应用数学和力学，第16卷 第9期（1995年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

向量丛动力系统研究注记（Ⅰ）

廖 山 涛

（北京大学数学系，北京大学数学研究所，北京 100871）

（1994年12月4日收到）

摘 要

本文是以前一文的延续，仍着重讨论向量丛底空间上的动力系统与各个相配标架丛上动力系统之间的关系。

关键词 向量丛 标架丛 Grassmann丛 遍历性 Borel划分

一、引言，记号

本文所指的向量丛动力系统（或者在一些文献中也被称作线性斜积流）的研究对一部份数学的理论和应用都有重要意义。这在文献[1]中已相当充分地谈到。或许不同于别处的是，我们采用的方式比较着重于从底空间上的动力系统与各个相配标架丛上的动力系统之间的关系的探讨。

现在这工作是[2]的延续，主要结果叙述并证明在后面诸节中。仍如同[2]中，考虑一个以紧致可度量空间W为底，秩为有限维n及$x\in W$处的纤维为E_x的向量丛

$$K=\bigcup_{x\in W}E_x$$

并设此丛有纤维上的内积。对一整数$p\in\langle 1,n\rangle$构造与此丛相配的正交标架丛$\mathscr{F}_p(K)$，正规标架丛$\mathscr{F}_p^{\#}(K)$及Grassmann丛$\mathscr{L}_p(K)$同[2，pp.232—233]中。在设W和 K 分别有单参变换群

$$\varphi_t:W\to W,\ \Phi_t:K\to K\qquad(-\infty<t<\infty)$$

满足相容条件$\sigma\Phi_t=\varphi_t\sigma$对所有$t\in(-\infty,\infty)$，其中

$$\sigma:K\to W$$

表丛投射，且使得在E_x上Φ_t是到 E_y 的线性映射对于 $y=\varphi_t(x)$，对所有的 $t\in(-\infty,\infty)$ 及$x\in W$。于是$\Phi_t(-\infty<t<\infty)$以自然方式分别导出单参变换群

$$\psi_t:\mathscr{F}_p(K)\to\mathscr{F}_p(K),\quad \chi_t^{\#}:\mathscr{F}_p^{\#}(K)\to\mathscr{F}_p^{\#}(K),$$

$$\varphi_t:\mathscr{L}_p(K)\to\mathscr{L}_p(K)\qquad(-\infty<t<\infty).$$

我们还要求$\chi_t(-\infty<t<\infty)$满足

条件(*) 对$q\in\langle 1,n\rangle$及每一$k=1,2,\cdots,q$，标架$\chi_t(\gamma)\in\mathscr{F}_q(K)$中第$k$个向量 $\mathrm{proj}_k\chi_t(\gamma)$的长度函数$\|\mathrm{proj}_k\chi_t(\gamma)\|$对$t$可微且

$$\omega_k(\gamma,K)=\frac{d\|\mathrm{proj}_k\chi_t(\gamma)\|}{dt}\Big|_{t=0}$$

是$\gamma\in\mathscr{F}_q(K)$的连续函数。

这些都同[2.pp 283—284]中。关于这些在微分动力系统中的背景可参考[2]。

我们仍需要用下面的一些记号：每一$\chi\in W$处的每一$\gamma\in\mathscr{F}^{*}_{\alpha}(K)$所张的$E_x$中$p$维子线性空记作$H(\gamma)$。$E_x$中任一$p$维子线性空间$H$所代表$\mathscr{L}_p(K)$中的点将记作$[H]$。于是$\gamma\mapsto[H(\gamma)]$给出一映射

$$\xi:\mathscr{F}^{*}_{p}(K)\to\mathscr{L}_p(K). \tag{1.1}$$

对任给的整数$m\in\langle 1,p\rangle$记

$$J(m)=数列集\{\lambda(m)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\mid\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_m\},$$

$$Q(m)=正整数列集\{q(m)=(q_1,q_2,\cdots,q_m)\mid q_1+q_2+\cdots+q_m=q\}.$$

任取定一叙列的数$\{T_i\}$使满足

$$T_1\geqq 1,\ T_{i+1}=2T_i\qquad(i=1,2,3,\cdots) \tag{1.2}$$

于是对$\lambda\in(-\infty,\infty)$及整数$q\in\langle 1,p\rangle$命

$$\Lambda(\lambda,q)=\Big\{\gamma\in\mathscr{F}^{*}_{p}(K)\ \Big|\ \overline{\lim_{i\to\infty}}\Big(\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\ \frac{1}{\tau}\sum_{j=0}^{\tau-1}\mathrm{Max}_{k=1,2,\dots,q}$$

$$\Big|\lambda-\frac{1}{\delta T_i}\int_{j\delta T_i}^{(j+1)\delta T_i}\omega_k(\chi^{*}_t(\gamma),K)\,dt\Big|\Big)=0,\ \ \delta=\pm1\Big\}. \tag{1.3}$$

易验证$\Lambda(\lambda,q)$的确定与满足(1.2)的数叙列的选取无关。对整数$m\in\langle 1,p\rangle$及$\lambda(m)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\in J(m)$，$q(m)=(q_1,q_2,\cdots,q_m)\in Q(m)$命

$$\Gamma(\lambda(m),q(m))=\{[H]\in\mathscr{L}_p(K)\mid 存在\gamma_j\in\Lambda(\lambda_j,q_j)$$

$$使得H(\gamma_j)\subset H,\ j=1,2\cdots,m\}.$$

最后记

$$\Gamma_p(K)=\bigcup\nolimits_{\lambda(m)\in J(m),\,q(m)\in Q(m),\,m=1,2,\dots,p}\Gamma(\lambda(m),q(m)).$$

