应用数学和力学，第16卷 第7期（1995年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Чаплыгин 系统平衡状态的稳定性*

朱海平　史荣昌　梅凤翔

（北京理工大学应用力学系，北京 100081）

（樊大钧推荐，1994年6月24日收到）

摘　要

考虑 Чаплыгин 系统平衡状态的稳定性。给出 Чаплыгин 系统的运动方程及其平衡状态的存在性条件，得到 Чаплыгин 系统平衡状态的一些稳定性判据，最后举例说明其应用。

关键词　分析力学　非完整系统　稳定性

一、引　　言

非完整系统动力学的稳定性问题是分析力学中的一个重要课题。自从Whittaker 于1904年首先提出并研究非完整系统小振动和平衡状态稳定性以来，非完整系统的稳定性问题一直受到许多学者的关注，并得到了一些有价值的成果[1~4]。Bottema，Айзерман 和 Гантмахер[1]，Румянцев Неймарк 和 Фуфаев[2]，Карапетян[3]等研究了具有线性，齐次定常的非完整约束系统；文献[4]研究了非线性非完整系统，并得到了一个重要成果。然而，以往的结果还有很大的局限性，特别是非线性非完整系统，至今结果很少。本文研究 Чаплыгин 系统平衡状态的稳定性，这类 Чаплыгин 系统是指非线性非完整约束下的系统，它是最初线性非完整约束下的 Чаплыгин 系统的推广。首先，给出 Чаплыгин 系统的运动方程及其平衡状态的存在性条件，并指出平衡状态不是孤立的，而组成维数为非完整约束数目的流形；其次，得到 Чаплыгин 系统平衡状态的一些稳定性判据；最后，举例说明其应用。

二、Чаплыгин 系统的运动方程及其平衡状态的存在性

设力学系统由n个广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$来确定，系统的运动受有 g 个非线性非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_\sigma,\ \dot{q}_\sigma,\ t)\quad\begin{pmatrix}\beta=1,2,\cdots,\ g;\ \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon\\ \varepsilon=n-g\end{pmatrix}\tag{2.1}$$

约束(2.1)中不含广义坐标$q_{\varepsilon+\beta}$，假设系统的动能和力函数中都不显含$q_{\varepsilon+\beta}(\beta=1,\cdots,g)$，即

* 国家自然科学基金资助项目，高校博士点专项科研基金资助课题。

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s,k=1}^{n}a_{sk}(q_\sigma,t)\dot{q}_s\dot{q}_k, \qquad U=U(q_\sigma,t)$$

这时，系统的运动方程可表为广义 Чаплыгин 方程的形式

$$E_\sigma(T^*)-\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^* E_\sigma(\varphi_\beta)=\frac{\partial U}{\partial q_\sigma} \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{2.2}$$

其中 $E_\sigma=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial}{\partial q_\sigma}$为 Euler 算子，$T^*$，$\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^*$分别为$T$，$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}$中的$\dot{q}_{\varepsilon+\gamma}$ ($\gamma=1,\cdots,g$)由式(2.1)替代后的表达式．称以上系统为 Чаплыгин 系统[6]．

设系统的功能T，力函数U及约束方程(2.1)都不依赖于时间t．这时，约束方程为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_\sigma,\dot{q}_\sigma) \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{2.3}$$

而运动方程与方程(2.2)有相同的形式．

当系统处于平衡状态时，力函数的变分为零，即

$$\delta U=0 \tag{2.4}$$

从而

$$\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{2.5}$$

方程(2.5)为含有ε个未知量q_σ ($\sigma=1,\cdots,\varepsilon$)的$\varepsilon$个方程，设其解为

$$q_\sigma=q_{\sigma 0} \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{2.6}$$

式(2.6)只是方程(2.2)的平衡状态，考虑到非完整约束的限制，式(2.6)必须满足约束方程(2.3)，故只有当所给非完整约束满足条件

$$\varphi_\beta(q_{\sigma 0},0)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{2.7}$$

时，Чаплыгин 系统才有可能存在平衡状态．若式(2.6)不满足条件(2.7)，那么此系统不存在平衡状态．

考虑到所有广义坐标，系统(2.2)、(2.3)的平衡状态应为$q_\sigma=q_{\sigma 0}$，$\dot{q}_\sigma=0$，$q_{\varepsilon+\beta}=\text{const}$，这样的平衡状态有无数个，它们组成$R^n$内的一个流形

$$\mathscr{L}=\{(q_s,\ \dot{q}_\sigma)\,|\,q_\sigma=q_{\sigma 0},\ \dot{q}_\sigma=0,\ q_{\varepsilon+\beta}\in R\} \tag{2.8}$$

