应用数学和力学，第16卷 第7期（1995年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一个一般的拓扑型极大极小定理*

张石生 张 宪

（四川大学，成都 610064）（安徽师大，芜湖 421000）

摘 要

本文得出一个一般形式的拓扑型的极大极小定理，它包含König[3]的主要结果为特例，而且回答了[3]中提出的一个未解决问题。

关键词 极大极小定理 连通集

一、引言及预备知识

近年来，著名的Von Neumann 极大极小定理被许多人从多方面加以推广(见，例如，[1，2，4～9])。1992年，König[3]得出下面一个迄今最好的极大极小定理。

定理A (König[3]) 设X是一拓扑空间，Y是一紧拓扑空间，$f:X\times Y\to \bar{R}:=(-\infty,+\infty)\cup\{\pm\infty\}$满足条件：

(i) $y\mapsto f(x,y)$是下半连续的；

(ii) $x\mapsto f(x,y)$是上半连续的；

令Λ和I分别是$\bar{R}$中的非空集及非空区间且满足：

$$\lambda>\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y),\ \forall\lambda\in\Lambda\ \text{且}\ \inf\Lambda=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y);$$

$$\beta>\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y),\ \forall\beta\in I\ \text{且}\ \inf I=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y).$$

若下面之一条件满足：

(iii)$_1$ $\forall\lambda\in\Lambda$，对任意的非空有限集 $A\subset X$ 及任意的非空集$H\subset Y$，集合 $\bigcap_{x\in A}\{y\in Y:f(x,y)\leqslant\lambda\}$，$\bigcap_{y\in H}\{x\in X:f(x,y)>\lambda\}$均是连通的；

(iii)$_2$ Y是Hausdorff空间．$\forall\lambda\in\Lambda$，$\forall\beta\in I$及$\forall$非空有限集$A\subset X$和$\forall$非空集$H\subset Y$，集合$\bigcap_{x\in A}\{y\in Y:f(x,y)<\beta\}$，$\bigcap_{y\in H}\{x\in X:f(x,y)>\lambda\}$均是连通的；

(iii)$_3$ $\forall\lambda\in\Lambda$，$\forall$非空有限集 $A\subset X$ 及$\forall$非空集$H\subset Y$，集合$\bigcap_{x\in A}\{y\in Y:f(x,y)<\lambda\}$，$\bigcap_{y\in H}\{x\in X:f(x,y)\geqslant\lambda\}$均是连通的；

(iii)$_4$ $\forall\lambda\in\Lambda$，$\forall\beta\in I$及$\forall$非空有限集$A\subset X$和$\forall$非空集$H\subset Y$，集合$\bigcap_{x\in A}\{y\in Y:f(x,y)\leqslant\beta\}$，$\bigcap_{y\in H}\{x\in X:f(x,y)\geqslant\lambda\}$均是连通的。

* 国家自然科学基金资助课题，1994年7月4日收到。

则 $$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y)=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y).$$

在Konig的[3]中还提出两个公开问题：

(1) 在条件(iii)$_1$～(iii)$_4$中，如果代H为Y中的任意的非空有限集，问结论是否成立?

(2) 在条件(iii)$_2$和(iii)$_4$中，如果代"$\forall\beta\in I$"以"$\forall\lambda\in\Lambda$"，问定理的结论是否成立?

本文的目的是得出一个更一般的拓扑型的极大极小定理，它包含König定理A为特例，而且肯定地回答了上述的公开问题(2)。

二、一个一般的拓扑型极大极小定理

定理1 设X是拓扑空间，Y是一紧的拓扑空间，$f:X\times Y\to\bar{R}$是一函数满足条件：

(i) $y\mapsto f(x,y)$是下半连续的；

(ii) $x\mapsto f(x,y)$是上半连续的；

记$\lambda_0=\sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y}f(x,y)$。设$\{\lambda_m\}$是$R$中的序列，而且当$\lambda_0\neq+\infty$时，$\lambda_m\geqslant\lambda_{m+1}>\lambda_0$，$m=1,2,\cdots$且$\lambda_m\to\lambda_0$。再设下列之一条件成立：