我们在[2]中证明了：$\Gamma_p(K)$满足就$\mathscr{L}_p(K)$上的单参变换群$\varphi_t(-\infty<t<\infty)$来说的，Oseledec乘法遍历定理中所需的Borel集的要求，即

定理 $\mathscr{L}_p(K)$的子集$\Gamma_p(K)$是一个φ_t-不变的 Borel 子集，具有全测度，且在每一点$[H]\in\Gamma_p(K)$处，φ_t都是规则的。

这个Borel 集，比起以往别处为同一目的曾经出现过的集合来说，呈现出新属性（比较[2]中引述的许多参考文献）。

这里规则性成立是由于：只要$[H]\in\Gamma(\lambda(m),q(m))$对于整数$m\in\langle 1,p\rangle$，$\lambda(m)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\in J(m)$，$q(m)=(q_1,q_2,\cdots,q_m)\in Q(m)$，$H$就有对满足$H(\gamma_j)\subset H$的某些$\gamma_j\in\Lambda(\lambda_j,q_j)(j=1,2,\cdots,m)$来说的直和分解

$$H=H(\gamma_1)\oplus H(\gamma_2)\oplus\cdots\oplus H(\gamma_m)$$

使得对每一$0\neq u\in H(\gamma_j)$恒存在极限

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\log\|\Phi_t(u)\|=\lambda_j$$

$j=1,2,\cdots,m$（见[2,引理5.8]）。于是如常，可称φ_t在$[H]\in\mathscr{L}_p(K)$处有Lyapunov 特征指数λ_j，它具有重数$\dim H(\gamma_j)=q_j$（规则性的定义同[2,p.288]）。

对于$\mathscr{L}_p(K)$上每个遍历的φ_t-不变概率测度ν（记号：$\nu\in I(\mathscr{L}_p(K),\varphi_t)$），记$L_p(\nu)$为由

所有与ν相应的既是准规则点又是密集点的$[H]\in\mathscr{L}_p(K)$作成的集合（即$[H]\in L_p(\nu)$ 当且仅当：(i)$_0$对$\mathscr{L}_p(K)$上的每个连续函数f都有极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_t([H]))dt=\int_{\mathscr{L}_p(K)} fd\nu;$$

(ii)$_0$$[H]$在$\mathscr{L}_p(K)$中的每一邻域都有$\nu$-测度$>0$）。命

$$L_p(K)=\bigcup_{\nu\in I(\mathscr{L}_p(K),\varphi_t)}L_p(\nu).$$

则$L_p(K)$是$\mathscr{L}_p(K)$中一个φ_t-不变的Borel子集，具有全测度（参考[3,Chap.6，§9]．置

$$L_p^*(K)=\Gamma_p(K)\cap L_p(K).$$

则$\Gamma_p^*(K)$也是$\mathscr{L}_p(K)$中一个φ_t-不变的Borel 子集，具有全测度．所以从不变测度的角度来说，$\Gamma_p^*(K)$和$L_p(K)$没有多大的实质性差别．

可是由于$\Gamma_p^*(K)$是如此建构起采，它将要受(1.3)所规范的集合的影响．这是我们要较多地去了解的，也是目前进一步研究的起点．

末了，我们指出：(1.1)中的映射ξ实际也是一丛投射，可看作是与一个以$\mathscr{L}_p(K)$为底，秩为p的向量丛相配的正规p-标架丛的投射（参考[4]）．

二、对于$\nu\in I(\mathscr{L}(K),\varphi_t)$的集合$\Gamma_p^*(\nu)$

本节主要给出标题中集合$\Gamma_p^*(\nu)$的定义．对任一$\mu\in I(\mathscr{F}_p^*(K),\chi_t^*)$写

$$\vartheta_k(\mu,K)=\int_{\mathscr{F}_p^*(K)}\omega_k(\gamma,K)\mu(d\gamma)\qquad(k=1,2,\cdots,p)$$

考虑一任给的$\nu\in I(\mathscr{L}_p(K),\varphi_t)$．我们可取 $\bar\mu\in I(\mathscr{F}_p^*(K),\chi_t^*)$使

$$\xi_*(\bar\mu)=\nu \tag{2.1}$$

其中ξ_*由ξ导出（看[2，§2]）．据[2,系4.2]，对于某一整数$\bar m\in\langle 1,p\rangle$及每个 $j=1.2\cdots,\bar m$ 存在 $\mu_j\in I(\mathscr{F}_p^*(K),\ \chi_t^*)$及$1,2\cdots,\bar m$的排列$k\longmapsto r_j(k)$满足

$$\vartheta_k(\mu_j,K)=\vartheta_{r_j(k)}(\bar\mu,K),$$

$$\vartheta_1(\mu_j,K)=\vartheta_2(\mu_j,K)=\cdots\vartheta_{q_j}(\mu_j,K)$$

$$\text{对某一}q_j\in\langle 1,p\rangle,$$

$$\vartheta_1(\mu_j,K)\neq\vartheta_k(\mu_j,K)\text{对}k>q_j$$

且使得数列

$$\lambda(\bar m)=(\vartheta_1(\mu_1,K),\vartheta_1(\mu_2,K),\cdots,\vartheta_1(\mu_{\bar m},K)\in J(\bar m),$$

