应用数学和力学，第16卷 第9期（1995年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

超KdV方程的相似解

俞慧丹　　张解放

（浙江师大物理系，金华 321004）

（朱照宣推荐，1994年10月20日收到）

摘　要

本文利用Clarkson和Kruskal提出的直接法对超 KdV 方程进行对称性约化，给出其相似解。

关键词　相似解　超 KdV 方程

一、引　言

超 KdV 方程

$$u_t=-u_{xxx}+buu_x-3hh_x \tag{1.1}$$

$$h_t=-ch_{xxx}+buh_x+au_xh \qquad (c\neq 0) \tag{1.2}$$

其中 a，b和c均是常数，u是通常的 KdV 玻色场，h是一个费米场，是 KdV方程的费米推广。方程(1.1)的 Painleve 性质已有多篇文献予以研究[1,2]，并给出了三种具有Painleve 性质的系统

$$a=b=3,\ \ c=1 \tag{I}$$

$$a=3,\ \ b=6,\ \ c=4 \tag{II}$$

$$a=b=6,\ \ c=1 \tag{III}$$

本文进一步研究(Ⅲ)情形下方程组

$$u_t+u_{3x}-6uu_x+3hh_x=0 \tag{1.3}$$

$$h_t+h_{3x}-6uh_x-6u_xh=0 \tag{1.4}$$

的相似解。

求非线性方程或方程组对称性解的传统方法是经典李群法或非经典李群法[3]，但这两种方法需要进行大量繁复的代数运算并且不能得到所有的相似解。本文采用近年来由Clarkson和 Kruskal 提出的直接法[4]讨论方程组(1.3)(1.4)的对称性约化，并给出其相似解。

二、直 接 法 约 化

一般的约化形式

$$u(x,t)=U(x,t,W(Z)),\ \ Z=Z(x,t) \tag{2.1}$$

$$h(x,t)=H(x,t,Q(Z)),\ Z=Z(x,t) \tag{2.2}$$

其中 U, H, W, Q和Z为指定变量的函数且$W(Z)$和 $Q(Z)$ 满足常微分方程，可以通过把(2.1)(2.2)代入(1.3)(1.4)来得到. 但是，类似于单个偏微分方程情形，可以证明只要取特殊的约化形式

$$u(x,t)=\alpha(x,t)+\beta(x,t)W(Z(x,t)) \tag{2.3}$$

$$h(x,t)=A(x,t)+B(x,t)Q(Z(x,t)) \tag{2.4}$$

即可包含更一般的约化形式(2.1)(2.2).

将(2.3)，(2.4)代入(1.3)，(1.4)得到

$$\begin{aligned}&\beta Z_x^3W'''+3(\beta_xZ_x^2+\beta Z_xZ_{2x})W''+(\beta Z_t+3\beta_{2x}Z_x+3\beta_xZ_{2x}+\beta Z_{3x}\\&\quad-6\alpha\beta Z_x)W'+(\beta_t+\beta_{3x}-6(\alpha\beta)_x)W-6\beta\beta_xW^2-6\beta^2Z_xWW'+3B^2Z_xQQ'\\&\quad+3ABZ_xQ'+3BB_xQ^2+3(AB)_xQ+\alpha_t+\alpha_{3x}-6\alpha\alpha_x+3AA_x=0\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}&BZ_x^3Q'''+3(B_xZ_x^2+BZ_xZ_{2x})Q''+(BZ_t+3B_{2x}Z_x+3B_xZ_{2x}+BZ_{3x}\\&\quad-6\alpha\beta Z_x)Q'+(B_t+B_{3x}-6(B\alpha)_x)Q-6A\beta Z_xW'-6(A\beta)_xW-6(B\beta)_xWQ\\&\quad-6B\beta Z_x(QW)'+A_t+A_{3x}-6(A\alpha)_x=0\end{aligned} \tag{2.6}$$

