应用数学和力学，第16卷 第9期（1995 年 9 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

用范式理论研究常微分方程焦点量问题*

张琪昌　　梁以德

（天津大学，天津 300072）（香港大学）

（林宗池推荐，1994 年9月16日收到）

摘　　要

利用范式与焦点量之间关系的一个定理并拓展了矩阵表示法，借助于计算机代数语言Mathematica 的帮助，本文给出了一种计算常微分方程焦点量问题的新方法，利用这种方法可以计算常微分方程的任意阶焦点量，并通过一个算例验证了本文所提出的方法的正确性。这种方法的优点是简捷、方便、只进行简单的代数运算。

关键词　范式　常微分方程　焦点量　Mathematica

一、引　　言

计算微分方程焦点量对于研究微分方程的稳定性、Hilbert 第16问题（微分方程极限环的数量）以及微分方程在奇点的其它性态等是非常重要的。因此，随着动力系统理论的发展，越来越多的学者开始对这一问题进行研究。Langford等人计算出了 Hopf 分叉系统第二阶焦点量[4]，李承治等人计算出了第三阶焦点量[3]。并将其用来研究Helberts 16问题。王铎等人也在这方面做了许多工作，建立了范式系数与焦点量之间关系的定理[5]。利用王铎提出的这个定理，本文借助于计算机代数语言 Mathematica 用矩阵表示法的思想推导出了一种计算焦点量问题的新方法。用本文提出的这种方法可以计算常微分方程的任意阶焦点量。本文将计算焦点量的工作又向前推进了一步，为更深入地研究Hilbert 第16问题、常微分方程稳定性问题以及动力系统问题打下了基础。

二、范式系数与焦点量之间的关系

考虑满足Hopf分叉条件的下列系统：

$$\dot{X}=AX+\sum_{k=2}^{k}E^{k}(X) \tag{2.1}$$

其中：

*国家自然科学基金资助项目。

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

$$F^k(X)=\begin{bmatrix} F^{k(1)}(X) \\ F^{k(2)}(X) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{\substack{j=0\\ i=k-j}}^{k} a_{ij}x_1^i x_2^j \\ \sum\limits_{\substack{j=0\\ i=k-j}}^{k} b_{ij}x_1^i x_2^j \end{bmatrix}$$

对上式取复变换：$z=x_1+ix_2$，$\bar{z}=x_1-ix_2$，方程（2.1）变换为

$$\dot{z}=iz+g_1^2(z,\ \bar{z})+\cdots+g_1^{2m+1}(z,\ \bar{z})+\text{h.o.t.} \tag{2.2}$$

$$\dot{\bar{z}}=i\bar{z}+\overline{g_1^2(z,\ \bar{z})}+\cdots+\overline{g_1^{2m+1}(z,\ \bar{z})}+\text{h.o.t.} \tag{2.3}$$

利用范式理论，对方程(2.2)经过一系列接近恒同的非线性变换：$z=\nu+\zeta^k(\nu,\ \bar{\nu})$，$\zeta^k\in H_2^k$，$k=2,\cdots,l$，用$g_1^i(z,\ \bar{z})$表示方程中第$i$阶齐次多项式．用$A_{\alpha_1,\ \alpha_2}^{(l)}$表示$g_1^k$中$z^{\alpha_1}\bar{z}^{\alpha_2}(\alpha_1+\alpha_2=k)$的系数，则有下述结论：

定理1　方程（2.2）的原点的第m阶焦点量

$$\nu_{2m+1}=\text{Re}\left(A_{m+1,m}^{(m+1)}\right)$$

定理1的证明参看文献[5]．定理1说明：对于（2.2）那样的方程经过m次接近恒同的非线性变换后，方程的前$m+1$阶齐次多项式都已规范化了，其$2m+1$阶齐次多项式中单项式$z^{m+1}\bar{z}^m$的系数的实部与第m阶焦点量相等或与其差一常数倍．

三、计算Hopf分叉系统的焦点量

方程（2.1）在直角座标系下实A-范式的一般形式为：

$$\dot{U}=AU+G^3(U)+G^5(U)+\text{h.o.t.} \tag{3.1}$$

其中：

$$U=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix};$$

$$G^{2k+1}(U)=(u_1^2+u_2^2)^{2(k-1)}\begin{bmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix}U$$