$$q(\bar m)=(q_1,q_2,\cdots,q_{\bar m})\in Q(\bar m).$$

明显地这些数列由$\bar\mu$唯一地确定．我们于是定义

$$\Gamma_p^*(\nu)=\Gamma(\lambda(\bar m),q(\bar m))\cap L_p(\nu).$$

$\Gamma_p^*(\nu)$是$\mathscr{L}_p(K)$中一个φ_t-不变的Borel子集，具有 ν-测度$=1$，因为 $\Gamma(\lambda(\bar m),q(\bar m))$ 依据[2,引理5.8及5.9]是$\mathscr{L}_p(K)$中具有ν-测度为1且φ_t-不变的Borel子集，同时$L_p(\nu)$ 也是这样的子集．

如果 $\bar{\bar\mu}$也是一个遍历测度 $\in I(\mathscr{F}_p^*(K),\chi_t^*)$使 $\xi_*(\bar{\bar\mu})=\nu$，则我们也可用上面同样的办法构造一个相应的集合 $\Gamma(\lambda\bar{\bar m}),q(\bar{\bar m}))$．但因 $\Gamma(\lambda(\bar m),\ q(\bar m))$ 及 $\Gamma(\lambda(\bar{\bar m}),\ q(\bar{\bar m}))$ 都是$\mathscr{L}_p(K)$中ν-测度为1的Borel子集，可取

$$[H]\in\Gamma(\lambda(\bar{m}),q(\bar{m}))\cap\Gamma(\lambda(\bar{\bar{m}}),q(\bar{\bar{m}})),$$

由是据[2,引理5.7及5.8]我们必有$\Gamma(\lambda(\bar{m}),q(\bar{m}))=\Gamma(\lambda(\bar{\bar{m}}),q(\bar{\bar{m}}))$。这证明$\Gamma^*_p(\nu)$的定义与满足(2.1)的$\bar{\mu}\in I(\mathscr{F}^*_p(K),\ \chi^*_p)$的选取无关。

总括取来，我们可叙述

命题2.1 对每一$\nu\in I(\mathscr{L}_p(K),\varphi_t)$来说的集合$\Gamma^*_p(\nu)$是$\mathscr{L}_p(K)$中一个$\varphi_t$-不变的Borel子集，其$\nu$-测度$=1$。$\varphi_t$在每一$[H]\in\Gamma^*_p(\nu)$处都是规则的：若$\varphi_t$在$[H]\in\Gamma^*(\nu)$处有特征指数$\lambda_1(\nu)<\lambda_2(\nu)<\cdots<\lambda_m(\nu)$，其重数顺次为$q_1(\nu),q_2(\nu),\cdots,q_m(\nu)$，则只要$\mu\in I(\mathscr{F}^*_p(K),\ \chi^*_t)$满足$\xi_*(\mu)=\nu$，$\lambda_j(\nu)$即在数列

$$\vartheta_1(\mu,K),\vartheta_2(\mu,K),\cdots,\vartheta_p(\mu,K)$$

中出现，出现的次数为$q_j(\nu)$，这里

$$\vartheta_k(\mu,K)=\int_{\mathscr{F}^*_p(K)}\omega_k(\gamma,K)d\mu.$$

顺便我们给下面简单但有用的叙述。

系2.2 若μ及$\bar{\mu}\in I(\mathscr{F}^*_p(K),\ \chi^*_t)$满足$\xi_*(\mu)=\xi_*(\bar{\mu})\in I(\mathscr{L}_p(K),\varphi_t)$，则

$$\vartheta_1(\mu,K),\vartheta_2(\mu,K),\cdots,\vartheta_p(\mu,K)\text{及}$$
$$\vartheta_1(\bar{\mu},K),\vartheta_2(\bar{\mu},K),\cdots,\vartheta_p(\bar{\mu},K)$$

这两个数列除开顺序不计外，是相同的。

我们还指出：若ν及$\bar{\nu}\in I(\mathscr{L}_p(K),\varphi_t)$但$\nu\neq\bar{\nu}$，则因$L_p(\nu)\cap L_p(\bar{\nu})=0$(参考[3,Chap.6,§9])所以也有

$$\Gamma^*_p(\nu)\cap\Gamma^*_p(\bar{\nu})=0.$$

三、一个分解定理

明显地，$\Gamma^*_p(\nu)\subset\Gamma_p(K)\cap L_p(\nu)\subset\Gamma^*_p(K)$对每一$\nu\in I(\mathscr{L}_p(K),\varphi_t)$。我们将证明

定理3.1 $\Gamma^*_p(\nu)=\Gamma_p(K)\cap L_p(\nu)$对每一$\nu\in I(\mathscr{L}_p(K),\varphi_t)$，由是

$$\Gamma^*_p(K)=\bigcup_{\nu\in I(\mathscr{L}_p(K),\varphi_t)}\Gamma^*_p(\nu).$$

证 命数述列$\{T_i\}$给出如前，满足(1.2)。对于某$\lambda(m)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\in J(m)$及$q(m)=(q_1,q_2,\cdots,q_m)\in Q(m)$设有

$$[H]\in\Gamma(\lambda(m),q(m))\cap L_p(\nu)$$

其中 $\nu\in I(\mathscr{L}_p(K),\varphi_t)$。我们将证明$[H]$也$\in\Gamma^*_p(\nu)$，从而易看出定理成立。