(iii)$_1$ $\forall$非空有限集$A\subset X$及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，集合$\bigcap\limits_{x\in A}\{y\in Y:f(x,y)\leqslant\lambda_n\}$是连通的；又对任给的$x_1$，$x_2\in X$及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，存在连通集$C=C(x_2,x_2,\lambda_n)\subset X$，使得$\bigcup\limits_{x\in C}\{y\in Y:f(x,y)\leqslant\lambda_n\}=\bigcup\limits_{i=1}^{2}\{y\in Y:f(x_i,y)\leqslant\lambda_n\}$；

(iii)$_2$ $\forall$非空有限集$A\subset X$及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，集合$\bigcap\limits_{x\in A}\{y\in Y:f(x,y)<\lambda_n\}$是连通的；而且对任给的$x_1$，$x_2\in X$及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，存在连通子集$C=C(x_1,x_2,\lambda_n)\subset X$，使得$x_1,x_2\in C(x_1,x_2,\lambda_n)$且
$$\bigcup_{x\in C}\{y\in Y:f(x,y)\leqslant\lambda_n\}=\bigcup_{i=1}^{2}\{y\in Y:f(x_i,y)\leqslant\lambda_n\};$$

(iii)$_3$ $\forall$非空有限集$A\subset X$及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，集合$\bigcap\limits_{x\in A}\{y\in Y:f(x,y)<\lambda_n\}$是连通的；又对任给的$x_1,x_2\in X$及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，存在连通子集$C=C(x_1,x_2,\lambda_n)\subset X$，使得
$$\bigcup_{x\in C}\{y\in Y:f(x,y)<\lambda_n\}=\bigcup_{i=1}^{2}\{y\in Y:f(x_i,y)<\lambda_n\};$$

(iii)$_4$ $\forall$非空有限集$A\subset X$及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，集合$\bigcap\limits_{x\in A}\{y\in Y:f(x,y)\leqslant\lambda_n\}$是连通的；又对任给的$x_1,x_2\in X$及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，存在连通子集$C=C(x_1,x_2,\lambda_n)\subset X$，$\{x_1,x_2\}\subset C(x_1,x_2,\lambda_n)$，使得
$$\bigcup_{x\in C}\{y\in Y:f(x,y)<\lambda_n\}=\bigcup_{i=1}^{2}\{y\in Y:f(x_i,y)<\lambda_n\};$$

则 $$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y)=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)$$

证 因显然有
$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y)\leqslant\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)\tag{2.1}$$

故为了证明定理的结论，只需证明

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)\leqslant \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y)=\lambda_0 \tag{2.2}$$

当$\lambda_0=+\infty$时，结论显然成立．故不妨设$\lambda_0<+\infty$．现定义映象$F,G:X\times \bar{R}\to 2^Y$如下：

$$F(x,r)=\{y\in Y:f(x,y)\leqslant r\},\quad G(x,r)=\{y\in Y:f(x,y)<r\}.$$

因 $y\mapsto f(x,y)$ 下半连续，当 $\lambda_0\neq-\infty$ 时，$F(x,\lambda_0)$ 是闭的；而当 $\lambda_0=-\infty$ 时，$F(x,\lambda_0)=\bigcap_{\lambda\in R}F(x,r)$，故$F(x,\lambda_0)$也是闭的．

下面用归纳法证明$\{F(x,\lambda_0):x\in X\}$具有限交性质．

由λ_0的定义，$\forall x\in X$，$\inf_{y\in Y} f(x,y)\leqslant\lambda_0$．因$y\mapsto f(x,y)$下半连续，且$Y$是紧的，故存在$y_0\in Y$，使得$f(x,y_0)=\inf_{y\in Y} f(x,y)\leqslant\lambda_0$．因而$y_0\in F(x,\lambda_0)$．从而$F(x,\lambda_0)\neq\phi$，$\forall x\in X$．