由（3.1）式可知：在方程（2.1）的范式中只存在奇次阶的齐次多项式．

取一系列接近恒同的非线性变换：$X=X+P^k(X)\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

注：在上述变换中为了便于编制计算机程序，避免过多地使用变量，变换后仍采用同一变量X．

其中：

$$P^k(X)=\begin{bmatrix} P^{k(1)} \\ P^{k(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{\substack{j=0\\ i=k-j}}^{k} c_{ij}x_1^i x_2^j \\ \sum\limits_{\substack{j=0\\ i=k-j}}^{k} d_{ij}x_1^i x_2^j \end{bmatrix}$$

对（2.1）式逐次的采用上述变换，则经过k次变换后，（2.1）式可化简为：

$$\dot{X}=AX+F_2^3(X)+F_3^5(X)+\cdots+F_k^{k+1}(X)$$
$$+F_k^{k+2}(X)+\cdots+F_k^{2k+1}(X)+\cdots \tag{3.2}$$

其中：

$F_i^j(X)$表示方程（2.1）经过i次变换后的j阶齐次多项式。

$$F_i^j(X)=\begin{bmatrix} F_i^{j(1)}(X) \\ F_i^{j(2)}(X) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{\substack{n=0\\ m=j-n}}^{j} a_{mn}x_1^m x_2^n \\ \sum\limits_{\substack{n=0\\ m=j-n}}^{j} b_{mn}x_1^m x_2^n \end{bmatrix}$$

那么如何计算$P^k(X)$呢？由范式理论可知，经过k次变换后，方程（3.2）中的前$k+1$阶齐次多项式已经规范化了。并且：

$$F_k^{k+1}=F_{k-1}^{k+1}+AP^k-DP^kAX=G^{k+1}(X) \tag{3.3}$$

由此式既可求解出第$k+1$阶范式的系数和$P^k(X)$.但随着阶数的增高，这一求解过程将变得非常复杂。

为了简化这一求解过程，定义线性算子ad_A^k:$H_n^k\to H_n^k$（H_n^k是在线性空间内由n个变量组成的k阶齐次多项式），$ad_A^k p^k(Y)=Dp^k(Y)AY-Ap^k(Y)$.

引入记号$X^\alpha=X^{\alpha_1}\cdots X^{\alpha_n}$，其中$\alpha_i$为非负整数，并且$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$.

定义1（反字典顺序） 假设$x^\alpha e_i$和$x^\beta e_j$为任两个H_n^k中的单项式，其中e_i和e_j是在R^n中的标准基，分别地只有第i个和第j个元素等于1．如果$i>j$，或$i=j$而α和β第一个不同的分量α_1和β_1满足关系式，$\alpha_1>\beta_1$，我们称$X^\alpha e_i<X^\beta e_j$（即$X^\alpha e_i$小于$X^\beta e_j$）

假设$\{X^\alpha,\ |\alpha|=k\}$是在$H_n^k$中一组反字典顺序排列的基，令$L_A^k$是关于基$\{X^\alpha,\ |\alpha|=k\}$算子$ad_A^k$的矩阵表示。

定理2(Fredholm) 令L_A^k为有限维线性内积空间H_n^kV的线性算子。假设L^*是L_A^k的自伴算子（即L^*为L_A^k的复共轭转置矩阵）则

$$V=\mathrm{Im}L_A^k\oplus\mathrm{Ker}L^*,$$

其中 $\mathrm{Im}L_A^k$为L_j^k的值域，$\mathrm{Ker}L^*$为L^*的零空间．

定理的证明请参看有关的泛函书籍。

据此表达式（3.3）可写为下列矩阵形式：

$$\omega\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{20} \\ d_{11} \\ d_{02} \\ c_{20} \\ c_{11} \\ c_{02} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{20} \\ b_{11} \\ b_{02} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \end{bmatrix}\qquad k=1$$

$$
\omega\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
-3 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} d_{30}\\ d_{21}\\ d_{12}\\ d_{03}\\ c_{30}\\ c_{21}\\ c_{12}\\ c_{03}\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b^1_{30}-b_1\\ b^1_{21}-a_1\\ b^1_{12}-b_1\\ b^1_{03}-a_1\\ a^1_{30}-a_1\\ a^1_{21}+b_1\\ a^1_{12}-a_1\\ a^1_{03}+b_1\end{pmatrix}
\qquad k=2
$$