为此，考虑任给的$\varepsilon>0$。从$\mathscr{F}^*_{q_i}(K)$的紧致性，单参变换群$\varphi_t(-\infty<t<\infty)$及函数$\omega_k(\gamma,K)$的连续性并据$\Gamma(\lambda(m),q(m))$及$\Lambda(\lambda_j,q_j)$的定义，易看出存在整数$i(\varepsilon)\geqq1$及$\gamma_j\in\Lambda(\lambda_j,q_j)$具有下述性质：首先，

$$H(\gamma_j)\subset H,\qquad(j=1,2,\cdots,m);$$

其次，对应于每一$s\in\langle0,T_{i(\varepsilon)}\rangle$存在一区间$\eta(s)=(s-\theta(s),s+\theta(s))$ $(\theta(s)>0)$及一整数$c(i,\varepsilon,s)>i(\varepsilon)$使得对任何的$s+\theta\in\eta(s)$及任何整数$c\geqq c(\varepsilon,s)$以及$\tau(i(\varepsilon),c)=T_c/T_{i(\varepsilon)}=2^{c-i(\varepsilon)}$，不等式

$$0\leqq\frac{1}{\tau(i(\varepsilon),c)}\sum_{\tau=0}^{\tau(i(\varepsilon),c)-1}\operatorname*{Max}_{k=1,2,\cdots q_j}\left|\lambda_j-\frac{1}{T_i(\varepsilon)}\int_{\tau T_{i(\varepsilon)}}^{(\tau+1)T_{i(\varepsilon)}}\omega_k(\chi^*_t\right.$$

$$(\chi^{\#}_{s,\theta}(\gamma_j)),K)dt|<\varepsilon \qquad (j=1,2,\cdots,m) \tag{3.1}$$

恒成立。因$\langle 0,T_{i(\varepsilon)}\rangle$紧致，我们可取有限个数的区间$\eta(s_1),\eta(s_2),\cdots,\eta(s_r)$覆盖$\langle 0,T_{i(\varepsilon)}\rangle$.取

$$c(\varepsilon)=\operatorname*{Max}_{k=1,2,\cdots,r}\{c(\varepsilon,s_k)\}.$$

于是(3.1)对所有的$s+\theta\in\langle 0,T_{i(\varepsilon)}\rangle$及所有的整数$c\geqq c(\varepsilon)$都成立。

对每一$j=1,2,\cdots,m$，考虑对$\gamma\in\mathscr{F}^{\#}_{q_j}(K)$的连续函数

$$f_j(\gamma)=\operatorname*{Max}_{k=1,2,\cdots,q_j}\left|\lambda_j-\frac{1}{T_{i(\varepsilon)}}\int_0^{T_{i(\varepsilon)}}\omega_k(\chi^{\#}_t(\gamma),K)dt\right|$$

及对$s\in\langle 0,\infty)$的连续函数

$$g_j(s)=f_j(\chi^{\#}_s(\gamma_j)).$$

应用（3.1）到每一整数$c\geqslant c(\varepsilon)$及每一给定的$s\in\langle 0,\ T_{i(\varepsilon)}\rangle$我们有

$$\sum_{\tau=0}^{\tau(i(\varepsilon),c)-1}g_j(\tau T_{i(\varepsilon)}+s)$$

$$=\sum_{\tau=0}^{\tau(i(\varepsilon),c)-1}f_j(\chi^{\#}_{\tau T_{i(j)}}\chi^{\#}_s(\gamma_j))<\varepsilon\tau(i(\varepsilon),c)$$

从而

$$\int_0^{T_c}g_j(s)ds=\sum_{\tau=0}^{\tau(i(\varepsilon),c)-1}\int_0^{T_{i(\varepsilon)}}g_j(\tau T_{i(\varepsilon)}+s)ds$$

$$=\int_0^{T_{i(\varepsilon)}}\left(\sum_{\tau=0}^{\tau(i(\varepsilon),c)-1}g_j(\tau T_{i(\varepsilon)}+s)ds<\varepsilon T_c \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m).\right.$$

这给出

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f_j(\chi^{\#}_t(\gamma_j))dt\leqslant\lim_{c\to\infty}\frac{1}{T_c}\int_0^{T_c}f_j(\chi^{\#}_t(\gamma_j))dt$$
$$<\varepsilon \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{3.2}$$

对每一$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$命

$$\rho_j:\mathscr{F}^{\#}_p(K)\longrightarrow\mathscr{F}^{\#}_{q_j}(K)$$

为映射使得当$\gamma\in\mathscr{F}^{\#}_p(K)$时，$\mathrm{proj}_k(\rho_j\gamma)=\mathrm{proi}_k\gamma$，$k=1,\ 2,\cdots,q_j$($\mathrm{proj}_k(\cdot)$表标架中的第$k$个向量)。显然$\rho_i$是满映射，$\rho_j\chi^{\#}_t=\chi^{\#}_t\rho_j:\mathscr{F}^{\#}_p(K)\to\mathscr{F}^{\#}_p(K)$对$t\in(-\infty,\ \infty)$，且$\omega_k(\rho_j\beta,\ K)=\omega_k(\beta,\ K)$对$\beta\in\mathscr{F}^{\#}_p,k=1,\ 2,\cdots,q_j$。于是，因$H(\gamma_j)\subset H$，我们可取$\beta_j\in\mathscr{F}^{\#}_p(K)$使$\xi(\beta_j)=[H]$且$\rho_j(\beta_j)=\gamma_j$。进而据(3.2)，