(2.5)和(2.6)仅是W，Q关于Z的常微分方程，要求W，Q及其导数的各项系数的比仅是Z的函数，即对于$Z_x\neq 0$的情况，下述限制方程必须满足

$$\beta_xZ_x^2+\beta Z_xZ_{2x}=\beta Z_x^3\Gamma_1(Z) \tag{2.7}$$

$$\beta Z_t+3\beta_{2x}Z_x+3\beta_xZ_{2x}+\beta Z_{3x}-6\alpha\beta Z_x=\beta Z_x^3\Gamma_2(Z) \tag{2.8}$$

$$\beta_t+\beta_{3x}-6(\alpha\beta)_x=\beta Z_x^3\Gamma_3(Z) \tag{2.9}$$

$$\beta\beta_x=\beta Z_x^3\Gamma_4(Z) \tag{2.10}$$

$$\beta^2Z_x=\beta Z_x^3\Gamma_5(Z) \tag{2.11}$$

$$B^2Z_x=\beta Z^3\Gamma_6(Z) \tag{2.12}$$

$$ABZ_x=\beta Z_x^3\Gamma_7(Z) \tag{2.13}$$

$$BB_x=\beta Z_x^3\Gamma_8(Z) \tag{2.14}$$

$$(AB)_x=\beta Z_x^3\Gamma_9(Z) \tag{2.15}$$

$$\alpha_t+\alpha_{3x}-6\alpha\alpha_x+3AA_x=\beta Z_x^3\Gamma_{10}(Z) \tag{2.16}$$

$$B_xZ_x^2+BZ_xZ_{2x}=BZ_x^3\Gamma_{11}(Z) \tag{2.17}$$

$$BZ_t+3B_{2x}B_x+3B_xZ_{2x}+BZ_{3x}-6\alpha BZ_x=B_x^3\Gamma_{12}(Z) \tag{2.18}$$

$$B_t+B_{3x}-6(B\alpha)_x=BZ_x^3\Gamma_{13}(Z) \tag{2.19}$$

$$ABZ_x=BZ_x^3\Gamma_{14}(Z) \tag{2.20}$$

$$(A\beta)_x=BZ_x^3\Gamma_{15}(Z) \tag{2.21}$$

$$(B\beta)_x=BZ_x^3\Gamma_{16}(Z) \tag{2.22}$$

$$B\beta Z_x=BZ_x^3\Gamma_{17}(Z) \tag{2.23}$$

$$A_t+A_{3x}-6(A\alpha)_x=BZ_x^3\Gamma_{18}(Z) \tag{2.24}$$

其中 $\Gamma_i(Z)\,(i=1,\ 2,\cdots,\ 18)$为$Z$的待定系数.

类似于文献[5,6]，为了求解方程(2.7)～(2.24)式，决定α，β，A，B，W，Q，Z，注意到在写下约化形式(2.3)，(2.4)式时存在一些自由度，为了固定这些自由度，可采用如下一些规则：

规则1 若$\alpha(x,t)=\alpha_0(x,t)+\beta(x,t)\Omega(Z)$，则可取$\Omega$为$\Omega=0$（可作变换$W\to W-\Omega$）.

规则2 若 $A(x,t)=A_0(x,t)+B(x,t)\Omega(Z)$，则可简单地取 $\Omega=0$（作变换$Q(Z)\to$

$Q(Z)-\Omega(Z)$)。

规则3 若$\beta(x,t)=\beta_0(x,t)\Omega(Z)$，则可取$\Omega(Z)=\Omega_0=$常数(作变换$W\to W\Omega_0/\Omega$)。

规则4 若$B(x,t)=B_0(x,t)\Omega(Z)$，则可取$\Omega=\Omega_0=$常数(作变换$Q\to Q\Omega_0/\Omega$)。

规则5 若$Z(x,t)$由$\Omega(Z)=Z_0(x,t)$决定，其中$\Omega(Z)$为任意可逆函数，则可取$\Omega(Z)=Z$(作变换$Z\to\Omega^{-1}(Z)$)。