…

根据范式系数与焦点量之间关系的定理可知：对于方程（2.1）经过k次接近恒同的变换后，其$2k+1$阶齐次多项式中单项式$z^{m+1}\bar{z}^m$的系数的实部与第k阶焦点量相等．这样我们就得到了一种计算常微分方程焦点量问题的新方法．以前由于我们采用REDUCE语言进行公式推导[1]，这种语言受微机640K内存的限制，不能计算较为复杂的问题，只能计算较低的焦点量．现在我们采用计算机代数语言Mathematica进行公式推导，突破了微机640K内存的限制，使得我们能处理较为复杂的问题，使得计算高阶焦点量这一繁杂的工作成为可能．

四、算　　例

考虑满足Hopf分叉条件的下列系统[3]：

$$
\left.\begin{aligned}
x' &= -y+\lambda_1 x-\lambda_3 x^2+(2\lambda_2+\lambda_5)xy+\lambda_6 y^2\\
y' &= x+\lambda_1 y+\lambda_3 x^2 x^2+(2\lambda_5+\lambda_4)xy-\lambda_2 y^2
\end{aligned}\right\}
\tag{4.1}
$$

这是一个二次系统，将各系数代入附录中给出的计算前四阶焦点量的公式中．得到该系统的前四阶焦点量为：

$$\nu_3=\frac{1}{8}\lambda_5(-\lambda_3+\lambda_6)$$

$$\nu_5=-\frac{1}{48}\lambda_2\lambda_4(5\lambda_3+\lambda_4-5\lambda_6)(-\lambda_3+\lambda_6)$$

$$\nu_7=\frac{1}{64}25\lambda_2(\lambda_3-\lambda_6)^2(-\lambda_2^2+\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2)$$

$$
\begin{aligned}
\nu_9=\frac{1}{1152}5\lambda_2(\lambda_3-\lambda_6)^3(&-392\lambda_2^4-353\lambda_2^2\lambda_3^2+1325\lambda_2^2\lambda_3\lambda_6+353\lambda_3^3\lambda_6-\\
&-1756\lambda_2^2\lambda_6^2-1639\lambda_3^2\lambda_6^2+2838\lambda_3\lambda_6^3-1944\lambda_6^4)
\end{aligned}
$$

将本文所得结果与文献[3]所得结果完全一致，从而验证了本文所提出的方法的正确性．由于计算高阶焦点量的工作难度较大，文献[3]没有计算出第四阶焦点量．而利用本文提出的方法，不仅可以计算出第四阶焦点量，如果需要的话可以计算更高阶的焦点量．

五、结　论

我们将动力系统的范式理论与计算机代数语言Mathematica有机地结合起来，极大地拓展了用动力系统理论解决问题的能力，使得求解非常复杂、深奥的数学问题成为可能。本文提出了一种计算常微分方程焦点量的一种新方法，这种方法的特点是简捷、方便，将计算焦点量问题又向前推进了一步，有重要的理论意义和实际意义。