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_\sigma^T(-f_j\rho_j(\chi^{\#}_t(\beta_j))dt>-\varepsilon.$$

由是用[2，引理2.2]及$[H]\in L_p(\nu)$这假设，我们可得出一遍历测度$\mu_{\varepsilon,j}\in I(\mathscr{F}^{\#}_p(K),\ \chi^{\#}_t)$使得

$$\xi_*(\mu_{\varepsilon,j})=\nu\in I(\mathscr{L}_p(K),\ \varphi_t) \tag{3.3}$$

$$\int_{\mathscr{F}^{\#}_p(K)}(-f_j\rho_j(\beta))\mu_{\varepsilon,j}(d\beta)>-\varepsilon$$

这些蕴涵

$$|\lambda_j-\int_{\mathscr{F}_p^*(K)}\left(\frac{1}{T_{i(\varepsilon)}}\int_0^{T_{i(\varepsilon)}}\omega_k(\chi_t^*(\beta),K)dt\right)\mu_{\varepsilon,j}(d\beta)|$$

$$\leqslant\int_{\mathscr{F}_p^*(K)}f_j\rho_j(\rho)\mu_{\varepsilon,j}(d\beta)\leqslant\varepsilon \qquad (k=1,\ 2\cdots,\ q_j).$$

但据Fubini定理及测度$\mu_{\varepsilon,j}$的χ^*-不变性有

$$\int_{\mathscr{F}_p^*(K)}\left(\frac{1}{T_{i(\varepsilon)}}\int_0^{T_{i(\varepsilon)}}\varphi_k(\chi_t^*(\beta),\ K)dt\right)\mu_{\varepsilon,j}(d\beta)$$

$$=\int_0^{T_i(\varepsilon)}\frac{1}{T_{i(\varepsilon)}}dt\int_{\mathscr{F}_p^*(K)}\omega_k(\chi_t^*(\beta),K)\mu_{\varepsilon,j}(d\beta)$$

$$=\int_0^{T_{i(\varepsilon)}}\frac{1}{T_{i(\varepsilon)}}dt\int_{\mathscr{F}_p^*(K)}\omega_k(\beta,\ K)\mu_{\varepsilon,j}(d\beta)$$

$$=\frac{1}{T_{i(\varepsilon)}}\int_0^{T_{i(\varepsilon)}}\vartheta_k(\mu_{\varepsilon,j},\ k)dt=\vartheta_k(\mu_{\varepsilon,j},\ K),$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ q_j).$$

这给出

$$|\lambda_j-\vartheta_k(\mu_{\varepsilon,j},\ K)|<\varepsilon \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ q_j;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{3.4}$$

现在，依据[2，引理2.1] 取定一$\mu\in I(\mathscr{F}_p^*(K),\ \chi_t^*)$ 使$\xi_*(\mu)=\nu$，并考虑数列

$$\vartheta_1(\mu,\ K),\ \vartheta_2(\mu,\ K),\ \cdots,\ \vartheta_p(\mu,\ K). \tag{3.5}$$

另一方面，我们可取一叙列$\{\varepsilon_i\}$的$\varepsilon_i>0$使

$$\lim_{i\to\infty}\varepsilon_i=0 \tag{3.6}$$

且(3.4)成立对于这些$\varepsilon=\varepsilon_i$。于是按照（3.3）及系2.2，对每个$\varepsilon=\varepsilon_i$所得的

$$\vartheta_k(i;\ j)=\vartheta(\mu_{\varepsilon,j},\ K)$$

都在（3.5）中出现。如必需，用取子叙列的法子，不妨设

$$\vartheta_k(1;\ j)=\vartheta_k(2;\ j)=\vartheta_k(3;\ j)=\cdots,$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ q_j;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

这以及(3.4)，(3.6)给出

$$\lambda_j=\vartheta_k(1;\ j) \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ q_j;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

但$\lambda(m)\in J(m)$及$q(m)\in Q(m)$，因而$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_m$且$q_1+q_2+\cdots+q_m=p$。所以据系2.2，每个$\lambda_i$都出现在数列3.5中，出现的次数恰是$q_j$。由是据$\Gamma_p^*(v)$的定义及系 2.2 可得出结论$[H]\in\Gamma_p^*(v)$。这完成定理的证明。

四、Borel划分

我们将要费些篇幅讨论集合$L_p^*(\nu)$($\nu\in I(\mathscr{L}_p(K),\varphi_t)$)对我们以后有用的性质。

设有度量空间N以$d(,)$为度量．任给一数ζ满足

$$1/2<\zeta<1,$$

并写$\bar{\xi}=1/(1-\zeta)$．对x_0及$x_1\in N$记

$$V(x_0,\ x_1;\ \zeta,\ N)=\{x\in N\mid d(x,\ x_0)+d(x,\ x_1)<2\zeta d(x_0,\ x_1)\}$$

