

静力分析的一般随机摄动法*

张义民 陈塑寰 周振平 刘铁强

(吉林工业大学 长春 130025) (长春汽车研究所 130011)

(唐立民推荐, 1995年2月1日收到)

摘 要

本文对向量值和矩阵值函数的不确定结构的静力响应和可靠性进行了研究。基于 Kronecker 代数和摄动理论导出了随机结构的有限元分析方法, 随机变量和系统导数很方便地排列到2D矩阵中, 给出了一般的数学表达式。

关键词 随机结构 响应 可靠性 一般随机摄动法

一、前 言

到目前为止研究得相当成熟的是确定参数结构的有限元分析理论。然而, 在工程结构的设计阶段, 由于许多信息的不确定性, 使结构的许多设计参数具有不确定性; 再者, 由于工程材料特性的离散性以及制造、安装误差等因素的影响, 使结构参数也具有不确定性。因此研究随机结构参数对结构响应和可靠性的影响对工程安全分析尤其重要。近20年来, 不少文献提出解决这一问题的方法, 如随机有限元法^{[1]~[6]}, 随机摄动法^[7]等等。本文给出了向量值和矩阵值函数的随机摄动法, 使用 Kronecker 代数和矩阵微分理论以及摄动技术系统地发展了随机摄动法的一般公式, 使具有随机参数的一般随机结构的有限元分析成为可能。

二、响 应 分 析

线性有限元方程为

$$Ku = P \quad (2.1)$$

其中刚度矩阵为

$$K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad (2.2)$$

式中 $B(x)$, $D(x, R)$, $u(R)$, $P(R)$ 分别为广义梯度矩阵, 材料特性矩阵, 节点位移向量和节点力向量, x 为空间坐标, Ω 为积分域, $R(x)$ 为 s 个随机参数组成的向量, 其中包含随机

* 1994年11月18日第一次收到。

结构参数和随机载荷参数, 这些随机参数的概率特性是已知的. 上角标 T 为矩阵转置符号.

把随机参数向量 R , 刚度矩阵 K , 位移向量 u 和载荷向量 P 表示为

$$R = R_d + \varepsilon R_r \quad (2.3)$$

$$K = K_d + \varepsilon K_r \quad (2.4)$$

$$u = u_d + \varepsilon u_r \quad (2.5)$$

$$P = P_d + \varepsilon P_r \quad (2.6)$$

这里 ε 为一小参数, 下标为 d 的部分表示随机变量中的确定部分, 下标为 r 的部分表示随机变量中的随机部分, 且具有零均值. 显然, 这里要求随机部分要比确定部分小得多. 对方程 (2.3)、(2.4)、(2.5) 和 (2.6) 取数学期望, 有

$$E(R) = E(R_d) + \varepsilon E(R_r) = R_d = \bar{R} \quad (2.7)$$

$$E(K) = E(K_d) + \varepsilon E(K_r) = K_d = \bar{K} = K(\bar{R}) \quad (2.8)$$

$$E(u) = E(u_d) + \varepsilon E(u_r) = u_d = \bar{u} = u(\bar{R}) \quad (2.9)$$

$$E(P) = E(P_d) + \varepsilon E(P_r) = P_d = \bar{P} = P(\bar{R}) \quad (2.10)$$

同理, 对方程 (2.3)、(2.4)、(2.5) 和 (2.6) 取方差, 根据 Kronecker 代数^[8]及相应的随机分析理论^[9], 有

$$\text{Var}(R) = E[(R - E(R))^{[2]}] = \varepsilon^2 E[R_r^{[2]}] \quad (2.11)$$

$$\text{Var}(K) = E[(K - E(K))^{[2]}] = \varepsilon^2 E[K_r^{[2]}] \quad (2.12)$$

$$\text{Var}(u) = E[(u - E(u))^{[2]}] = \varepsilon^2 E[u_r^{[2]}] \quad (2.13)$$

$$\text{Var}(P) = E[(P - E(P))^{[2]}] = \varepsilon^2 E[P_r^{[2]}] \quad (2.14)$$

这里 $(\cdot)^{[2]} = (\cdot) \otimes (\cdot)$ 为 Kronecker 幂, 符号 \otimes 为 Kronecker 积, $\text{Var}(\cdot)$ 包含有方差和协方差.