附　录

```
a20=-13; a11=212+15; a02=16; b20=12; b11=213+14; b02=-12≫oa20
x={x1, x2}; a={{0, -1}, {1, 0}}; ≫0x
f2={a20*x1^2+a11*x1*x2+a02*x2^2, b20*x1^2+b11*x1*x2+b02*x2^2}≫of2
f3={0, 0}≫of3
f4={0, 0}≫of4
f5={0, 0}≫of5
f6={0, 0}≫of6
f7={0, 0}≫of7
f8={0, 0}≫of8
f9={0, 0}≫of9
p2={c20*x1^2+c11*x1*x2+c02*x2^2, d20*x1^2+d11*x1*x2+d02*x2^2}≫op2
d20=(a20-b11+2*a02)/3; d11=(2b20-a11-2*b02)/3; d02=(2a20+b11+a02)/3≫od20
c20=(-b20-a11-2*b02)/3; c11=(2a20+b11-2*a02)/3; c02=(-2b20+a11-b02)/3
 ≫oc20
df2={{D[f2[[1]], x1], D[f2[[1]], x2]}, {D[f2[[2]], x1], D[f2[[2]], x2]}}≫odf2
dp2={{D[p2[[1]], x1], D[p2[[1]], x2]}, {D[p2[[2]], x1], D[p2[[2]], x2]}}≫odp2
f21=Simplify[f2+a.p2-dp2.a.x]≫of21
f31=Simplify[f3+df2.p2]≫of31
a1=CoefficientList[f31[[1]], x2]≫oa1
b1=CoefficientList[f31[[2]], x2]≫ob1
a130=Simplify[a1[[1]]/x1^3]≫oa130
a121=Simplify[a1[[2]]/x1^2]≫oa121
a112=Simplify[a1[[3]]/x1]≫oa112
a103=a1[[4]]≫oa103
b130=Simplify[b1[[1]]/x1^3]≫ob130
b121=Simplify[b1[[2]]/x1^2]≫ob121
b112=Simplify[b1[[3]]/x1]≫ob112
b103=b1[[4]]≫ob103
v3=na1=Simplify[(b121+3*a130+3*b103+a112)/8]≫ona1
nb1=Simplify[(-a121+3*b130-3*a103+b112)/8]≫onb1
l5=0
c30=0≫oc30
c03=0≫oc03
c12=Simplify[(8*c30-b130+b112+3*a121-3*a103)/8]≫oc12
c21=Simplify[(8*c03+b121-b103+3*a130-3*a112)/8]≫od21
```

```
d21=Simplify[(8*c30+5*b130-b112+a121+3*a103)/8]≫od121
d12=Simplify[(-8*c03+b121-5*b103+3*a130+a112)/8]≫od12
d30=Simplify[(-4*c03-b121-b103+a130+a112)/4]≫od30
d03=Simplify[(4*c30+b130+b112+a121+a103)/4]≫od03
p3={c30*x1^3+c21*x1^2*x2+c12*x1*x2^2+c03*x2^3
    d30*x1^3+d21*x1^2*x2+d12*x1*x2^2+d03*x2^3}≫op3
dp3={{D[p3[[1]], x1], D[p3[[1]], x2]}, {D[p3[[2]], x1], D[p3[[2]], x2]}}≫odp3
f32=Simplify[f31+a.p3-dp3.a.x]≫of32
p22={p2[[1]]^2, 2*p2[[1]]*p2[[2]], p2[[2]]^2}≫op22
d2f2={{D[f2[[1]], {x1, 2}], D[f2[[1]], x1, x2], D[f2[[1]], {x2, 2}]},
      {D[f2[[2]], {x1, 2}], D[f2[[f2[[2]], x1, x2], D[f2[[2]], {x2, 2}]}}≫od2f2
df3={{D[f3[[1]], x1], D[f3[[1]], x2]}, {D[f3[[2]], x1], D[f3[[2]], x2]}}≫odf3
f41=Simplify[f4+1/2*d2f2.p22+df3.p2-dp2.f31]≫of41
a2=CoefficientList[f41[[1]], x2]≫oa2
b2=CoefficientList[f41[[2]], x2]≫ob2
a240=Simplify[a2[[1]]/x1^4]≫oa240
a231=Simplify[a2[[2]]/x1^3]≫oa231
a222=Simplify[a2[[3]]/x1^2]≫oa222
a213=Simplify[a2[[4]]/x1]≫oa213
a204=a2[[5]]≫oa204
b240=Simplify[b2[[1]]/x1^4]≫ob240
b231=Simplify[b2[[2]]/x1^3]≫ob231
b222=Simplify[b2[[3]]/x1^2]≫ob222
b213=Simplify[b2[[4]]/x1]≫ob213
b204=b2[[5]]≫ob204
d40=Simplify[(-3*b231-2*b213+3*a240+2*a222+8*a204)/15]≫od40
d31=Simplify[(12*b240-2*b222-8*b204-3*a231-2*a213)/15]≫od31
d22=Simplify[(b231-b213+4*a240+a222+4*a204)/5]≫od22
d13=Simplify[(8*b240+2*b222-12*b204-2*a231-3*a213)/15]≫od13
d04=Simplify[(2*b231+3*b213+8*a240+2*a222+3*a204)/15]≫od04
c40=Simplify[(-3*b240-2*b222-8*b204-3*a231-2*a213)/15≫oc40
c31=Simplify[(3*b231+2*b213+12*a240-2*a222-8*a204)/15]≫oc31
c22=Simplify[(-4*b240-b222-4*b204+a231-a213)/5]≫oc22
c13=Simplify[(2*b231+3*b213+8*a240+2*a222-12*a204)/15]≫oc13
c04=Simplify[(-8*b240-2*b222-3*b204+2*a231+3*a213)/15]≫oc04
p4={c40*x1^4+c31*x1^3*x2+c22*x1^2*x2^2+c13*x1*x2^3+c04*x2^4,