设对$\{F(x,\lambda_0):x\in X\}$中任意 $k\geqslant1$ 个元，其交是非空的，下证对$\{F(x,\lambda_0):x\in X\}$中任意的 $k+1$ 个元其交也是非空的．设相反，存在某 $k+1$ 个点，$x_1,x_2\cdots$，$x_k,x_{k+1}\in X$，使得$\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_0)=\phi$．现证：必存在某一$\lambda_{n_0}\in\{\lambda_m\}$，使得

$$\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_{n_0})=\phi \tag{2.3}$$

设相反，则对任一$\lambda_n\in\{\lambda_m\}$有$\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_n)\neq\phi$．取$y_n\in\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_n)$ $(n=1,2,\cdots)$．因Y紧，不妨设$y_n\to y_0$．若存在$\lambda_{n_1}\in\{\lambda_m\}$，使得$y_0\notin\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_{n_1})$．于是由$\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_{n_1})$的闭性，存在$N$，当$n>N$时，$y_n\notin\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_{n_1})$．于是当$n>\max\{N,n_1\}$时

$$y_n\notin\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_{n_1})\supset\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_n).$$

这与 $y_n\in\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_n)$相矛盾．从而 $y_0\in\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_n)$，$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$．

故
$$y_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_n)=\bigcap_{i=1}^{k+1}\bigcap_{n=1}^{\infty}F(x_i,\lambda_n)=\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_0)$$

这与$\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_0)=\phi$的假设相矛盾．从而存在 $\lambda_{n_0}\in\{\lambda_m\}$使

$$\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_{n_0})=\phi$$

对任给的$\lambda\in R$，记

$$G(\lambda)=\bigcap_{i=3}^{k+1}G(x_i,\lambda),\quad F(\lambda)=\bigcap_{i=3}^{k+1}F(x_i,\lambda).$$

下证当条件(iii)$_1$～(iii)$_4$中任一条件满足时，必存在X的连通集C及$n_1\geqslant n_0$，使得

(a) $G(x,\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})\neq\phi$，$\forall x\in C$；

(b) $G(x,\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$，
或$G(x,\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$；$\forall x\in C$；

(c) 存在x'，$x''\in C$，使得

$$G(x',\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}),$$
$$G(x'',\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}).$$

(Ⅰ)事实上，当条件(iii)$_1$满足时存在连通集$C=C(x_1,x_2,\lambda_{n_0})\subset X$，使得

$$\bigcup_{x\in C}F(x,\lambda_{n_0})=\bigcup_{i=1}^{2}F(x_i,\lambda_{n_0}) \tag{2.4}$$

由归纳法假设，对任一$x\in C$，有

$$\phi\neq F(x,\lambda_0)\cap F(\lambda_0)\subset G(x,\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0})\subset F(x,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}) \tag{2.5}$$

且
$$F(x,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})\subset\bigcup_{i=1}^{2}(F(x_i,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})) \tag{2.6}$$

由条件(iii)$_1$，$F(x,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$是非空连通集；又由(2.3)知$F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$，$F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$是二不相交的非空闭集，从而有

$$F(x,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})\text{或}$$
$$F(x,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}),\quad\forall x\in C.$$

另由(2.4)得知

$$\bigcup_{x\in C}(F(x,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}))=\bigcup_{i=1}^{2}(F(x_i,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})).$$

从而必存在$x'\in C$，使得

$$(F(x',\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}))\cap(F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}))\neq\phi.$$

注意到$F(x',\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$及$F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$均是非空连通集，因而有

$$F(x',\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}).$$

故有
$$G(x',\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0})\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}).$$

同理可证，存在$x''\in C$，使得

$$G(x'',\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}).$$

取$n_1=n_0$，则结论(a)，(b)，(c)得证。

(Ⅱ)当条件(iii)$_2$满足时，对给定的$x_1,x_2\in X$及λ_{n_0}，存在连通集$C=C(x_1,x_2,\lambda_{n_0})\subset X$，$\{x_1,x_2\}\subset C$，使得

$$\bigcup_{x\in C}F(x,\lambda_{n_0})=\bigcup_{i=1}^{2}F(x_i,\lambda_{n_0}).$$

仿(Ⅰ)中的方法，一样可证

$$G(x,\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0})\neq\phi,\quad\forall x\in C \tag{2.7}$$

