非线性热传方程的相似解

袁 镒 吾

（中南工业大学，长沙 410012）

（钱伟长推荐，1994年8月4日收到）

摘　要

文[1]研究了非线性热传导方程的波动解，即相似变量ξ为波动变量($\xi=a+bx+ct$)的情形，并规定热传导系数也只是ξ的函数。

本文抛弃了这些限制条件，从更加普遍的角度去研究非线性热传导方程的相似性解。

关键词　热传导　非线性　相似解

一、波动解（$\xi=a+bx+ct$）

兹研究非线性热传导方程[1]

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[k(x,t)\frac{\partial T}{\partial x}\right] \tag{1.1}$$

即

$$\frac{\partial T}{\partial t}=k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial k}{\partial x}\cdot\frac{\partial T}{\partial x} \tag{1.2}$$

其中　$T(x,t)$为温度，$k(x,t)$为热传导系数，x为坐标，t为时间。

从一般的角度去寻求式(1.2)的$T(x,t)$（已知$k(x,t)$）是很不容易的。文[1]对于下列二种情形求得了波动解。

1．k是T的某已知函数

2．k是波动变量的已知函数

即是说，文[1]假设式(1.1)有相似解，相似变量为波动变量且k只是波动变量的已知函数。

本文研究相似变量不限于是波动变量的情形，并抛弃了热传导系数k只是相似变量的函数的限制，从更加普遍的角度已知$k(r,t)$求T的相似解。

如果式(1.12)有相似解，相似变量为$\xi(x,t)$，则因

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{dT}{d\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{dT}{d\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{d^2T}{d\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\frac{dT}{d\xi}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

将它们代入式(1.2)得

$$\frac{dT}{d\xi}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{\partial k}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=k\left[\frac{d^2T}{d\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\frac{dT}{d\xi}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right] \tag{1.3}$$

以下，我们研究相似变量$\xi(x,t)$为各种不同形式时已知$k(x,t)$，由式(1.3)求T的相似性解.

首先，设

$$\xi=a+bx+ct \tag{1.4}$$

其中 a,b及c均为任意常数，则式(1.3)成为

$$kb^2\frac{d^2T}{d\xi^2}+\left(b\frac{\partial k}{\partial x}-c\right)\frac{dT}{d\xi}=0 \tag{1.5}$$

要使得式(1.5)有相似解，则必须

1. $$k=k(\xi) \tag{1.6}$$

2. $$kb^2=a_0\left(b\frac{\partial k}{\partial x}-c\right) \tag{1.7}$$

其中 a_0为任意常数．关于第一种情况，文[1]已研究过了．对于工程中的一个问题$k=\sin\xi$的情形，文[1]得到了式(1.5)的第一次积分

$$\frac{dT}{d\xi}=\ln\left[m\left|\tan\frac{\xi}{2}\right|^{c/b^2}\Big/|\sin\xi|\right] \tag{1.8}$$

其中 m为积分常数.

对于第二种情况，文[1]没有涉及，我们进行补充研究.

式(1.7)的解为

$$k=-\frac{a_0c}{b^2}+\exp\left[\frac{bx}{a_0}+f(t)\right] \tag{1.9}$$

其中 $f(t)$为任意函数.

利用式(1.7)，则式(1.5)变为（设k及b均不为0）

$$\frac{d^2T}{d\xi^2}+\frac{1}{a_0}\frac{dT}{d\xi}=0 \tag{1.10}$$

其解为

$$T=-m_1a_0\exp\left[-\frac{\xi}{a_0}\right]+m_2 \tag{1.11}$$

其中 m_1及m_2均为积分常数.

所以，如果热传导系数给定为式(1.9)的形式，则式(1.11)即是相似解，相似变量是式(1.4).

设$a_0=1$，$f(t)=a+ct$，则式(1.9)成为

$$k=-c/b^2+\exp[\xi] \tag{1.12}$$

于是，$k=k(\xi)$而成为第一种情形.

在文[1]的式(13)中，如令其$\beta=1$，$A=B=1$，则它和式(1.12)完全一致．但对于式(1.9)中的$f(t)$为t的任意函数的情形，文[1]中没有涉及．即是说，文[1]研究式(1.1)的波动解时，同时假定了热传导系数k也只是$\xi=a+bx+ct$的函数．本文则无这后一限制.