称$\mathscr{L}$为系统的平衡状态流形[2]．

三、Чаплыгин系统平衡状态流形的稳定性

从以上分析可知，Чаплыгин 系统平衡状态流形的稳定性可转化为广义 Чаплыгин 方程(2.2)在其平衡状态 $q_\sigma=q_{\sigma 0}$ 的稳定性，二者有等价的结论．对于一般的非线性非完整系统，没有这一性质．

令

$$q_\sigma=q_{\sigma 0}+\chi_\sigma \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{3.1}$$

其中 χ_σ为扰动量．将式(3.1)代入方程(2.2)中，得到其扰动方程

$$\sum_{h=1}^{\varepsilon}A_{\sigma h}\ddot{\chi}_h+\sum_{h=1}^{\varepsilon}B_{\sigma h}\dot{\chi}_h+\sum_{h=1}^{\varepsilon}C_{\sigma h}\chi_h=X_\sigma \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{3.2}$$

其中

$$A_{\sigma h}=\left\{\frac{\partial^2 T^*}{\partial \dot{q}_\sigma \partial \dot{q}_h}\right\}_0$$

$$B_{\sigma h}=\left\{\frac{\partial^2 T^*}{\partial q_h \partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial^2 T^*}{\partial q_\sigma \partial \dot{q}_h}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^*\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right\}_0$$

$$C_{\sigma h}=\left\{-\frac{\partial^2 T^*}{\partial q_h \partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial}{\partial q_h}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^*\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial^2 U}{\partial q_\sigma \partial q_h}\right\}_0$$

这里$\{\quad\}_0$表示括号内表达式中的q_σ，$\dot{q}_\sigma$用式$q_\sigma=q_{\sigma 0}$，$\dot{q}_\sigma=0$代替，X_σ表示关于$\ddot{\chi}_h$，$\dot{\chi}_h$，χ_h的二阶或二阶以上的小项。

方程(3.2)的近似方程为

$$\sum_{h=1}^{\varepsilon}A_{\sigma h}\ddot{\chi}_h+\sum_{h=1}^{\varepsilon}B_{\sigma h}\dot{\chi}_h+\sum_{h=1}^{\varepsilon}C_{\sigma h}\chi_h=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{3.3}$$

其特征方程为

$$\Delta=\det(A_{\sigma h}\lambda^2+B_{\sigma h}\lambda+C_{\sigma h})=0 \tag{3.4}$$

这样，可根据 Ляпунов 关于首次近似理论来判断方程 (2.2) 在点 $q_\sigma=q_{\sigma 0}$ 处的稳定性。从而，得到 Чаплыгин 系统平衡状态流形的稳定性判据

命题1 若特征方程(3.4)的所有根都具有负实部，则平衡状态流形 (2.8) 是渐近稳定的；若至少有一个具有正实部的根，则平衡状态流形(2.8)是不稳定的。

若矩阵$(C_{\sigma h})$的行列式小于零，则特征多项式$\Delta=\Delta(\lambda)$满足

$$\Delta(0)<0 \tag{3.5}$$

由于矩阵$(A_{\sigma h})$是正定的，故存在充分大的正数$\lambda=\lambda^*$使得

$$\Delta(\lambda^*)>0 \tag{3.6}$$

所以，存在正实数$\lambda_0\in(0,\lambda^*)$，使得$\Delta(\lambda_0)=0$。由命题1，可以得到

推论1 如果 $\det(C_{\sigma h})<0$，那么平衡状态流形(2.8)是不稳定的。

假定约束方程(2.3)的右边函数φ_β满足

$$\varphi_\beta(q_\sigma,0)\equiv 0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{3.7}$$

这时，Чаплыгин 系统平衡状态流形(2.8) 的存在性条件 (2.7) 自然成立。显然，大量的 Чаплыгин 系统都满足条件(3.7)。例如，仅受如下线性非完整约束的系统

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}b_{\varepsilon+\beta,\sigma}(q_h)\dot{q}_\sigma \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;\ h=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{3.8}$$