且

$$\begin{aligned}G(x,\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0})&\subset F(x,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})\\&\subset\bigcup_{i=1}^{2}(F(x_i,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})),\quad\forall x\in C\end{aligned} \tag{2.8}$$

由假设$G(x,\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0})$连通，而$F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$ 和 $F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$ 是二不相交的闭集，从而$\forall x\in C$

$$\begin{aligned}&G(x,\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0})\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})\\\text{或}\quad&G(x,\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})\end{aligned} \tag{2.9}$$

又由映象G和F的定义显然有

$$G(x_i,\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0})\subset F(x_i,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})\qquad(i=1,2)$$

取$n_1=n_0$，$x'=x_1$，$x''=x_2$，结论(a)，(b)，(c)得证，

(Ⅲ) 当条件(iii)$_3$满足时，存在连通集$C=C(x_1,x_2,\lambda_{n_0})\subset X$，使得

$$\bigcup_{x\in C}G(x,\lambda_{n_0})=\bigcup_{i=1}^{2}G(x_i,\lambda_{n_0}) \tag{2.10}$$

于是有

$$\bigcup_{x\in C}(G(x,\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0}))=\bigcup_{i=1}^{2}(G(x_i,\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0})) \tag{2.11}$$

仿前面一样可证有类似于(2.7)，(2.8)，(2.9)的式子成立。另从条件(iii)$_3$及(2.11)，存在$x'\in C$，使得

$$(G(x',\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0}))\cap(G(x_1,\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0}))\neq\phi,$$

故 $$(G(x',\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0}))\cap(F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}))\neq\phi.$$

从而有

$$(G(x',\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0}))\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}).$$

同理可证，存在$x''\in C$，使得

$$G(x'',\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}).$$

取$n_1=n_0$，则结论(a)，(b)，(c)成立。

(Ⅳ)当条件(iii)$_4$成立时，对给定的x_1,x_2及λ_{n_0}存在连通集$C=C(x_1,x_2,\lambda_{n_0})\subset X$，$\{x_1,x_2\}\subset C$，使得

$$\bigcup_{x\in C}G(x,\lambda_{n_0})=\bigcup_{i=1}^{2}G(x_i,\lambda_{n_0}).$$

取$n_1>n_0$，于是对任给的$x\in C$，有

$$G(x,\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})\supset F(x,\lambda_0)\cap F(\lambda_0)\neq\phi，且$$

$$F(x,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\subset G(x,\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0})$$

$$\subset\bigcup_{i=1}^{2}(G(x_i,\lambda_{n_0})\cap G(\lambda_{n_0})\subset\bigcup_{i=1}^{2}(F(x_i,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})).$$

由假设$F(x,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})$连通，从而有

$$F(x,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$$

或 $$F(x,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap(F(\lambda_{n_0}),\quad\forall x\in C.$$

因而$\forall x\in C$，有$G(x,\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$或$G(x,\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$且

$$G(x_i,\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})\subset F(x_i,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}),\quad i=1,2.$$

取$x'=x_1$，$x''=x_2$，即知结论(a)，(b)，(c)成立。

至此我们已证明，当条件(iii)$_1$～(iii)$_4$中任一条件成立时，结论(a)，(b)，(c)都成立。令

$$C_1=\{x\in C:G(x,\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})\subset F(F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})\},$$

$$C_2=\{x\in C:G(x,\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})\subset F(F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})\}.$$

由结论(a)，(b)，(c)知$C_1\neq\phi$，$C_2\neq\phi$，$C_1\cap C_2=\phi$且$C_1\cup C_2=C$。另由C的连通性，C_1，C_2不能同时为闭集，不失一般性，设C_1不是闭集，取$x_0\in(\overline{C}_1\setminus C_1)\cap C_2$，并取$C_1$中的收敛网$\{x_\alpha\}$，$x_\alpha\to x_0$，于是有

$$G(x_\alpha,\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}),\quad\forall\alpha$$

$$G(x_0,\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}).$$

取 $y_0\in G(x_0,\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})$，则$y_0\notin G(x_\alpha,\lambda_{n_1})\cap G(\lambda_{n_1})$，$\forall\alpha$，从而 $y_0\notin G(x_\alpha,\lambda_{n_1}),\forall\alpha$，故

$f(x_\alpha,y_0)\geqslant\lambda_{n_1}$, $\forall\alpha$.