二、$\xi=xf_1(t)$的情形

设
$$\xi=xf_1(t) \tag{2.1}$$
其中 $f_1(t)$为t的任意函数。将式(2.1)代入式(1.3)得
$$\frac{dT}{d\xi}\left[xf_1'(t)-\frac{\partial k}{\partial x}\cdot f_1(t)\right]=kf_1^2(t)\frac{d^2T}{d\xi^2} \tag{2.2}$$
1．设
$$k=x^3f_1'(t) \tag{2.3}$$
式中撇号“′”表示对t求导，则式(2.2)变为
$$\frac{dT}{d\xi}(1-3\xi)=\xi^2\frac{d^2T}{d\xi^2} \tag{2.4}$$
积分一次得
$$\frac{dT}{d\xi}=m_3\xi^{-3}\exp[-\xi^{-1}]$$
再积分得
$$T=m_3\int\xi^{-3}\exp[-\xi^{-1}]d\xi+m_4 \tag{2.6}$$
其中 m_3及m_4均为积分常数。

2．设
$$kf_1^2(t)=xf_1'(t)-\frac{\partial k}{\partial x}f_1(t) \tag{2.7}$$
将式(2.7)代入式(2.2)得
$$d^2T/d\xi^2=dT/d\xi \tag{2.8}$$
积分得
$$T=m_5\exp[\xi]+m_6 \tag{2.9}$$
其中 m_5及m_6均为积分常数。

由式(2.7)得
$$k=m_7(t)\exp[-xf_1(t)]+\frac{f_1'(t)}{f_1^3(t)}\cdot[xf_1(t)-1] \tag{2.10}$$
其中 $m_7(t)$为t的任意函数。

所以，当热传导系数k给定为式(2.3)的形式时，相似解为式(2.6)，当热传导系数k给定为式(2.10)的形式时，相似解为式(2.9)。这两种情形的相似变量ξ均是按式(2.1)规定。

三、$\xi=\ln x+f_2(t)$的情形

设
$$\xi=\ln x+f_2(t) \tag{3.1}$$
其中 $f_2(t)$为t的任意函数，并设
$$\frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{\partial k}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}=kx^{-2}b_1\xi^{-1} \tag{3.2}$$

将式(3.1)及(3.2)代入式(1.3)得

$$\frac{d^2T}{d\xi^2}-(1+b_1\xi^{-1})\frac{dT}{d\xi}=0$$

积分得

$$T=m_8\int\xi^{b_1}\exp[\xi]d\xi+m_9 \tag{3.3}$$

其中 m_8均m_9为积分常数。

将式(3.1)代入式(3.2)得

$$\partial k/\partial x+kb_1x^{-1}/[\ln x+f_2(t)]=f_2'(t) \tag{3.4}$$

积分得

$$k=m_8(t)[\ln x+f_2(t)]^{-b_1}+f_2'(t)[\ln x+f_2(t)]^{-b_1}\cdot\int[\ln x+f_2(t)]^{b_1}dx \tag{3.5}$$

将式(3.5)，(3.3)及(3.1)直接代入式(1.3)便可验证式(3.3)及(3.5)的正确性。

设$b_1=1$，则式(3.5)成为

$$k=m_8(t)[\ln x+f_2(t)]^{-1}+f_2'(t)[\ln x+f_2(t)]^{-1}\cdot[x\ln x-x+xf_2(t)] \tag{3.6}$$

所以，当热传导系数给定为式(3.5)的形式时，式(1.2)的相似解为式 (3.3)，相似变量为式(3.1)。

四、$\xi=e^xf_3(t)$的情形

设

$$\xi=\exp[x]f_3(t) \tag{4.1}$$

其中 $f_3(t)$为t的任意函数，并设

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial k}{\partial x}=b_2k\xi \tag{4.2}$$

其中 b_2为任意常数。

将式(4.1)及(4.2)代入式(1.3)得

$$\xi d^2T/d\xi^2+(1-b_2)dT/d\xi=0 \tag{4.3}$$

积分得

$$T=\frac{m_9}{b_2}\cdot\xi^{b_2}+m_{10} \tag{4.4}$$

将式(4.1)代入式(4.2)得

$$\partial k/\partial x+b_2k=f_3'(t)/f_3(t) \tag{4.5}$$

积分得

$$k=m_{11}(t)\exp[-b_2x]+(1/b_2)f_3'(t)/f_3(t) \tag{4.6}$$

其中 $m_{11}(t)$为任意函数。

所以，如果热传导系数k给定为式(4.6)的形式，则式(4.4)即是式(1.2)的相似解，相似变量为式(4.1)。

五、$\xi=b_3x+f_4(t)$的情形

设

$$\xi=b_3x+f_4(t) \tag{5.1}$$

其中 b_3为任意常数，$f_4(t)$为t的任意函数.