    d40*x1^4+d31*x1^3*x2+d22*x1^2*x2^2+d13*x1*x2^3+d04*x2^4}≫op4
f42=f41≫of42
dp4={{D[p4[[1]], x1], D[p4[[1]], x2]}, {D[p4[[2]], x1], D[p4[[2]], x2]}}≫odp4
f43=Simplify[f42+a.p4-dp4.a.x]≫of43
d2f3={{D[f3[[1]], {x1, 2}], D[f3[[1]], x1, x2], D[f3[[1]], {x2, 2}]},
      {D[f3[[2]], {x1, 2}], D[f3[[2]], x1, x2], D[f3[[2]], {x2, 2}]}}≫od2f3
df4={{D[f4[[1]], x1], D[f4[[1]], x2]}, {D[f4[[2]], x1], D[f4[[2]], x2]}}≫odf4
f51=Simplify[f5+1/2*d2f3.p22+df4.p2-dp2.f41]≫of51
```

```
df31={{D[f31[[1]], x1], D[f31[[1]], x2]},{D[f31[[2]], x1], D[f31[[2]], x2}}
    ≫odf31
f52=Simplify[f51+df31.p3-dp3.f32]≫of52
a3=CoefficientList[f52[[1]], x2]≫oa3
b3=CoefficientList[f52[[2]], x2]≫ob3
a350=Simplify[a3[[1]]/x1^5]≫oa350
a341=Simplify[a3[[2]]/x1^4]≫oa341
a332=Simplify[b3[[3]]/x1^3]≫ob332
a323=Simplify[a3[[4]]/x4^2]≫oa323
a314=Simplfy[a3[[5]]/x5]≫oa314
a305=a3[[6]]≫0a305
b350=Simplify[b3[[1[]/x1^5]≫ob350
b341=Simplify[b3[[2]]/x1^4]≫ob341
b332=Simplify[b3[[3]]/x1^3]≫ob332
b323=Simplify[b3[[4]]/x1^2]≫ob323
b314=Simplify[b3[[5]]/x1]≫ob314
b305=b3[[6]]≫ob305
v5=na2=Simplify[-(-b341-b323-5*b305-5*a350-a332-a314)/16]≫ona2
nb2=Simplify[-(-5*b350-b332-b314+a341+a323+5*a305)/16]≫onb2
l4=-5(l3-l6)
c50=0≫oc50
c05=0≫oc05
c32=Simplify[(32*c50-3*b350+b332+b314+7*a341-a323-5*a305)/16]≫oc32
c23=Simplify[(32*c05+b341+b323-3*b305+5*a350+a332-7*a314)/16]≫oc23
c41=Simplify[(48*c05+5*b341+b323-7*b305+25*a350-7*a332- 11*a314)/ 48]≫oc41
c14=Simplify[(48*c50-7*b350+b332+5*b314+11*a341+7*a323-25*a305]/48]≫oc14
d41=Simplify[(16*c50+11*b350-b332-b314+a341+a323+5*a305)/16]≫od41
d50=Simplify[(-12*c05-2*b341-b323-2*b305+2*a350+a332+2*a314)/12]≫od50
d05=Simplify[(12*c50+2*b350+b332+2*b314+2*a341+a323+2*a305)/12]≫od05
d14=Simplify[(-16*c05+b341+b323-11*b305+5*a350+a332+a314)/16]≫od14
d32=Simplify[(-96*c05+5*b341-11*b323-31*b305+25*a350+5*a332+13*314)/48
    ≫od32
d23=Simplify[(96*c50+31*b350+11*b332-5*b314+13*a341+5*a323+25*a305)/48]≫od23
p5={c50*x1^5+c41*x1^4*x2+c32*x1^3*x2^2+c23*x1^2*x2^3+c14*x1*x2^4
    + c05*x2^5, d50*x1^5+d41*x1^4*x2+d32*x1^3*x2^2+d23*x1^2*x2^3
    +d14*x1*x2^4+d05*x2^5}≫op
f53=f52≫of53
dp5={{D[p5[[1]], x1], D[p5[[1]], x2]}, {D[p5[[2]], x1], D[p5[[2]], x2]}}≫odp5
f54=Simplify[f53+a.p5-dp5.a.x]≫of54
d3f3={{D[f3[[1]], {x1, 3}], D[f3[[1]], {x1, 2}, x2], D[f3[[1]], x1, }x2, 2}],
        D[f3[[1]], {x2, 3}]}, {D[f3[[2]], {x1, 3}], D[f3[[2]], {x1, 2}, x2],
        D[f3[[2]], x1, {x2, 2}], D[f3][2]], {x2, 3}]}}≫od3f3
p23={p2[[1]]^3, 3*p2[[1]]^2*p2[[2]], 3*p2[[1]]*p2[[2]]^2, p2[[2]]^3}≫op23
d2f4={{D[f4[[1]], {x1, 2}], D[f4[[1]], x1, x2], D[f4[[1]], {x2, 2}]}},
```

```
    {D[f4[[2]], {x1, 2}], D[f4[[2]], x1, x2], D[f4[[2]], {x2, 2}]}}≫od2f4
df5={{D[f5[[1]], x1], D[f5[[1]], x2]}, {D[f5[[2]], x1], D[f5[[2]], x2]}}≫odf5
f61=Simplify[f6+d3f3.p23/6+d2f4.p22/2+df5.p2-dp2.f51]≫of61
df41={{D[f41[[1]], x1], D[f41[[1]], x2]}, {D[f41[[2]], x1], D[f41[[2]], x2 ]}}
   ≫odf41
f62=Simplify[f61+df41.p3-dp3.f41]≫of62
df32={{D[f32[[1]], x1], D[f32[[1]], x2]}, {D[f32[[2]], x1], D[f32[[2]], x2]}}
   ≫odf32
f63=f62+df32.p4-dq4.f32≫of63