可以看出约束(3.8)满足条件(3.7)、这就是最初的 Чаплыгин 系统[5]。

在条件(3.7)下，$A_{\sigma h}$，$B_{\sigma h}$，$C_{\sigma h}$分别为

$$A_{\sigma h}=\left\{\frac{\partial^2 T^*}{\partial \dot{q}_\sigma \partial \dot{q}_h}\right\}_0,\quad B_{\sigma h}=0,\quad C_{\sigma h}=-\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial q_\sigma \partial q_h}\right\}_0$$

可以看出，$(A_{\sigma h})^T=(A_{\sigma h})$，$(C_{\sigma h})^T=(C_{\sigma h})$。这时，方程(3.3)变为

$$\sum_{h=1}^{\varepsilon} A_{\sigma h}\ddot{\chi}_h+\sum_{h=1}^{\varepsilon} C_{\sigma h}\chi_h=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{3.9}$$

此方程与完整系统扰动方程的近似方程有相同的形式．这时，利用命题1，很容易地得到

推论2 若矩阵$(C_{\sigma h})$至少有一个负实根，那么平衡状态流形(2.8)是不稳定的．

假定系统受有耗散力F_s的作用

$$F_s=\sum_{h=1}^{n} F_{sh}(q_\sigma)\dot{q}_h \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{3.10}$$

则广义 Чаплыгин 方程(2.2)变为

$$E_\sigma(T^*)-\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^* E_\sigma(\varphi_\beta)=F^*{}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g} F^*_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}+\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{3.11}$$

这时，方程(3.9)的左边应加上一项$\sum_{h=1}^{\varepsilon} B_{\sigma h}\dot{\chi}_h$，变为

$$\sum_{h=1}^{\varepsilon} A_{\sigma h}\ddot{\chi}_h+\sum_{h=1}^{\varepsilon} B_{\sigma h}\dot{\chi}_h+\sum_{h=1}^{\varepsilon} C_{\sigma h}\chi_h=0 \tag{3.12}$$

其中

$$B_{\sigma h}=\{D_{\sigma h}\}_0$$

$$D_{\sigma h}=F_{\sigma h}+\sum_{\gamma=1}^{g} F_{\sigma,\beta+\gamma}\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \dot{q}_h}+\sum_{\beta=1}^{g} F_{\varepsilon+\beta,h}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta,\gamma=1}^{g} F_{\varepsilon+\beta,\varepsilon+\gamma}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \dot{q}_h}$$

方程(3.12)与受有耗散力作用的完整系统扰动方程的近似方程有相同的形式．当耗散力F_s关于独立广义速度$\dot{q}_\sigma$是完全耗散时，矩阵$(B_{\sigma h})$是正定的．类似完整系统，可以得到

命题2 如果矩阵$(C_{\sigma h})$所有特征根都是正的，那么在关于独立广义速度为完全耗散的耗散力作用下，平衡状态流形(2.8)是渐近稳定的．

命题3 如果矩阵$(C_{\sigma h})$至少有一个负根，那么在关于独立广义速度为完全耗散的耗散力作用下，平衡状态流形(2.8)是不稳定的．

可以进一步发展命题2和命题3的结果．

由方程(3.11)得到

$$\ddot{q}_l=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} H^{-1}_{l\sigma}\Bigg[F^*_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g} F^*_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}+\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}-\sum_{h=1}^{\varepsilon}\frac{\partial^2 T^*}{\partial \dot{q}_\sigma \partial q_h}\dot{q}_h$$

$$+\frac{\partial T^*}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^*\left(\sum_{h=1}^{\varepsilon}\frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma \partial q_h}\dot{q}_h-\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)\Bigg]$$

$$(l=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{3.13}$$

其中

$$H_{l\sigma}=\frac{\partial^2 T^*}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^*\frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_\sigma}$$

而$H_{l\sigma}^{-1}$为矩阵$(H_{l\sigma})$的逆矩阵的元素。由式(3.7)可知，方程(3.13)右边括号[ ]中除$\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}$以外，其它各式在$\dot{q}_\sigma=0$处都为零，故可把方程(3.13)表示为

$$\dot{q}_l=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}H_{l\sigma}^{-1}\left(\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{h=1}^{\varepsilon}G_{\sigma h}\dot{q}_h\right)\quad(l=1,2,\cdots,\varepsilon)\tag{3.14}$$