另一方面，由 $y_0\in G(x_0,\lambda_{n_1})$，故$f(x_0, y_0)<\lambda_{n_1}$，从而$x_0\in\{x\in X: f(x,y_0)<\lambda_{n_1}\}$. 因 $x\mapsto f(x,y_0)$上半连续，故$\{x\in X: f(x,y_0)<\lambda_{n_1}\}$为开集. 因 $x_\alpha\notin\{x\in X: f(x,y_0)<\lambda_{n_1}\}$，$\forall\alpha$，且 $x_\alpha\to x_0$，故$x_0\notin\{x\in X: f(x,y_0)<\lambda_{n_1}\}$矛盾. 由此矛盾说明$\{F(x,\lambda_0): x\in X\}$具有限交性质. 因 Y紧，故 $\bigcap_{x\in X}F(x,\lambda_0)\neq\phi$. 取$y_0\in\bigcap_{x\in X}F(x,\lambda_0)$，故$y_0\in F(x,\lambda_0)$, $\forall x\in X$，因而有$f(x,y_0)\leqslant\lambda_0$，$\forall x\in X$. 故

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)\leqslant\lambda_0.$$

定理得证.

由定理1可得下面的推论，它是König 定理（即定理A）的推广，而且肯定地回答了König提出的公开问题(2).

推论1 设X，Y，f，Λ满足定理A中的条件，而且当满足条件(iii)$_2$或(iii)$_4$时其中的区间I被代之以集合Λ；又当满足条件(iii)$_2$时，Y也不必是Hausdorff的. 则定理1的结论仍成立.

证 令$\lambda_0=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y)$. 如果$\lambda_0=+\infty$，则由定理1证明过程中的式(2.1)和式(2.2)知推论的结论成立. 故不失一般性，设$\lambda_0<+\infty$. 取 $\Lambda=\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$，其中 $\lambda_m\in R$，$\lambda_m\geqslant\lambda_{m+1}>\lambda_0(m=1,2,\cdots)$，且$\lambda_m\to\lambda_0$. 下证$f: X\times Y\to\bar{R}$，$\{\lambda_m\}$满足定理1中的条件. 为此，我们只要证明下面的两结论成立即可.

结论Ⅰ 对任给的$x_1,x_2\in X$及任给的$\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，记

$$C(x_1,x_2,\lambda_n)=\bigcap_{y\in\bigcap_{i=1}^{2}\{y\in Y: f(x_i,y)\geqslant\lambda_n\}}\{x\in X: f(x,y)\geqslant\lambda_n\}.$$

则 (i) $C(x_1,x_2,\lambda_n)$是X中的连通集，且$x_1,x_2\in C(x_1,x_2,\lambda_n)$；

(ii) $\bigcup_{x\in C(x_1,x_2,\lambda_n)}\{y\in Y: f(x,y)<\lambda_n\}=\bigcup_{i=1}^{2}\{y\in Y: f(x_i,y)<\lambda_n\}$.

(iii) 对任一集合$C\subset X$，其满足

$$\bigcup_{x\in C}\{y\in Y: f(x,y)<\lambda_n\}=\bigcup_{i=1}^{2}\{y\in Y: f(x_i,y)<\lambda_n\}$$

必有$C\subset C(x_1,x_2,\lambda_n)$.

证 由定理A的条件及由$C(x_1,x_2,\lambda_n)$的定义，知结论(i)成立. 下面我们记

$$G(x,\lambda_n)=\{y\in Y: f(x,y)<\lambda_n\},\quad x\in X.$$

因$x_1,x_2\in C(x_1,x_2,\lambda_n)$，故

$$\bigcup_{i=1}^{2}G(x_i,\lambda_n)\subset\bigcup_{x\in C(x_1,x_2,\lambda_n)}G(x,\lambda_n)\tag{2.12}$$