将式(5.1)代入式(1.3)得

$$\frac{dT}{d\xi}\left[f_4'(t)-b_3\frac{\partial k}{\partial x}\right]=kb_3^2\cdot\frac{d^2T}{d\xi^2} \tag{5.2}$$

设

$$kb_3^2/[f_4'(t)-b_3\partial k/\partial x]=b_4\xi=b_4[b_3x+f_4(t)] \tag{5.3}$$

其中 b_4为任意常数。将式(5.3)代入式(5.2)得

$$dT/d\xi=b_4b_3^2\xi d^2T/d\xi^2 \tag{5.4}$$

其解为

$$T=\frac{m_{12}b_4b_3^2}{b_4b_3^2+1}\cdot\xi^{\frac{1}{b_4b_3^2}+1}+m_{13} \tag{5.5}$$

其中 m_{12}及m_{13}均为积分常数.

式(5.3)可变为

$$\frac{\partial k}{\partial x}+\frac{b_3}{b_4\xi}\cdot k=\frac{1}{b_3}\cdot f_4'(t) \tag{5.6}$$

其解为

$$k=m_{14}(t)[b_3x+f_4(t)]^{-1/b_4}+\frac{b_4f_4'(t)}{b_3^2(b_4+1)}[b_3x+f_4(t)] \tag{5.7}$$

其中 $m_{14}(t)$为t的任意函数.

所以，如果热传导系数k给定为式(5.7)的形式，则式(1.2)的相似解为式(5.5).

六、$\xi=b_6\mathrm{Sin}[b_5x+f_5(t)]$的情形

设

$$\xi=b_6\sin[b_5x+f_5(t)] \tag{6.1}$$

其中 b_5及b_6均为任意常数，$f_5(t)$为t的任意函数.

将式(6.1)代入式(1.3)得

$$\begin{aligned}&\frac{dT}{d\xi}\left\{\cos[b_5x+f_5(t)]f_5'(t)-b_5\frac{\partial k}{\partial x}\cos[b_5x+f_5(t)]\right\}\\&=k\left\{\frac{d^2T}{d\xi^2}\cdot b_6b_5^2[1-\sin^2(b_5x+f_5(t))]\right.\\&\left.\quad+(-b_5^2)\frac{dT}{d\xi}\cdot\sin[b_5x+f_5(t)]\right\}\end{aligned} \tag{6.2}$$

设

$$\frac{f_5'(t)\cos[b_5x+f_5(t)]-b_5\dfrac{\partial k}{\partial x}\cos[b_5x+f_5(t)]}{k}$$

$$=-b_5^2\sin^3[b_5x+f_5(t)] \tag{6.3}$$

则式(6.2)成为

$$b_6d^2T/d\xi^2-(\xi/b_6)dT/d\xi=0 \tag{6.4}$$

其解为

$$T=m_{16}\int\exp\left[\frac{\xi^2}{2b_6^2}\right]d\xi+m_{15} \tag{6.5}$$

其中 m_{16}及m_{15}均为积分常数。

式(6.3)可写成

$$\frac{\partial k}{\partial x}-\frac{b_5\sin^3[b_5x+f_5(t)]}{\cos[b_5x+f_5(t)]}\cdot k=\frac{f_5'(t)}{b_5} \tag{6.6}$$

其解为

$$k=m_{17}(t)\cdot\exp\left[\int\frac{b_5\sin^3[b_5x+f_5(t)]}{\cos[b_5x+f_5(t)]}dx\right]+\exp\left[\int\frac{b_5\sin^3[b_5x+f_5(t)]}{\cos[b_5x+f_5(t)]}dx\right]$$

$$\cdot\int\frac{f_5'(t)}{b_5}\cdot\exp\left[-\int\frac{b_5\sin^3[b_5x+f_5(t)]}{\cos[b_5x+f_5(t)]}dx\right]dx$$