引理4.1 设F为N中一有限子集，c_0及c_1为F中不相同的点．则F中有不相同的点x_0及x_1使得

$$d(x_0,\ c_0)<\bar{\xi}d(c_0,\ c_1),\ d(x_1,\ c_0)<\bar{\xi}d(c_0,\ c_1)$$

$$d(x_0,\ x_1)\leqslant d(c_0,\ c_1),$$

且$F\cap V(x_0,\ x_1;\ \zeta,\ N)$仅由$x_0$及$x_1$组成．

证 同[5, p.29]中一引理的证明．

N的Borel划分是指N的一族有限或可数个互不相交的Borel子集，其并集为N[6, p.60]．

对于N的一Borel划分$\alpha=\{A_i\}$，记

$$\mathrm{diam}(\alpha)=\sup_i(\mathrm{diam}A_i)$$

这里$\mathrm{diam}A_i$表A_i的直径$\sup\limits_{x\in A_i,y\in A_i}d(x,y)$．对于$N$的Borel划分$\alpha=\{A_i\}$及$\beta=\{B_i\}$，记$\alpha\leqslant\beta$如果每一$B_j$包含在某一$A_i$内．

设α是N的一Borel划分，$A\in\alpha$．记$A|\alpha$为所有具有下述性质的的$B\in\alpha$个数，即：存在$x\in A$及$y\in B$使$d(x,\ y)<\bar{\xi}\mathrm{diam}(\alpha)$．$A|\alpha$可以是有限也可以无限．

我们将称N具有Borel划分局部$\bar{\xi}$-有限性，如果N有一叙列$\{\alpha_j\}$的Bore划分$\alpha_j=\{A_{ij}\}$满足下述要求(i)$_1$～(iii)$_1$：

(i)$_1$ $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_3\leqslant\cdots$,

(ii)$_1$ $\lim\limits_{j\to\infty}\mathrm{diam}(\alpha_j)=0$,

(iii)$_1$ 存在一正整数m使得 $A_{ij}|\alpha_j\leqslant m$

对所有的i及$j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$．

例1 对于N的一子度量空间Q及N的一Borel划分$\alpha=\{A_i\}$，$Q\vee\alpha=\{Q\cap A_i\}$显然是$Q$的一Borel划分．进一步，若$Q$在$N$中的内集非空且$N$有Borel划分叙列$\{\alpha_j\}$满足上述(i)$_1$～(iii)$_1$，则$Q$的Borel划分叙列$\{Q\vee\alpha_{j_0+j}\}$对于充分大的$j_0$也将满足上述(i)$_1$～(iii)$_1$．若$N$紧致且它有一叙列$\{\alpha_j\}$的Borel划分$\alpha_j=\{A_{ji}\}$满足上述(iii)$_1$，则对每一$j$，不为空集的$A_{ij}$的个数都是有限的．

例2 直线E^1的一Borel分由集合族$\{J_k=(k,\ k+1]\mid k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\}$作成．$E^n$的一Borel划分$\alpha$由$E^n$中所有的笛卡儿积$J_{k1}\times J_{k1}\times\cdots\times J_{kn}$作成．$E^n$的线性映射$x\mapsto h_j(x)=x/2^{j-1}$把$\alpha$变换至$E^n$的一Borel划分$\alpha_j$, $j=1,\ 2,3,\cdots$．易看出这叙列$\{\alpha_j\}$满足上述条件(i)$_1$～(iii)$_1$．

现在我们仍回到前面所给向量丛K上动力系统的讨论．设$a_0=[H_0]\in\mathscr{L}_p(K)$是$\varphi_t$: $\mathscr{L}_p(K)\to\mathscr{L}_p(K)\ (-\infty<t<\infty)$的一非休止点．于是$\mathscr{L}_p(K)$有一闭子集$N_0$作为$\varphi_t$过$a_0$的局部截痕，它对于一数$T_0>0$来说满足：

(i)$_2$ 由$\varphi(t,\ x)=\varphi_t(x)$定义的映射

$$\varphi:(-\infty,\ \infty)\times\mathscr{L}_p(K)\to\mathscr{L}_p(K)$$

局限在$\langle -T_0, T_0\rangle\times N_0$上时是单映射．简记$B_0=\varphi(\langle -T_0, T_0\rangle\times N_0)$．

(ii)$_2$ $a_0\in \mathrm{int}(B_0)$（即$\mathscr{L}_p(K)$中子集B_0的内集），并且若$\Theta(N_0)=N_0\cap\mathrm{int}(B_0)$，则$\mathrm{int}(B_0)=(-T_0, T_0)\times\Theta(N_0)$且$a_0\in\Theta(N_0)$．

（参看[3，Chap.5，Th.7]．）

取定可度量空间$\mathscr{L}_p(K)$上一度量，也记作$d(,)$．对正整数j及k记$\varDelta(j, k)$为所有具有下述性质的$x\in N_0$作成的集合，即：存在$t\in(0, j\rangle$使$y=\varphi_t(x)\in N_0$且满足$d(x, y)<1/k$及$V(x, y; \zeta, N_0)\subset\Theta(N_0)$但开轨弧$\{\varphi_s(x)\mid 0<s<t\}$不与$V(x, y; \zeta, N_0)$相交．于是据变换群$\varphi_t(-\infty<t<\infty)$的连续性及局部截痕$N_0$的性质，易看出$\varDelta(j, k)$是$N_0$的闭子集，从而