将 (2.4)、(2.5) 和 (2.6) 式代入方程 (2.1), 有

$$(K_d + \varepsilon K_r)(u_d + \varepsilon u_r) = P_d + \varepsilon P_r \quad (2.15)$$

展开此式, 并比较 ε 的同次幂系数, 略去 $O(\varepsilon^2)$ 的以上的高阶项, 有

$$\varepsilon^0: \quad K_d u_d = P_d \quad (2.16)$$

$$\varepsilon^1: \quad K_d u_r = P_r - K_r u_d \quad (2.17)$$

由方程 (2.16) 可以解出响应的确定部分 u_d , 即响应的均值. 显然在仅给出随机参数的前两阶矩的情况下, 不可能由方程 (2.17) 确定出响应的随机部分, 也就是与方差相关的部分, 必须变换形式后加以求解.

根据向量值和矩阵值函数的 Taylor 展开式^[8], 当随机参数向量的随机部分要比确定部分小得多时, 可以把 K_r , u_r 和 P_r 在 $E(R) = R_d$ 附近展开, 有

$$K_r = \frac{\partial K_d}{\partial R^T} R_r \quad (2.18)$$

$$u_r = \frac{\partial u_d}{\partial R^T} R_r \quad (2.19)$$

$$P_r = \frac{\partial P_d}{\partial R^T} R_r \quad (2.20)$$

把方程 (2.18)、(2.19) 和 (2.20) 代入方程 (2.17), 然后展开, 有

$$K_d \frac{\partial u_d}{\partial R_i} = \frac{\partial P_d}{\partial R_i} - \frac{\partial K_d}{\partial R_i} u_d \quad (2.21)$$

由方程(2.21)可解出 $\partial u_d / \partial R_i$, 从而可获得

$$\frac{\partial u_d}{\partial R^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_d}{\partial R_1} & \frac{\partial u_d}{\partial R_2} & \cdots & \frac{\partial u_d}{\partial R_s} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

把(2.19)式代入(2.13)式, 就可以求出位移响应的方差

$$\begin{aligned} \text{Var}(u) &= \varepsilon^2 E[u_r^{[2]}] = \varepsilon^2 E\left[\left(\frac{\partial u_d}{\partial R^T} R_r\right)^{[2]}\right] \\ &= \left[\frac{\partial u_d}{\partial R^T}\right]^{[2]} \text{Var}(R) \end{aligned} \quad (2.23)$$

把(2.22)式代入(2.23)式, 就可确定出位移响应的方差。这样位移响应的均值和方差就完全确定出来了。

单元应变和应力向量为

$$\varepsilon = B(x)u^e \quad (2.24)$$

$$\sigma = D(x, R)\varepsilon \quad (2.25)$$

这里 u^e 为单元节点位移向量。

同理可获得应变 ε 和应力 σ 向量的均值和方差矩阵

$$E(\varepsilon) = \varepsilon_d = B u_d^e \quad (2.26)$$

$$\text{Var}(\varepsilon) = \left[B \frac{\partial u_d^e}{\partial R^T}\right]^{[2]} \text{Var}(R) \quad (2.27)$$

$$E(\sigma) = \sigma_d = D_d \varepsilon_d = D_d B u_d^e \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\sigma) &= \left[\frac{\partial \sigma_d}{\partial R^T}\right]^{[2]} \text{Var}(R) \\ &= \left[\frac{\partial D_d}{\partial R^T} (I_s \otimes B u_d^e) + D_d B \frac{\partial u_d^e}{\partial R^T}\right]^{[2]} \text{Var}(R) \end{aligned} \quad (2.29)$$

这里 I_s 为 $s \times s$ 阶的单位矩阵。

三、可靠性分析

在可靠性分析中的一个基本问题是估计结构的可靠度 R ,

$$R = \int_{g(X) > 0} f_X(X) dX \quad (3.1)$$

式中 $f_X(X)$ 为随机变量 X (响应和门槛值等) 的联合概率密度函数, $g(X)$ 为状态函数, 可用以表示结构的两种状态

$$\left. \begin{aligned} g(X) \leq 0 & \quad \text{为失败状态} \\ g(X) > 0 & \quad \text{为安全状态} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

