在GTM循环质量链的振动中谱的递增性*

商 朋 见

（北方交通大学应用数学系，北京 100044）

（李骊推荐，1994年5月7日收到）

摘 要

将广义 Thue-Morse 列引入等强度弹簧连结起来的质量链的振动问题，证明了该振动模型对应的线性算子的谱Λ_n具有递增性.

关键词 线性算子 谱 广义Thue-Morse代换 振动方程

一、引 言

在文[1]中，F. Axel等人研究了一维"准合金"的振动模型，深刻指示了Thue-Morse振动链的一些物理意义. 本文将"准合金"模型加以推广，把广义Thue-Morse(简称GTM)列引入等强度弹簧连结起来的质量链的振动问题，根据GTM代换的迹映射性质等证明了该模型对应的线性算子T_n的谱Λ_n具有递增性. 由于线性算子T_n的谱点λ和上述质量链振动的圆频率ω有关系$\lambda=\omega^2$，所以这种递增性有助于更清楚地研究诸如振动的状态密度，扩充态等物理现象的中心量.

二、记 号 和 定 义

设$A=\{0,1\}$，称有限序列$x=x_1x_2\cdots x_n$，$x_i\in A(i=1,2,\cdots,n)$为A上的一个词. 词$x=x_1x_2\cdots x_n$的长度n为$|x|$. A上词的集合记为A^*. 两个词的毗连（即首尾相接）作为乘法，被赋于算法后，A^*就成为一个半群.

我们称从A到A^*上的一个映射σ为A上的一个代换. 这映射σ按下面方式

$$\sigma(x_1x_2\cdots x_n)=\sigma(x_1)\sigma(x_2)\cdots\sigma(x_n)$$

定义了A^*的一个自同态（仍记作σ）. 还可以将σ延拓：令无限词$x=x_1x_2\cdots x_n\cdots$，定义

$$\sigma(x)=\sigma(x_1)\sigma(x_2)\cdots\sigma(x_n)\cdots$$

记σ^n为σ的n次迭代，即$\sigma^n(0)=\sigma(\sigma^{n-1}(0))$

定义1 设$A\{0,1\}$，定义σ

$$\sigma(0)=0\ 1$$

$\sigma(1)=1\ 0$

则称σ为A上的Thue-Morse代换，称$e=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma^n(0)$为Thue-Morse序列[2]。

例如，$e=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma^n(0)$的前$n$项为：

$\sigma(0)=0\ 1$

$\sigma^2(0)=0\ 1\ 1\ 0$

$\sigma^3(0)=0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1$

$\sigma^4(0)=0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0$

$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$

定义2 设$A=\{0,1\}$，定义σ

$$\left.\begin{aligned}\sigma(0)&=0^r\ 1^r\\ \sigma(1)&=1^r\ 0^r\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

这里0^r（或1^r）表示r个"0"（或"1"）的重复连结，r是自然数。称σ为广义Thue-Morse代换。称$e=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma^n$为广义Thue-Morse序列（简记为GTM序列）。

定义3 按下列关系定义两个多项式序列$\{V_n(x)\}_{n\in Z}$及$\{U_n(x)\}_{n\in Z}$：

$$\left.\begin{aligned}V_{n+1}(x)+V_{n-1}(x)&=xV_n(x)\\ U_{n+1}(x)+U_{n-1}(x)&=xU_n(x)\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

初始条件为$V_0(x)=2$，$V_1(x)=x$，$U_0(x)=0$，$U_1(x)=1$。

三、振动模型及其对应的线性算子

我们研究的振动模型为：一列循环的等强度弹簧连结的质量链的振动。如下图1：

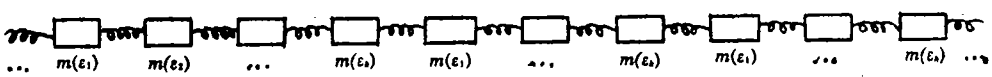

图 1

其中 $\varepsilon=(\varepsilon_j)_{j\geq 1}$为$A=\{0,1\}$上的GTM列，循环链的周期 $K=|\sigma^n(0)|=(2r)^n(n\in N)$，就是说，这个由等强度弹簧连结的循环质量链是由两种不同的质量$m(0)$和$m(1)$组成的，且按序列$\sigma^n(0)$的次序排列。

若记$m(\varepsilon_j)=m_j$，质量m_j的位移记为x_j，则该振动列的振动方程为

$$m_j\frac{d^2x_j}{dt^2}=x_{j+1}+x_{j-1}-2x_j\qquad(j\in Z/kZ)\tag{3.1}$$

其中 $X\doteq(x_1,x_2,\cdots,x_k)$定义在$R^k$上，且假设$X\in l^2(Z/kZ)$。这里 Z/kZ 表示模k的剩余类环。意思是，若n_1-n_2为k的整数倍，则$x_{n_1}=x_{n_2}$，$m_{n_1}=m_{n_2}(n_1,n_2\in Z)$。