如果存在$y_0\in\bigcup_{x\in C(x_1,x_2,\lambda_n)}G(x,\lambda_n)$，但$y_0\notin\bigcup_{i=1}^{2}G(x_i,\lambda_n)$. 因$y_0\in\bigcup_{x\in C(x_1,x_2,\lambda_n)}G(x,\lambda_n)$，故存在$x_0\in C(x_1,x_2,\lambda_n)$，使得$y_0\in G(x_0,\lambda_n)$，即$f(x_0,y_0)<\lambda_n$. 另一方面，因$y_0\notin\bigcup_{i=1}^{2}G(x_i,\lambda_n)$，故 $y_0\in Y\setminus\bigcup_{i=1}^{2}G(x_i,\lambda_n)=\bigcap_{i=1}^{2}\{y\in Y: f(x_i,y)\geqslant\lambda_n\}$. 于是由$C(x_1,x_2,\lambda_n)$的定义，有 $f(x_0,y_0)\geqslant\lambda_n$. 矛盾，从而得证

$$\bigcup_{x\in C(x_1,x_2,\lambda_n)} G(x,\lambda_n)\subset\bigcup_{i=1}^{2}G(x_i,\lambda_n).$$

结合(2.12)知结论(ii)得证。

又设集$C\subset X$，使得$\bigcup_{x\in C}G(x,\lambda_n)=\bigcup_{i=1}^{2}G(x_i,\lambda_n)$。因

$$\bigcap_{i=1}^{2}\{y\in Y:f(x_i,y)\geqslant\lambda_n\}=Y\setminus\bigcup^{2}G(x_i,\lambda_n)$$
$$=Y\setminus\bigcup_{x\in C}G(x,\lambda_n)=\bigcap_{x\in C}\{y\in Y:f(x,y)\geqslant\lambda_n\},$$

故$\forall x_0\in C$及$\forall y_0\in\bigcap_{i=1}^{2}\{y\in Y:f(x_i,y)\geqslant\lambda_n\}$有$f(x_0,y_0)\geqslant\lambda_n$。于是由$C(x_1,x_2,\lambda_n)$的定义知 $x_0\in C(x_1,x_2,\lambda_n)$。由于$x_0\in C$的任意性，故$C\subset C(x_1,x_2,\lambda_n)$。结论(iii)得证。

完全类似地可以证明

结论 Ⅱ 对任给的$x_1,x_2\in X$及任给的$\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，记

$$C(x_1,x_2,\lambda_n)=\bigcap_{y\in\bigcap_{i=1}^{2}\{y\in Y:f(x_i,y)>\lambda_n\}}\{x\in X:f(x,y)>\lambda_n\}.$$

则 (i) $C(x_1,x_2,\lambda_n)$是X中的连通集，且$x_1,x_2\in C(x_1,x_2,\lambda_n)$；

(ii) $$\bigcup_{x\in C(x_1,x_2,\lambda_n)}\{y\in Y:f(x,y)\leqslant\lambda_n\}=\bigcup_{i=1}^{2}\{y\in Y:f(x_i,y)\leqslant\lambda_n\};$$

(iii) 对任一集合$C\subset X$，满足

$$\bigcup_{x\in C}\{y\in Y:f(x,y)\leqslant\lambda_n\}=\bigcup_{i=1}^{2}\{y\in Y:f(x_i,y)\leqslant\lambda_n\},$$

有$C\subset C(x_1,x_2,\lambda_n)$。

由结论 Ⅰ，Ⅱ 知，如果X，Y，f，A满足定理A 的条件，必满足定理1的条件，而因推论的结论成立。证毕。

定理2 设X是一拓扑空间，Y是一紧拓扑空间，$f:X\times Y\to\bar{R}$是一函数满足条件：

(i) $y\mapsto f(x,y)$是上半连续的；

(ii) $x\mapsto f(x,y)$是下半连续的；

记$\lambda_0=\inf\limits_{x\in X}\sup\limits_{y\in Y}f(x,y)$。设$\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}\subset R$是一序列，满足条件：当$\lambda_0\neq-\infty$时，$\lambda_0>\lambda_{m+1}\geqslant\lambda_m$，$m=1,2,\cdots$且$\lambda_m\to\lambda_0$。再设下列一条件满足：