$$\varDelta(k)=\bigcup_{j=1,2,3,\dots}\varDelta(j, k),$$

$$\varDelta=\bigcap_{k=1,2,3,\dots}\varDelta(k)$$

都是N_0的Borel子集．显然

$$\varDelta(1)\supset\varDelta(2)\supset\varDelta(3)\supset\cdots. \tag{4.1}$$

考虑映射$\xi:\mathscr{F}^{\#}_p(K)\to\mathscr{F}_p(K)$（见(1.1)）．对于$\mu\in I(\mathscr{F}^{\#}_p(K), \chi^{\#}_t)$记$M_p(\mu)$为所有与$\mu$相应的既是准规则点又是密集点的$\gamma\in\mathscr{F}^{\#}_p$作成的集合．这是$\mathscr{F}^{\#}_p(K)$中$\chi^{\#}_t$—不变的Borel子集，具有$\mu$-测度1．也易看出对于$\nu=\xi_*(\mu)=I(\mathscr{L}_p(K), \varphi_t)$，$\xi(M_p(\mu))$是$\mathscr{L}_p(K)$中$\varphi_t$-不变的$\nu$-可测子集，具有$\nu(\xi(M_p(\mu)))=1$，且

$$\xi(M_p(\mu))\subset L_p(\nu).$$

命题4.2．设C是$\mathscr{F}^{\#}_p(K)$中一闭子集满足

$$\mu(\bar{M}_p(\mu, C))>0$$

对一给定的$\mu\in I(\mathscr{F}^{\#}_p(K), \chi^{\#}_t)$，其中

$$\bar{M}_p(\mu, C)=M_p(\mu)\cap\mathrm{int}(C)\subset\mathscr{F}^{\#}_p(K).$$

设$a_0\in\xi(\bar{M}_p(\mu, C))$不是$\varphi_t$的休止点．取$\varphi_t$过$a_0$的局部截痕$N_0$并构造$N_0$的子集$\varDelta$如上．再设$N_0$具有Borel划分局部$\xi$-有限性．则

$$\nu(L^{*}_p(\nu)\cap\varphi(\langle -1, 1\rangle\times\varDelta)\cap\xi(\mathrm{int}(C))>0 \tag{4.2}$$

对于$\nu=\xi_*(\mu)\in I(\varphi_p(K), \varphi_t)$．

证 因$\xi(\bar{M}_p(\mu, C))\subset\xi(\bar{M}_p(\mu))\cap\xi(\mathrm{int}(C))\subset L_p(\nu)\cap\xi(\mathrm{int}(C))$，而$\xi$是从映射蕴涵$\xi(\mathrm{int}(C)$在$\mathscr{L}_p(K)$中开，据$\varphi_t$在$a_0\in\xi(\bar{M}_p(\mu, C))$处的截面$N_0$的前述性质(i$_2$)及(ii$_2$)我们可取$a_0$在$N_0$中一邻域$R$使其闭包

$$Q\subset\Theta(N_0)\cap\xi(\mathrm{int}(C))$$
$$=N_0\cap\mathrm{int}(\varphi(\langle -T_B, T_B\rangle\times N_0))\cap\xi(\mathrm{int}(C)).$$

由是存在一数$r\in(0, T_0)$使得

$$\varphi(\langle -r, r\rangle\times Q)\subset\mathrm{int}(\varphi(\langle -T_0, T_0\rangle\times N_0))\cap\xi(\mathrm{int}(C)).$$

显然，要证(4.2)只须证

$$\nu(L^{*}_p(\nu)\cap\varphi(\langle r, r\rangle\times(Q\cap\varDelta)))>0 \tag{4.3}$$

事实上，因Q是N_0的紧致子集，而N_0的开子集$\Theta(N_0)\supset Q$可取一数$\varepsilon>0$使得：只要x及$y\in U(Q; \varepsilon, N_0)$（$Q$在$N_0$中的$\varepsilon$-邻域）且$d(x, y)<\varepsilon$，即有

$$V(x, y; \zeta, N_0)\subset\Theta(N_0).$$

因N_0是φ_t在a_0处的局部截痕，任一轨弧$\{\varphi_s(x)\mid 0\leqslant s\leqslant t\}(0<t<\infty)$都只能与$N_0$有限次相交．又据命题假设，$N_0$有一叙列$\{\alpha_j\}$的Borel划分$\alpha_j=\{A_{ij}\}$满足前述要求(i)$_1$～(iii)$_1$．结合这

些并应用引理4.1到N_0，我们可取一整数$j_0>0$，对它来说下述(#)成立.

(#)任给$j\geqslant j_0$. 存在一相应的整数$k_j\geqslant 1$使得只要x及$y=\varphi_t(x)\in Q\cap A_{ij}$，其中$t>0$，轨弧$\{\varphi_s(x)\mid 0\leqslant s\leqslant t\}$上即有点

$$f_j(x)=\varphi_{s_{j1}}(x)\text{ 及 }\tau_j(x)=\varphi_{s_{j2}}(x),$$
$$(0\leqslant s_{j1}<s_{j2}\leqslant t)$$

具有性质：

$$f_j(x)\text{ 及 }\tau_j(x)\in U(Q,\ (1/k_j),\ N_0),$$
$$d(f_j(x),\ \tau_j(x))<1/k_j,\ V(f_j(x),\ \tau_j(x);\ \zeta,\ N_0)\subset\Theta(N_0),$$