令 $y_j=x_jm_j^{\frac{1}{2}}$，我们得到循环质量链的振动方程(3.1)式的等价方程

$$\frac{d^2y_j}{dt^2}=\frac{y_{j+1}}{\sqrt{m_jm_{j+1}}}-2\frac{y_j}{m_j}+\frac{y_{j-1}}{\sqrt{m_{j-1}m_j}}\qquad(j\in Z/kZ)\tag{3.2}$$

由此得$l^2(Z/kZ)$上的线性算子T_n：

$$(T_n y)_j = -\frac{y_{j+1}}{\sqrt{m_j m_{j+1}}} + \frac{2y_j}{m_j} - \frac{y_{j-1}}{\sqrt{m_j m_{j-1}}} \qquad (j\in Z/kZ) \tag{3.3}$$

不难验证T_n是正算子．记线性算子T_n的谱为Λ_n．设$\lambda\in\Lambda_n$，即决定一个非负实数λ，使得存在一个非零向量$X\in l^2(Z/kZ)$满足$T_nX=\lambda X$，即

$$-\lambda m_j x_j = x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1} \qquad (j\in Z/kZ) \tag{3.4}$$

实际上，(3.4) 式也可以这样理解：要使上述振动系统能进行下去，必须使各质量的振动周期一致，即各质量的振动的圆频率均相同（记为ω）：

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = -\omega^2 x_j$$

再记$\lambda=\omega^2$，因此(3.4)式和(3.1)式等价．把(3.4)式写成转移矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} x_{j+1} \\ x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda m_j & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_j \\ x_{j-1} \end{bmatrix} \qquad (j\in Z/kZ) \tag{3.5}$$

记

$$P_n(\lambda) = \begin{bmatrix} 2-\lambda m_n & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2-\lambda m_{n-1} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} 2-\lambda m_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

注意到循环链的循环性及T_n的对称性容易证明下面的命题．

命题（1） $\lambda\in\Lambda_n \Longleftrightarrow 1$是$P_n(\lambda)$的特征根，且对应的特征向量为$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$；

（2） 对任意固定的$\lambda\in R$，满足(3.4)式的X的解空间的维数至多为2；

（3） 算子T_n的特征根（称T_n的谱点）λ的重数至多为2．

（4） T_n有二重特征根$\lambda \Longleftrightarrow P_n(\lambda)=I$（$I$为二阶单位阵）．

证明 (1) 利用(3.4)、(3.5)两式及循环性条件；(2) 把(3.4)式写成关于x_1，x_2，$x_3\cdots x_k$的线性方程组，再考虑其系数矩阵的秩；(3)注意线性算子T_n对应的矩阵可以对角化；(4) 利用(1)及线性方程组解与系数矩阵的关系．

四、若 干 引 理

设$\{V_n(x)\}_{n\in Z}$及$\{U_n(x)\}_{n\in Z}$是(2.2)式定义的两个多项式序列，它们有下面性质．

引理4.1 （1） $V_n(x)=xU_n(x)-2U_{n-1}(x) \qquad (n\in Z)$

（2） $U_{k+l}(x)U_{k-l}(x)=U_k^2(x)-U_l^2(x) \qquad (k,l\in Z)$

（3） 若对$r\in N$，$x_0\in R$，$U_r(x_0)=0$，则$U_{2r}(x_0)=0$

证明 用定义(2.2)和数学归纳法易证(1)和(2)；我们下面证明 (3)：考虑到$U_r(x_0)=0$，则有下列递推公式

$$U_{r+2}(x_0)=x_0U_{r+1}(x_0)=U_2(x_0)U_{r+1}(x_0)$$
$$U_{r+3}(x_0)=x_0U_{r+2}(x_0)-U_{r+1}(x_0)=U_3(x_0)U_{r+1}(x_0)$$
$$U_{r+4}(x_0)=x_0U_{r+3}(x_0)-U_{r+2}(x_0)=U_4(x_0)U_{r+1}(x_0)$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$U_{2r}(x_0)=x_0U_{2r-1}(x_0)-U_{2r-2}(x_0)=U_r(x_0)U_{r+1}(x_0)$$

即 $U_{2r}(x_0)=U_r(x_0)U_{r+1}(x_0)=0$.

引理4.2 若A是一个2×2矩阵且$\det(A)=1$，则对所有$n\in Z$，$A^n=U_n(\mathrm{tr}A)A-U_{n-1}(\mathrm{tr}A)I$。特别，$\mathrm{tr}A^n=V_n(\mathrm{tr}A)$。

证明 由$U_n(x)$和$V_n(x)$的递推性及Hamilton-Caylay定理不难推出。

引理4.3 设M_0，M_1是两个2×2矩阵，且$\det(M_0)=\det(M_1)=1$，$\mathrm{tr}M_0=a$，$\mathrm{tr}M_1=b$，$\mathrm{tr}(M_0M_1)=C$，则$\mathrm{tr}(M_0^nM_1^n)=U_n(a)U_n(b)C-U_{n+1}(a)U_{n-1}(b)-U_{n-1}(a)U_{n+1}(b)$ $(n\in Z)$。