必须强调的是每个规则只能使用一次，即每一个自由度将由于使用相应的规则而被固定，过多地使用规则将失去一般性。

利用规则1～5，我们可以很容易地得到方程组(2.7)～(2.24)的一般解：

$$\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma_4=\Gamma_5-1=\Gamma_6-1=\Gamma_7=\Gamma_8=\Gamma_9=\Gamma_{11}$$
$$=\Gamma_{12}=\Gamma_{14}=\Gamma_{15}=\Gamma_{16}=\Gamma_{17}-1=\Gamma_{18}=0 \tag{2.25}$$

$$\Gamma_3=\Gamma_{13}=D_0 \tag{2.26}$$

$$Z=Q(t)x+\sigma(t) \tag{2.27}$$

$$A=0,\quad B=\theta^2 \tag{2.28}$$

$$\beta=\theta^2,\quad \alpha=\frac{1}{6\theta}(x\theta_t+\sigma_t) \tag{2.29}$$

$$\Gamma_{10}=D_0^2Z/3+C_1 \tag{2.30}$$

其中D，C_1为任意常数。

将(2.7)～(2.30)代回到(2.5)，(2.6)即得超 KdV 方程的对称性约化

$$u=\frac{1}{6\theta}(x\theta_t+\sigma_t)+\theta^2W \tag{2.31}$$

$$h=\theta^2Q \tag{2.32}$$

$$\theta_t=\theta^4D \tag{2.33}$$

$$\sigma_{tt}=2D_0\theta^3\sigma_t+2D_0^2\theta^6\sigma+6C_1\theta^6 \tag{2.34}$$

其中W，Q满足常微分方程组

$$W'''+D_0W-6WW'+3QQ'+D_0^2Z/3+C_1=0 \tag{2.35}$$

$$Q'''+D_0Q-6(QW)'=0 \tag{2.36}$$

进一步分两种情况讨论：

(a) $D_0=0$

由(2.33)，(2.34)，求解得约化结果

$$u=C_1\theta_0(t+t_0)+\theta_0^2W \tag{2.37}$$

$$h=\theta_0^2Q \tag{2.38}$$

$$W'''-6WW'+3QQ'+C_1=0 \tag{2.39}$$

$$Q'''-6(QW)'=0 \tag{2.40}$$

其中θ_0，t_0为任意常数。

(b) $D_0\neq 0$。

在这种情况下，(2.33)～(2.36)成为

$$\theta=[3(D_1-D_0t)]^{-1/3} \tag{2.41}$$

$$\sigma=\sigma_1(D_1-D_0t)^{+1/3}+\sigma_2(D_1-D_0t)^{-1/3}+C_2 \tag{2.42}$$

$$h=[3(D_1-D_0t)]^{-2/3}Q \tag{2.43}$$

$$u=[3(D_1-D_0t)]^{-2/3}W+\left(1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\sigma_2\right)D_0/[54(D_1-D_0t)]$$
$$-\sqrt[3]{3}D_0\sigma_1(D_1-D_0t)^{-1/3}/18 \tag{2.44}$$

其中 D_0，σ_1和σ_2为任意常数，$W(Z)$，$Q(Z)$满足由(2.41)，(2.42)给出的方程。

以上结果是在$Z_x\neq 0$情形下得到的，当$Z_x=0$时，由规则5令$Z=t$，完全类似于$Z_x\neq 0$情况，得到所有可能相似解。

参 考 文 献

[1] P. Mathieu, The Painleve' property for fermionik extensions of the korteweg-de vries equation, *J. Math. phys.* **29**(1988), 2199.

[2] D. G. Zhang and B. Z. Li, A new integrable super KdV equation, *Phys. Lett. A*, **171**(1992), 43.

[3] P. J. Olver, *Application of Lie Group to Differential Equation*, Berlin, Springer (1986).

[4] P. A. Clarkson and M. D. Kruskal, New similarity reduction of the Boussinesq equation, *J. Math. Phys.*. **30**(1989), 2201.

[5] S. Y. Lou, Similarity solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation, *J. Phys. A.*, **23**(1990), L649.

[6] S. Y. Lou, H. Y. Ruan, etc., Similarity reductions of the KP equation by a direct method, *J. Phys. A.*, **24**(1991), 1455.

Similarity Solutions of the Super KdV Equation

Yu Huidan Zhang Jiefang

(*Physics Department, Zhejing Normal University, Jinhua*, 321004)

Abstract

In this paper, two types of similarity reductions of the super KdV equation are given by the direct method.

Key words similarity reductions, the super KdV equation