这里 $g(X) = 0$ 为极限状态方程, 代表极限状态表面, 也就是失败面。

根据可靠性的干涉理论, 随机结构的可靠性分析的首次通过问题定义为

$$g_i(X) = |A_i| - |Z_i| \quad (3.3)$$

式中 A_i 为相对于随机响应 (位移、应变或应力) 向量 $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$ 的第 i 个随机变量 Z_i 的门槛值。

状态函数 $g_i(X)$ 的均值和方差为

$$E(g_i) = E|A_i| - E|Z_i| \quad (3.4)$$

$$\text{Var}(g_i) = \text{Var}(A_i) + \text{Var}(Z_i) \quad (3.5)$$

可靠性指标定义为

$$\beta_i = \frac{E(g_i)}{\sqrt{\text{Var}(g_i)}} \quad (3.6)$$

这样,一方面可以利用可靠性指标直接衡量结构的可靠性;另一方面在随机响应向量 Z 和门槛值向量 A 服从正态分布时,可以用失败点处的切平面近似模拟极限状态表面,可获得可靠度的一阶估计量

$$R_i = \Phi(\beta_i) \quad (3.7)$$

式中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数。

如果随机变量 X 不服从正态分布,可通过 Rosenblatt 变换^[10]把相关的非正态变量变换为不相关的标准正态变量,即

$$Y_i = \Phi^{-1}[F_{X_i|X_1, \dots, X_{i-1}}(X_i|X_1, \dots, X_{i-1})] \quad (3.8)$$

式中 $F_X(X)$ 为 X 的联合分布函数, Y_i 为零均值、单位标准差的独立的正态变量。把状态函数 $g(X)$ 变换为由 $Y = (Y_1 Y_2 \dots Y_n)^T$ 所张开的标准空间的状态函数 $G(Y)$ 是计算可靠度所必需的,这种变换关系如下

$$g(X) = G(Y) \quad (3.9)$$

四、数值算例

例1 平面桁架结构如图1所示。在节点4受一铅垂力 P ,其均值为9.8(kN),方向如图所示。材料强度 r 的均值为230.3(MPa)。随机材料特性的均值如表1所示,随机参数向量 $R = (P, E, A, r)^T$ 是独立的服从正态分布的随机变量,其方差系数为0.05。

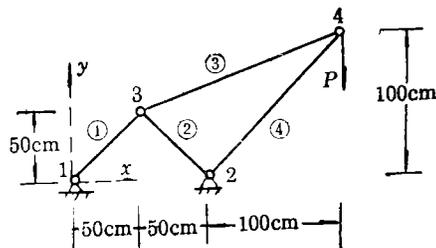


图1 平面桁架

计算结果:

③单元应力、可靠性指标和可靠度分别为

$$E[\sigma^{(3)}] = 154.95(\text{MPa}),$$

$$\sqrt{\text{Var}(\sigma^{(3)})} = 39.50(\text{MPa})$$

$$\beta_3 = 1.831, R_3 = 0.966$$

表1 单元号

单元号 e	横 断 面 积 $A^{(*)}$ (cm^2)	弹 性 模 量 $E^{(*)}$ (GPa)
1	2.0	196.0
2	2.0	196.0
3	1.0	196.0
4	1.0	196.0

④单元应力、可靠性指标和可靠度分别为

$$E[\sigma^{(4)}] = -207.89(\text{MPa}), \sqrt{\text{Var}(\sigma^{(4)})} = 53.00(\text{MPa})$$

$$\beta_4 = 0.413, R_4 = 0.660$$

因为此结构是静定结构,所以从④单元来看,此结构是不安全的,

例2 悬臂梁如图2所示.在节点1受一铅垂力 $P=78.4(\text{N})$, 如图所示.横截面积 A , 弹性模量 E , 剪切模量 G , 1节点 y 方向位移的门槛值 H 的均值为 $E(A)=3.0(\text{cm}^2)$, $E(E)=196.0(\text{GPa})$, $E(G)=78.4(\text{GPa})$, $E(H)=13.0(\text{cm})$, 随机参数向量 $R=(A, E, G, H)^T$ 是独立的服从方差系数为0.05的正态分布的随机变量.