$(iii)_1$ 对任一非空有限集$A\subset X$，及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，集合$\bigcap_{x\in A}\{y\in Y:f(x,y)\geqslant\lambda_n\}$连通；又对任给的$x_1,x_2\in X$及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，存在连通集$C=C(x_1,x_2,\lambda_n)\subset X$，使得

$$\bigcup_{x\in C}\{y\in Y:f(x,y)\geqslant\lambda_n\}=\bigcup_{i=1}^{2}\{y\in Y:f(x_i,y)\geqslant\lambda_n\};$$

$(iii)_2$ 对任给的的非空有限集$A\subset X$及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，集$\bigcap_{x\in A}\{y\in Y:f(x,y)>\lambda_n\}$是连通的；又对任给的$x_1,x_2\in X$及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，存在通连集 $C=C(x_1,x_2,\lambda_n)\subset X$，$\{x_1,x_2\}\subset C$，使得

$$\bigcup_{x\in C}\{y\in Y:f(x,y)\geqslant\lambda_n\}=\bigcup_{i=1}^{2}\{y\in Y:f(x_i,y)\geqslant\lambda_n\};$$

$(iii)_3$ 对任给的非空有限集$A\subset X$，及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，集$\bigcap_{x\in A}\{y\in Y:f(x,y)>\lambda_n\}$ 是连通的；又对任给的$x_1,x_2\in X$及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，存在连通集$C=C(x_1,x_2,\lambda_n)\subset X$，使得

$$\bigcup_{x\in C}\{y\in Y: f(x,y)>\lambda_n\}=\bigcup_{i=1}^{2}\{y\in Y: f(x_i,y)>\lambda_n\};$$

(iii)$_4$ 对任给的非空有限集$A\subset X$，及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，集 $\bigcap_{x\in A}\{y\in Y: f(x,y)\geqslant\lambda_n\}$ 是连通的；又对任给的$x_1,x_2\in X$及$\forall\lambda_n\in\{\lambda_m\}$，存在连通集$C=C(x_1,x_2,\lambda_n)\subset X$，$\{x_1,x_2\}\subset C$，使得

$$\bigcup_{x\in C}\{y\in Y: f(x,y)>\lambda_n\}=\bigcup_{i=1}^{2}\{y\in Y: f(x_i,y)>\lambda_n\}.$$

则 $$\sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} f(x,y)=\inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} f(x,y).$$

证 对$-f(x,y)$应用定理1即可.

定理3 设X是拓扑空间，Y是紧拓扑空间，$f: X\times Y\to\bar{R}$下半连续，λ_0，$\{\lambda_m\}$与定理1中的相同，再设定理1中的条件(iii)$_1$～(iii)$_4$之一满足，则

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y)=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y).$$

证 因f在$X\times Y$下半连续，故$y\mapsto f(x,y)$下半连续．沿用定理1证明中的方法和记号，我们只要证明$\{F(x,\lambda_0): x\in X\}$具有限交性质.

仍用归纳法证明．因对每一$x\in X$，$F(x,\lambda_0)\neq\phi$，故当$k=1$时，结论成立．设对$k\geqslant1$时结论成立，下证对$\{F(x,\lambda_0): x\in X\}$中任意$k+1$个元，其交也非空.

设相反，存在$x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}\in X$，$\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_0)=\phi$，于是仿定理1可证存在存在$n_0$，使得$\bigcap_{i=1}^{k+1}F(x_i,\lambda_{n_0})=\phi$．另外，还可证明当条件(iii)$_1$～(iii)$_4$中任一条件满足时，存在$X$的连通子集$C$及$n_1\geqslant n_0$，使得

(a) $F(x,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\neq\phi$，$\forall x\in C$；

(b) $F(x,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$或
$F(x,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$，$\forall x\in C$；

(c) 存在x'，$x''\in C$，使得

$$F(x',\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}),$$
$$F(x'',\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}).$$

令 $$C_1=\{x\in C: F(x,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})\},$$
$$C_2=\{x\in C: F(x,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})\}.$$