d3f4={{D[f4[[1]], {x1, 3}], D[f4[[1]], {x1, 2}, x2], D[f4[[1]], x1, {x2, 2}],
     D[f4[[1]], {x2, 3}]}, {D[f4[[2]], {x1, 3}], D[f4[[2]], {x1, 2}, x2],
     D[f4[[2]], x1, {x2, 2}], D[f4[[2]], {x2, 3}]}}≫od3f4
d2f5={{D[f5[[1]], {x1, 2}], D[f5[[1]], x1, x2], D[f5[[1]], {x2, 2}]},
    {D[f5[[2]], {x1, 2}], D[f5[[2]], x1, x2], D[f5[[2]], {x2, 2}]}}≫od2f5
df6={{D[f6[[1]], x1], D[f6[[1]], x2]}, {D[f6[[2]], x1], D[f6[[2]], x2]}}≫odf6
f71=Simplify[f7+d3f4.p23/6+d2f5.p22/2+df6.p2-dp2.f61]≫of71
d2f31={{D[f31[[1]], {x1, 2}], D[f31[[1]], x1, x2], D[f31[[1]], {x2, 2}]},
     {D[f31[[2]], {x1, 2}], D[f31[[2]], x1, x2], D[f31[[2]], {x2, 2}]}}
     ≫od2f31
p32={p3[[1]]^2, 2*p3[[1]]*p3[[2]], p3[[2]]^2}≫op32
df51={{D[f51[[1]], x1], D[f51[[1]], x2]},{D[f51[[2]], x1], D[f51[[2]], x2]}}≫odf51
f72=Simplify[f71+1/2*d2f31.p32+df51.p3-dp3.f52]≫of72
df42={{D[f42[[1]], x1], D[f42[[1]], x2]}, {D[f42[[2]], x1], D[f42[[2]], x2]}}
     ≫odf42
f73=Simplify[[72+df42.p4-dp4.f43]≫of73
a73=CoefficientList[f73[[1]], x2]≫oa73
b73=CoefficientList[f73[[2]], x2]≫ob73
a370=Simplify[a73[[1]]/x1^7]≫oa370
a352=Simplify[a73[[3]]/x1^5]≫oa352
a334=Simplify[a73[[5]]/x1^3]≫oa334
a316=Simplify[a73[[7]]/x1]≫oa316
b361=Simplify[b73[[2]]/x1^6]≫ob361
b343=Simplify[b73[[4]]/x1^4]≫ob343
b325=Simplify[b73[[6]]/x1^2]≫ob325
b307=b73[[8]]≫ob307
v7=Simplify[(35*a370+5*a352+3*a334+5*a316+5*b361+3*b343+5*b325
    +35*b307)/128]≫oc3
f81=Simplify[-dp2.f71]≫of81
f91=Simplify[-dp2.f81]≫of91
d3f31={{D[f31[[1]], {x1, 3}], D[f31[[1]], {x1, 2}, x2], D[f31[[1]], x1, {x2, 2}],
      D[f31[[1]], {x2, 3}]}, {D[f31[[2]], {x1, 3}], D[f31[[2]], {x1, 2}, x2],
      D[f31[[2]], x1, {x2, 2}], D[f31[[2]], {x2, 3}]}}≫od3f31
p33={p3[[1]]^3, 3*p3[[1]]^2*p3[[2]], 3*p3[[1]]*p3[[2]]^2, p3[[2]]^3}≫op33
df71={{D[f71[[1]], x1], D[f71[[1]], x2]}, {D[f71[[2]], x1], D[f71[[2]], x2]}}
```

```
  ≫odf71
d2f51={{D[f51[[1]], {x1, 2}], D[f51[[1]], x1, x2], D[f51[[1]], {x2, 2}]},
      {D[f51[[2]], {x1, 2}], D[f51[[2]], x1, x2], D[f51[[2]], {x2, 2}]}}≫od2f51
f92=Simplify[f91+1/6*d3f31.p33+1/2*d2f51.p32+df71.p3-dp3.f721]≫of92
df62={{D[f62[[1]], x1], D[f62[[1]], x2]}, {D[f62[[2]], x1], D[f62[[2]], x2]}}
  ≫odf62
p42={p4[[1]]^2, 2*p4[[1]]*p4[[2]], p4[[2]]^2}≫op42
d2f32={{D[f32[[1]], {x1, 2}], D[f32[[1]], x1, x2], D[f32[[1]], {x2, 2}]},
      {D[f32[[2]], {x1, 2}], D[f32[[2]], x1, x2], D[f32[[2]], {x2, 2}]}}≫od2f32
f93=Simlqify[f92+d2f32.p42/2+df62.p4-dp4.f631]≫of93
df53={{D[f53[[1]], x1], D[f53[[1]], x2]}, {D[f53[[2]], x1], D[f53[[2]], x2]}}
  ≫odf53
f94=Simplify[f93+df53.p5-dp5.f54]≫of94
a94=CoefficientList[f94[[1]], x2]≫oa94
b94=CoefficientList[f94[[2]], x2]≫ob94
a490=Simplify[a94[[1]]/x1^9]≫oa490
a472=Simplify[a94[[3]]/x1^7]≫oa472
a454=Simplify[a94[[5]]/x1^5]≫oa454
a436=Simplify[a94[[7]]/x1^3]≫oa436
a418=Simplify[b94[[9]]/x1]≫oa418
b481=Simplify[b94[[2]]/x1^8]≫ob481
b463=Simplify[b94[[4]]/x1^6]≫ob463
b445=Simplify[b94[[6]]/x1^4]≫ob445
b427=Simplify[b94[[8]]/x1^2]≫ob427
b409=b94[[10]]≫ob409
v9=Simplify[(63*a490+7*a472+3*a454+3*436+7*a418+7*b481+3*b463+3*445
  +7*b427+63*b409)/256]≫oc4
```