利用方程(3.11)和方程(3.14)，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(T^*-U)&=\frac{d}{dt}\left[\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)^*\dot{q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^*\varphi_\beta-T^*-U\right]\\&=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[E_\sigma(T^*)-\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^*E_\sigma(\varphi_\beta)-\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}\right]\dot{q}_\sigma\\&\quad+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^*\left(\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-\varphi_\beta\right)\\&=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(F_\sigma^*+\sum_{\beta=1}^{g}F_{\varepsilon+\beta}^*\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)\dot{q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\left[\sum_{\sigma,l=1}^{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_l}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^*H_{l\sigma}^{-1}\right.\\&\quad\left.\left(\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{h=1}^{\varepsilon}G_{\sigma h}\dot{q}_h\right)+\sum_{l=1}^{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^*\dot{q}_l\right]\left(\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-\varphi_\beta\right)\\&=\sum_{\sigma,h=1}^{\varepsilon}\left(D_{\sigma h}+\sum_{l=1}^{\varepsilon}E_{\sigma h}^l\frac{\partial U}{\partial q_l}\right)\dot{q}_\sigma\dot{q}_h+X\end{aligned}\tag{3.15}$$

其中

$$E_{\sigma h}^l=\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{\mu=1}^{\varepsilon}H_{\mu l}^{-1}\left(\left.\frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma\partial q_h}\right|_{\dot{q}'=0}\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\mu}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)^*$$

而$\dot{q}'=(\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_\varepsilon)^T$，$X$为关于$\dot{q}_\sigma$的三阶及三阶以上的小项。由于矩阵$(D_{\sigma h})$负定，且

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}\right|_{q_h=q_{h0}}=0\qquad(\sigma,h=1,2,\cdots,\varepsilon)\tag{3.16}$$

故在点$q_\sigma=q_{\sigma0}$的充分小邻域内，矩阵$\left(D_{\sigma h}+\sum_{l=1}^{\varepsilon}E_{\sigma h}^l\frac{\partial U}{\partial q_l}\right)$负定。式(3.15)的右边

$$\sum_{\sigma,h=1}^{\varepsilon}\left(D_{\sigma h}+\sum_{l=1}^{\varepsilon}E_{\sigma h}^l\frac{\partial U}{\partial q_l}\right)\dot{q}_\sigma\dot{q}_h+X$$

关于$\dot{q}_\mu(\mu=1,\cdots,\varepsilon)$是负定的。

假设$q_\sigma=q_{\sigma0}$是孤立的。这时，有结果

命题4 若力函数U在点$q_\sigma=q_{\sigma0}$的充分小领域内是负定的，那么在关于独立广义速度为完全耗散的耗散力作用下，平衡状态流形(2.8)是渐近稳定的。

证明 取 Ляпунов 函数为

$$V=T^*-U$$

因为力函数U负定，故函数V是正定的．由式(3.15)知，$\dot{V}|_{(3.11)}\leqslant 0$，且$\dot{V}|_{(3.11)}$关于$\dot{q}_\sigma$负定．又因为$q_\sigma=q_{\sigma 0}$是孤立的，从而集合$M=\{(q_\sigma,\dot{q}_\sigma)|\dot{V}|_{(3.11)}=0\}$中除点$q_\sigma=q_{\sigma 0}$以外不包含方程(3.11)的其它整条正半轨线．由 Красовский 渐近稳定性定理[6]可知，方程(3.11)在其平衡状态$q_\sigma=q_{\sigma 0}$是渐近稳定的．所以，平衡状态流形(2.8)是渐近稳定的．

类似命题4，利用 Красовский 的不稳定性定理[6]很容易得到

命题5 若力函数U在点$q_\sigma=q_{\sigma 0}$的充分小领域内是非常负的，那么在关于独立广义速度为完全耗散的耗散力作用下，平衡状态流形(2.8)是不稳定的．

证明 取 Ляпунов 函数为

$$V=T^*-U$$

因力函数U非常负，故函数V非常正．由式(3.15)知$\dot{V}|_{(3.11)}\leqslant 0$，又集合$M=\{(q_\sigma,\dot{q}_\sigma)|\dot{V}|_{(3.11)}=0\}$中除点$q_\sigma=q_{\sigma 0}$以外不包含方程(3.11)的其它整条正半轨线，所以，由 Красовский 的不稳定性定理知，方程(3.11)在其平衡状态$q_\sigma=q_{\sigma 0}$不稳定．从而，平衡状态流形(2.8)不稳定．