由结论(a)，(b)，(c)知，$C_1\neq\phi$，$C_2\neq\phi$，$C_1\cap C_2=\phi$，$C_1\cup C_2=C$．因C连通，C_1，C_2不能同时为闭集．不妨设C_1不是闭集．取$x_0\in(\bar{C}_1\backslash C_1)\cap C_2$，并取$C_1$中的收敛网$\{x_\alpha\}$，$x_\alpha\to x_0$．于是

$$F(x_\alpha,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\subset F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}),\quad\forall\alpha,$$
$$F(x_0,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}).$$

易知，对任一α，$F(x_\alpha,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\neq\phi$，取$y_\alpha\in F(x_\alpha,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})$，由$Y$紧，存在$\{y_\beta\}\subset\{y_\alpha\}$，使得$y_\beta\to y_0$．故$y_0\in F(\lambda_{n_1})$且$y_0\in F(x_1,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0})$．又因对任一$\beta$，$f(x_\beta,y_\beta)\leqslant\lambda_{n_1}$，由$f$的下半连续性得知$f(x_0,y_0)\leqslant\lambda_{n_1}$，即$y_0\in F(x_0,\lambda_{n_1})$，从而

$$y_0\in F(x_0,\lambda_{n_1})\cap F(\lambda_{n_1})\subset F(x_2,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}).$$

故 $y_0\in\bigcap_{i=1}^{2}(F(x_i,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}))$．这与$\bigcap_{i=1}^{2}(F(x_i,\lambda_{n_0})\cap F(\lambda_{n_0}))=\phi$相矛盾．证毕.

注 定理3也推广了Konig[3，定理1.3]，并且回答了[3]中提出的一个公开问题.

定理4 设X是一拓扑空间，Y是一紧扑空间，$f:X\times Y\to\bar{R}$上半连续，λ_0，$\{\lambda_m\}$同定理3中者．又设定理2中的条件(iii)$_1$～(iii)$_4$中之一满足．则有

$$\sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}f(x,y)=\inf_{x\in X}\sup_{y\in Y}f(x,y).$$

证 对$-f(x,y)$应用定理3.

注 在定理1中，若$X=Y$，$\lambda_0=\sup_{x\in X}f(x,x)$，而其余条件不变，则有

$$\inf_{y\in X}\sup_{x\in X}f(x,y)\leqslant\sup_{x\in X}f(x,x).$$

对定理2～4也有类似的结果.

三、公 开 问 题

最后我们提出下面的公开问题："在定理3中，如果代$f:X\times Y\to\bar{R}$的下半连续以$y\mapsto f(x,y)$，及$x\mapsto f(x,y)$的下半连续性，问结论是否仍成立"？

参 考 文 献

[1] J. Kindler, On a minimax theorem of Terkelsen's, *Arch. Math.*, **55**(1990), 573—583.

[2] J. Kindler and R. Trost, Minimax theorems for interval spaces, *Acta Math. Hung.*, **54**(1989), 39—49.

[3] H.König, A general minimax theorem based on cnnnectedness, *Arch. Math.*, **59**(1992), 55—64.

[4] B. Ricceri, Some topological minimax theorems via an alternative principle for multi-functions, *Arch. Math.*, **60**(1993), 367—377.

[5] S. Simons, On Terkilsen's minimax theorem, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.*, **18**(1990), 35—39.

[6] S. Simons, An upward-downward minimax theorem, *Arch. Math.*, **55**(1990), 275—279.

[7] M. Sion, On general minimax theorem, *Pacific J. Math.*, **8**(1958), 171—176.

[8] H. Tuy, On a general minimax theorem, *Soviet Math. Dokl.*, **15**(1974), 1689—1693.

[9] Wu Wentsun, A remark on the fundamental theorem in the theory of games, *Sci Rec.* (N. S), **3**(1959), 229—233.

A General Topological Version of Minimax Theorem

Zhang Shisheng

(*Sichuan University, Chengdu* 610064)

Zhang Xian

(*Anhui Normal University, Wuhu* 421000)

Abstract

A more general topological version of minimax theorem including the main results in König [3] as its special cases is given, and an open question suggested in König[3]is answered.

Key words minimax, theorem, connected set