参 考 文 献

[1] 张琪昌，Hopf分叉范式理论及其在非线性振动系统中的应用，天津大学博士论文（1991年1月）.

[2] 陈予恕、张琪昌，一种求解非线性振动系统渐近解的新方法——计算向量场 Normal Form系数的简单方法，力学学报，22(4)(1990)，413—419.

[3] W. W. Farr, Li Chengzhi, I. S. Labouriau and W. F. Langford, Degenerate Hopf bifurcation formulas and Hilbert 16th Problem, *SIAM J. Math. Anal.*, **20**(1)(1989), 13—30.

[4] M. Golubitsk, and W.F. Langford, Classification and Unfolding of Degenerate Hopf Bifurcatlons, *J.Differential Equations*, (3)(1981).

[5] 王铎，常微分方程的规范形理论与中心流形定理，1990年南开大学动力系统年讲义，(1990).

Studying the Focal Value of Ordinary Differential Equations by Normal Form Theory

Zhang Qichang

(*Tianjin University, Tianjin* 300072)

A.Y.T. Leung

(*University of Hong Kong*)

Abstract

we present a new method to calculate the focal value of ordinary differential eduation by applying the theorem whichdefines the relationship between the normal form and focal value with the help of a symbolic computation language MATHEMATICA, and extending the matrix representation method. This method can be used to calculate the focal value of any high order terms. This method has been verified by an example. The advantage of this method is simple and more readily applicable, and the result is directly obtained by substitution.

Key words normal form, ordinary differential equation, focal value, mathematica