即

$$k=m_{17}(t)\frac{1}{\cos[b_5x+f_5(t)}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\sin^2[b_5x+f_5(t)]\right]$$

$$+\frac{1}{\cos[b_5x+f_5(t)]}\cdot\frac{f_5'(t)}{b_5^2}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\sin^2[b_5x+f_5(t)]\right]\int\exp\left[\frac{1}{2}X^2\right]dX \tag{6.7}$$

其中

$$X=\sin[b_5x+f_5(t)] \tag{6.8}$$

$m_{17}(t)$为t的任意函数。

所以，如果热传导系数 k 给定为式(6.5)的形式，则式(1.2)的相似解为式 (6.5)，相似变量为式(6.1)。

七、$\xi=b_7\sin[xf_6(t)]$的情形

设

$$\xi=b_7\sin[xf_6(t)] \tag{7.1}$$

其中 b_7为任意常数，$f_6(t)$为 t 的任意函数。

并设

$$\frac{f_6'(t)\cos[xf_6(t)]-\dfrac{\partial k}{\partial x}f_6(t)\cos[xf_6(t)]}{k}=-f_6^2(t)\sin^3[xf_6(t)] \tag{7.2}$$

将式(7.1)及(7.2)代入式(1.3)得

$$\frac{d^2T}{d\xi^2}b_7^2-\frac{dT}{d\xi}\cdot\xi=0 \tag{7.3}$$

其解为

$$T=m_{18}\int \exp\left[\frac{1}{2b_7^2}\xi^2\right]d\xi+m_{19} \tag{7.4}$$

由式(7.2)得

$$k=\frac{1}{\cos[xf_6(t)]}\exp\left[-\frac{1}{2}\sin^2[xf_6(t)]\right]\left[m_{20}(t)+\frac{f_6'(t)}{f_6^2(t)}\right.$$

$$\left.\int \exp\left[\frac{1}{2}X^2\right]dX\right] \tag{7.5}$$

其中

$$X=\sin[xf_6(t)] \tag{7.6}$$

$m_{20}(t)$为t的任意函数。

八、$\xi=b_8\sin[\ln x+f_7(t)]$的情形

设

$$\xi=b_8\sin[\ln x+f_7(t)] \tag{8.1}$$

其中 b_8为任意常数，$f_7(t)$为t的任意函数。

并设

$$\frac{f_7'(t)\cos[\ln x+f_7(t)]-\dfrac{\partial k}{\partial x}x^{-1}\cos[\ln x+f_7(t)]}{k}$$

$$=x^{-2}\{-\cos[\ln x+f_7(t)]-\sin^{-3}[\ln x+f_7(t)] \tag{8.2}$$

将式(8.1)及(8.2)代入式(1.3)得

$$b_8d^2T/d\xi^2-\xi\cdot dT/d\xi=0 \tag{8.3}$$

其解为

$$T=m_{21}\int \exp\left[\frac{1}{2b_8}\cdot\xi^2\right]d\xi+m_{22} \tag{8.4}$$

其中 m_{21}及m_{22}均为积分常数。

式(8.3)可简化为

$$\frac{\partial k}{\partial x}-kx^{-1}\left\{1+\frac{\sin^3[\ln x+f_7(t)]}{\cos[\ln x+f_7(t)]}\right\}=xf_7'(t) \tag{8.5}$$

其解为

$$k=\frac{x}{\cos[\ln x+f_7(t)]}\exp\left[-\frac{1}{2}\sin^2[\ln x+f_7(t)]\right]\cdot\left\{m_{23}(t)\right.$$

$$\left.+f_7'(t)\int\cos[\ln x+f_7(t)]\exp\left[\frac{1}{2}\sin^2[\ln x+f_7(t)]\right]dx\right\} \tag{8.6}$$

其中 $m_{23}(t)$为t的任意函数。

参 考 文 献

[1] В. А Буьов., Замечания к волновым решениям нелинейного уравнения теплопроводности, *Инженерно-Физ. Ж.* Т XL, No5(1981), 907—913.

The Similar Solutions of Nonlinear Heat Conduction Equation

Yuan Yiwu

(Central South University of Technology, Changsha 410012)

Abstract

In ref. [1], the wave solutions of nonlinear heat conduction eduation are studied. In it, the similar variable ξ is wave variable and it is assumed that the heat conduction coefficient is only the function of the similar variable ξ.

In this paper, the author forsakes the above-mentioned restraints and studies the similar solutions of the nonlinear conduction equation from the more general angles.

Key words heat conduction, nonlinear, similar solution