四、应　　用

例1 设一质点在R^3中运动，其动能为$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$，函数为$U=-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)$，系统的运动受有非完整约束

$$\dot{q}_3=\dot{q}_1\cos q_2+\dot{q}_2\cos q_1-q_1 \tag{4.1}$$

广义 Чаплыгин 方程(2.2)给出

$$\begin{aligned}&(1+\cos^2 q_2)\ddot{q}_1+\ddot{q}_2\cos q_1\cos q_2-\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_2\sin q_2\\&\quad-\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_1\cos q_2-\dot{q}_1\cos q_2+q_1=0\\&\ddot{q}_1\cos q_1\cos q_2+(1+\cos^2 q_1)\ddot{q}_2-\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_1\sin q_1\\&\quad-\dot{q}_1\dot{q}_2\cos q_1\sin q_2-\dot{q}_1\cos q_1+q_2=0\end{aligned} \tag{4.2}$$

系统的平衡状态流形为

$$\mathscr{L}=\{(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,q_3)|q_1=q_2=\dot{q}_1=\dot{q}_2=0,\ q_3\in R\}$$

方程(4.2)的近似方程为

$$\begin{aligned}&2\ddot{q}_1+\ddot{q}_2+q_1-\dot{q}_1=0\\&\ddot{q}_1+2\ddot{q}_2+q_2-\dot{q}_1=0\end{aligned} \tag{4.3}$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix}2\lambda^2-\lambda+1 & \lambda^2\\ \lambda^2-\lambda & 2\lambda^2+1\end{vmatrix}=3\lambda^4-\lambda^3+4\lambda^2-\lambda+1=0 \tag{4.4}$$

解特征方程(4.4)，得

$$\lambda_{1,2}=\pm i,\quad \lambda_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{11}\,i}{6}$$

可以看出，特征方程有两个具有正实部的根．所以，由命题1知，平衡状态流形$\mathscr{L}$是不稳定的．

例1 的结果说明，受有非线性非完整约束的 Чаплыгин 系统不同于文献[1～3]所考虑

的线性非完整系统，力函数负定时，平衡状态流形也有可能不稳定.

例 2 设力学系统的动能为 $T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2-\dot{q}_2\dot{q}_3\sin q_1)$，系统除有势力外，还受有耗散力的作用，其力函数为 $U=-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)$，耗散函数为 $F=\frac{1}{2}(2\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2\sin^2 q_1-2\dot{q}_1\dot{q}_3\sin q_1)$，系统的运动受有非完整约束

$$q_3=\dot{q}_1^2\sin q_2+\cos q_1 \tag{4.5}$$

系统的平衡状态由

$$\delta U=0 \tag{4.6}$$

确定. 由(4.6)得

$$q_1=q_2=0 \tag{4.7}$$

故系统的平衡状态流形为

$$\mathscr{L}=\{(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,q_3)\,|\,q_1=q_2=\dot{q}_1=\dot{q}_2=0,\ \ q_3\in R\} \tag{4.8}$$

因为耗散力关于独立广义速度 $\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$ 为完全耗散，力函数 U 在点 $q_1=q_2=0$ 附近负定. 所以，由命题4知，平衡状态流形(4.8)是渐近稳定的.

参 考 文 献

[1] M. A. Aiserman and, F. R. Gantmacher, Stabilität der gleichgewichtslage in einem nichtholonomen system, *ZAMM*, 37 (1957), 74—75.

[2] Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев, *Динамика Неголономных Систем*, Наука, М. (1967).

[3] А. В. Карапетян, Об устойчивости равновесия неголономных систем, *ПММ*, 39 (6) (1975), 1135—1140.

[4] 梅凤翔, 关于非线性非完整系统平衡状态的稳定性, 科学通报, 37(1) (1992), 82—85.

[5] 梅凤翔, 《非完整系统力学基础》, 北京工业学院出版社, 北京(1985).

[6] Н. Н. Красовский, *Задачи Теории Устойчивости Движения*, Физматгиз, М. (1959).

Stability for the Equilibrium State of Chaplygin's Systems

Zhu Haiping Shi Rongchang Mei Fengxiang

(*Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081)

Abstract

The stability for the equilibrium states of Chaplygin's systems is considered. The equations of motion of Chaplygin's systems and the existence conditions of their equilibrium states are given. Some criteria of stability for the equilibrium states of Chaplygin's systems are obtained. Two exampls are finally given.

Key words analytic mechanics, nonholonomic system, stability