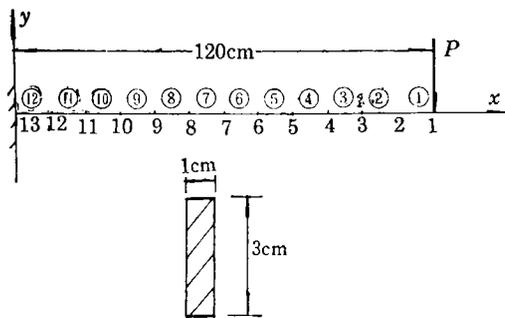


图2 悬臂梁

计算结果:

1节点位移: $E(y_1)=9.2164(\text{cm})$, $\sqrt{\text{Var}(y_1)}=0.7982(\text{cm})$

可靠性指标: $\beta=3.6757$

可靠度: $R=0.99988$

因为1节点挠度最大, 因此以挠度来度量, 此结构是安全的.

五、结 论

由于实际结构的制造误差、测量误差、统计误差和模型误差等不确定因素导致结构材料和几何特性等的随机性, 而结构所承受的载荷多半带有随机变化的性质, 这样就必然导致具有多随机参数的随机结构系统. 本文应用 Kronecker 代数和矩阵微分理论及摄动技术系统地发展了向量值和矩阵值函数的随机摄动法, 得到了一般的数学表达式, 且获得了理想的数值分析结果. 从本文的理论分析和数值算例可以看出, 本文研究的是二维矩阵函数的随机摄动理论, 比通常的一维矩阵函数的方法更一般、更完整.

参 考 文 献

- [1] K. Handa and K. Anderson, Application of finite element methods in the statistical analysis of structures, *Proc. 3rd International Conference on Structural Safety and Reliability*, Trondheim, Norway (1981), 409.
- [2] H. Coutreras, The stochastic finite element method, *Computer & Structure*, 12 (1980), 341—348.
- [3] W. K. Liu, T. Belytschko and A. Mani, Random field finite elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 23 (1986), 1831—1845.
- [4] 朱位秋、任永坚, 基于随机场局部平均的随机有限元法, *固体力学学报*, (4) (1988), 285—293.
- [5] A. Der Kiureghian and B. J. Ke, The stochastic finite element method in structural reliability, *Probabilist Engrg. Mech.*, 3 (2) (1988), 83—91.

- [6] 张义民、刘巧伶, 多随机参数结构可靠性分析的随机有限元法, *东北工学院学报*, **13** (增刊) (1992), 97—99.
- [7] 陈塑寰, 《随机参数结构的振动理论》, 吉林科学技术出版社 (1992).
- [8] W. J. Vetter, Matrix calculus operations and Taylor expansions, *SIAM Rev.*, **15**(2) (1973), 352—369.
- [9] F. Ma, Extension of second moment analysis to vector-valued and matrix-valued functions, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **22** (1987), 251—260.
- [10] M. Rosenblatt, Remarks on a multivariate transformation, *Annals of Math. Statistics*, **23**(3) (1952), 470—472.

Generalized Probabilistic Perturbation Method for Static Analysis

Zhang Yimin Chen Suhuan Zhou Zhenping

(*Department of Mechanics, Jilin University of Technology,
Changchun 130025, P. R. China*)

Liu Tieqiang

(*Changchun Automobile Research Institute, Changchun
130011, P. R. China*)

Abstract

This paper studies the static response and reliability of uncertain structures with vector-valued and matrix-valued functions. The finite element analysis method of uncertain structures is based on matrix calculus, Kronecker algebra and perturbation theory. Random variables and system derivatives are conveniently arranged into 2D matrices and generalized mathematical formulae for probabilistic perturbation are obtained.

Key words uncertain structures, response, reliability, generalized probabilistic perturbation method