限接近于裂纹线附近, σ_{ss} 连续,但在偏离裂纹线一定范围后, σ_{ss} 已存在间断。

图3是 r_0/a 随 τ/k 的变化曲线,曲线表明,随着 τ 的增大, r_0 (塑性区长度)逐渐增大,当 τ 增大到接近屈服极限 k 时,即 $\tau \rightarrow k$, $r_0 \rightarrow \infty$,即整个裂纹线屈服。

将(4.10)式代入(2.12a,b)可得裂纹线附近弹塑性边界单位法向量的变化情况,由此可推测塑性区形状随 τ 的变化趋势,如图4示。当 $\tau \rightarrow 0$ 时,塑性区形状近似一圆形,随着 τ 的不断增大,塑性区形状逐渐变为扁圆形。

以上分析完全放弃了小范围屈服的近似假定,且未附加任何其它近似假定,因而其结果在裂纹线附近是足够精确的。

尽管本文没考虑 θ^3 (或 y^3)以上项的匹配,但按本文的方法可以一直匹配到 θ (或 y)的任意次幂项。读者可以验证:匹配时 θ (或 y)的幂次每增加一阶,则匹配方程增加一个,而未知量个数也正好增加一个。比如每对 θ (或 y)的更高阶奇次幂项匹配时,塑性区通解中便增加一积分常数,而对 θ (或 y)的更高阶偶次幂匹配时, $r_p(\theta)$ 表达式中便增加一系数。方程数始终与未知数相等,因而对Ⅰ型平面应力裂纹,理论上可一直匹配到 θ (或 y)的任意次幂项。

线场分析方法的早期工作中,由于将弹性场在弹塑性边界上满足屈服条件作为一匹配条件(这相当于强行假定 σ_{ss} 在弹塑性边界上连续),从而得出了裂尖弹性奇异 K 场不能同塑性场匹配的结论,这是不恰当的。比如文[3]在小范围屈服条件下对本文研究的Ⅰ型平面应力裂纹进行了探讨,发现在对 θ^3 以上项匹配时, K 场在弹塑性边界上已不满足屈服条件,从而不恰当地选用了一钝口场作为弹性场,使得结果较 K 场匹配的结果大为改变。钝口场虽然在 θ^2 项满足了屈服条件,但 θ^4 以上项匹配仍不满足,为了使 θ^4 项满足屈服条件,重新选择的弹性场又可能使匹配结果大为改变(此时 θ^0 以上项满足屈服条件否又难以保证)。实际上,在 σ_{ss} 存在间断的情况下,弹性应力场在弹塑性边界上已不满足屈服条件,在这种情况下将屈服条件作为一匹配条件必然导致错误的结果。

五、结 论

通过以上分析,可得如下结论:

(i) 由于本文的结果是在完全放弃了小范围屈服条件且未附加任何近似假定的情况下严格分析得出的,因而其在裂纹线附近足够精确。

(ii) 弹塑性边界上, 应力分量 σ_{nn} 及 σ_{ns} 的连续条件必须满足。对平面应力问题, 由于存在 σ_{ss} 间断的可能, 弹性应力场在弹塑性边界上不一定满足屈服条件。本文的匹配结果表明, 对理想弹塑性I型平面应力裂纹, 在偏离裂纹线一定范围后, 弹性区应力在弹塑性边界上已不满足屈服条件, 说明在偏离裂纹线一定范围后, 弹塑性边界上 σ_{ss} 已存在间断。

(iii) 线场分析方法的早期工作, 将弹性应力场在弹塑性边界上满足屈服条件作为一匹配条件, 这相当于强行假定 σ_{ss} 在弹塑性边界上连续, 这是不恰当的。

(iv) 对理想弹塑性I型平面应力裂纹, 本文虽仅对 θ 的二次幂以下项进行了匹配, 但理论上可以一直匹配到 θ 的任何幂次项且得唯一结果。

参 考 文 献

- [1] J. D. Achenbach and V. Dunayevsky, Crack growth under plane stress condition in an elastic-perfectly plastic material, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **32** (1984), 89—100.
- [2] J. D. Achenbach and Z. L. Li, Plane stress crack line fields for crack growth in an elastic-perfectly plastic material, *Engineering Fracture Mechanics*, **20** (1984), 535—544.
- [3] Guo Quanxin and Li Kerong, The dimension of plastic zone ahead of a mode I plane stress crack, *Engineering Fracture Mechanics*, **29** (1988), 107—112.
- [4] Yi Zhijian, The near crack line solutions for plane stress tensile crack growth in an elastic-perfectly plastic material, *Engineering Fracture Mechanics*, **42** (1992), 169—176.
- [5] Yi Zhijian, The more precise crack line analyses for antiplane quasistatically propagating crack, *International Journal of Fracture*, **55** (1992), R9—12.
- [6] Yi Zhijian, The new and analytical solutions for mode III cracks in an elastic-perfectly plastic material, *Engineering Fracture Mechanics*, **42** (1992), 833—840.
- [7] Yi Zhijian, The most recent solutions of near crack line fields for mode III cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, **47** (1994), 147—155.
- [8] 易志坚, 理想弹塑性III型扩展裂纹的全新和精确分析, *应用数学和力学*, **14**(4) (1993), 327—333.

The Exact Solutions of Elastic-Plastic Crack Line Field for Mode III Plane Stress Crack

Yi Zhijian Wang Shijie Wang Xiangjian

(Bridge and Structure Department, Chongqing Jiaotong Institute,
Chongqing, Sichuan 630074, P. R. China)

Abstract

The near crack line field analysis method has been used to investigate into the exact elastic-plastic solutions of a mode III crack under plane stress condition in an elastic-perfectly plastic solid. The assumptions of the usual small

scale yielding theory have been completely abandoned and the correct formulations of matching conditions at the elastic-plastic boundary have been given. By matching the general solution of the plastic stress field (but not the special solution used to be adopted) with the exact elastic stress field (but not the crack tip K -dominant field) at the elastic-plastic boundary near the crack line, the plastic stresses, the length of the plastic zone and the unit normal vector of the elastic-plastic boundary, which are sufficiently precise near the crack line region, have been given.

Key words mode I crack, near crack line analysis method, crack line, elastic-plastic boundary, matching conditions