但开轨弧$\{\varphi_s(f_j(x))\mid 0<s<s_{j2}-s_{j1}\}$不与$V(f_j(x),\ \tau_j(x);\ \zeta,\ N_0)$相交，由是$f_j(x)\in\varDelta(k_j)$. 并且

$$k_1\leqslant k_2\leqslant k_3\leqslant\cdots,\ \lim_{j\to\infty}k_j=\infty.$$

记$\delta_j(x)$，$g(x)$，$g_{ij}(x)$分别为$\mathscr{L}_p(K)$中Borel子集

$$\Pi_j=L_p^*(\nu)\cap\varphi(\langle -r,\ r\rangle\times(\varDelta(k_j)\cap U(Q;\ (1/k_j),\ N_0)),$$
$$G=L_p^*(\nu)\cap\varphi(\langle -r,\ r\rangle\times Q),$$
$$G_{ij}=L_p^*(\nu)\cap\varphi(\langle -r,\ r\rangle\times(Q\cap A_{ij}))$$

$(j\geqslant j_0)$的特征函数. 因$\nu\in I(\mathscr{L}_p(K),\ \varphi_t)$，$a_0\in L_p(K)$而$L_p(K)$的$\nu$-可测子集$L_p^*(\nu)$具有$\nu$-测度1，从$L_p(K)$的定义及集$R$的取法，并应用Birkhoff遍历性定理可看出存在一点$y\in L_p^*(\nu)\cap R$使得有极限

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\delta_j(\varphi_s(y))ds=\int_{\mathscr{L}_p(K)}\delta_j(x)\nu(dx)$$
$$=\nu(\Pi_j)\qquad(j\geqslant j_0),$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t g(\varphi_s(y))ds=\nu(G)>0,$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t g_{ij}(\varphi_s(y))ds=\nu(G_{ij})\qquad(j\geqslant j_0)$$

(参考[3, Chap.6].)

对每一$j\geqslant j_0$记F_j为所有使$\nu(G_{ij})>0$的i作成的集合. 这是一有限集，因为N_0紧致，而Borel划分a_j满足$(\mathrm{iii})_1$. 对每一$i\in F_j$，所有使$\varphi_t(y)$与$Q\cap A_{ij}$相交的$t\geqslant 0$作成一叙列

$$t(i,\ j;\ 1)<t(i,\ j;\ 2)<t(i,\ j;\ 3)<\cdots.$$

由是按照前述(#)，存在$t(i,\ j;\ k)\leqslant\bar t(i,\ j;\ k)<t(i,\ j;\ k+1)$使

$$f_j(\varphi_{t(i,j;k)}(z))=\varphi_{\bar t(i,j;k)}(z)\in N_0\cap\Pi_j \tag{4.4}$$

$$\sum_{q=1}^{k}\mathrm{meas}(\langle t(i,\ j;\ q)-r,\ t(i,\ j;\ q)+r\rangle)$$

$$=\sum_{q=1}^{k}\mathrm{meas}(\langle\bar t(i,\ j;\ q)-r,\ \bar t(i,\ j;\ q)+r\rangle).$$

但在式(4.4)中，对同一个j可能有不同的i，它们的f_j-像相同. 若z是周期轨道上的点，易看出(4.2)已成立. 下面设不是这情况. 于是据Borel划分a_j的前述性质$(\mathrm{iii})_1$，每组具有f_j-像相同的i所含i的个数都不会超过m. 从这些，我们易导出

$$0<\nu(G)=\sum_{i\in F_j}\nu(G_{ij})\leqslant \bar{m}\nu(\Pi_j).$$

这式子对所有$j\geqslant j_0$都成立，从而据（4.1）及Π_j的定义我们有

$$0<\frac{1}{\bar{m}}\nu(G)\leqslant \lim_{j\to\infty}\nu(\Pi_j)=\nu(\bigcap_{j=1,2,3,\dots}\Pi_j)$$
$$=\nu(L_p^*(\nu)\cap\varphi(\langle -r,\ r\rangle\times(\varDelta\cap Q))).$$

（4.3）得证。命题4.2证完。

以后文章中，讨论将继续，包括应用。

参 考 文 献

[1] R.A.Johnson, K.J.Palmer and G.R.Sell, Ergodic properties of linear dynamical systems, *SIAM.J.Math. Anal.*, **18**(1987), 1—33.

[2] S.T.Liao, On characteristic exponents construction of a new Borel set for the multiplicative ergodic theorem for vector fields, 北京大学学报（自然科学）, **29** (1993), 277—302.

[3] В.В.涅梅茨基和 В.В.斯捷巴诺夫, 《微分方程定性论》, 科学出科社(1959).

[4] N.E.Steenrod, *The Tapology of Fibre Bundles*, *Princeton*, (1951).

[5] 廖山涛, 一个推广的C^1封闭引理, 北京大学学报（自然科学）, (3)(1979), 1—41.

[6] H.Federex, *Geometrie Measure Theory*, Springer-Verlag(1969).

Notes on a Study of Vector Bundle Dynamical Systems(I)

Liao Shantao

(*Mathematics Department and Mathematics Institute; Peking University, Beijing* 100871)

Abstract

This paper is a continuation of a previous one. We still emphasize the discussion on the relation between the dynamics on the base space of a vector bundle and that on each associated bundle of frames.

Key words vector bundle, bundle of frames, Grassmann bundle, ergodicity, Borel partition