证明 据引理4.2，

$$M_0^n=U_n(\mathrm{tr}M_0)M_0-U_{n-1}(\mathrm{tr}M_0)I$$

$$M_1^n=U_n(\mathrm{tr}M_1)M_1-U_{n-1}(\mathrm{tr}M_1)I$$

所以

$$\begin{aligned}M_0^nM_1^n=&U_n(\mathrm{tr}M_0)U_n(\mathrm{tr}M_1)M_0M_1+U_{n-1}(\mathrm{tr}M_0)U_{n-1}(\mathrm{tr}M_1)I\\&-U_n(\mathrm{tr}M_0)U_{n-1}(\mathrm{tr}M_1)M_0-U_n(\mathrm{tr}M_1)U_{n-1}(\mathrm{tr}M_0)M_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(M_0^nM_1^n)=&U_n(a)U_n(b)C+2U_{n-1}(a)U_{n-1}(b)\\&-U_n(a)U_{n-1}(b)a-U_n(b)U_{n-1}(a)b\\=&U_n(a)U_n(b)C-U_{n-1}(b)[aU_n(a)-U_{n-1}(a)]\\&-U_{n-1}(a)[bU_n(b)-U_{n-1}(b)]\end{aligned}$$

由递推公式

$$aU_n(a)-U_{n-1}(a)=U_{n+1}(a)$$

$$bU_n(b)-U_{n-1}(b)=U_{n+1}(b)$$

因此

$$\mathrm{tr}(M_0^nM_1^n)=U_n(a)U_n(b)C-U_{n+1}(a)U_{n-1}(b)-U_{n-1}(a)U_{n+1}(b)$$

为以后证明T_n的谱Λ_n的递增性，我们还需要几个关于GTM列的迹映射性质的引理。

设$A=\{0,1\}$，对于$\alpha\in A$及$\lambda\in R$，记

$$M(\alpha,\lambda)\doteq\begin{bmatrix}2-\lambda m(\alpha) & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

及
$$P_k(\lambda)\doteq M((\sigma^n(0))_{|\sigma^n(0)|},\lambda)\cdot M((\sigma^n(0))_{|\sigma^n(0)|-1},\lambda)\cdots M((\sigma^n(0))_1,\lambda)$$

这里σ是(1.1)式定义的GTM代换，$k=|\sigma^n(0)|=(2r)^n$，$(\sigma^n(0))_j$表示词$\sigma^n(0)$的第j个元素$(1\leqslant j\leqslant|\sigma^n(0)|)$。

由第三节的命题，Λ_n的元素就是方程$\mathrm{tr}P_k(\lambda)=2$的根。一般来讲，直接计算$\mathrm{tr}P_k(\lambda)$是较困难的，值得令人欣慰的是文[3]已经证明，这时只须迭代一个从R^3到R^3的多项式映射。实际上，我们还可证明，当σ为GTM代换时，一切事情可以在R^2上去做，即引理3.5。

设ξ是$A=\{0,1\}$上的一个代换，$M=(M_0,M_1)$是一对2×2矩阵且$\det(M_0)=\det(M_1)=1$，J_M是A^*到2×2矩阵的集合上的映射，定义如下：

i) $J_M(0)=M_0$，$J_M(1)=M_1$；

ii) 若w_1，$w_2\in A^*$，则$J_M(w_1w_2)=J_M(w_2)J_M(w_1)$。

显然，若取$\xi=\sigma$ (GTM代换)，$M_0=M(0,\lambda)$，$M_1=M(1,\lambda)$，则$J_M(\xi^n(0))=J_M(\sigma^n(0))=P_k(\lambda)$。

引理4.4[3] 若ξ是$A=\{0,1\}$上某代换，则对于任意M，存在多项式映射θ：$R^3\to R^3$，使得

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{tr}J_M(\xi(0)),\ \mathrm{tr}J_M(\xi(1)),\ \mathrm{tr}J_M(\xi(0\ 1)))\\
&\quad=\theta(\mathrm{tr}J_M(0),\ \mathrm{tr}J_M(1),\ \mathrm{tr}J_M(01)),\ \text{并且}\\
&(\mathrm{tr}J_M(\xi^n(0)),\ \mathrm{tr}J_M(\xi^n(1)),\ \mathrm{tr}J_M(\xi^n(0\ 1)))\\
&\quad=\theta^n(\mathrm{tr}J_M(0),\ \mathrm{tr}J_M(1),\ \mathrm{tr}J_M(0\ 1))
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

这里ξ^n为ξ的n次复合，θ^n为θ的n次复合.

据引理4.4，马上有

$$\mathrm{tr}P_k(\lambda)=\mathrm{tr}J_M(\sigma^n(0))=\theta^n(\mathrm{tr}J_M(0),\mathrm{tr}J_M(1),\mathrm{tr}J_M(0\ 1))\text{的第一项} \tag{4.2}$$

其中 σ为GTM代换，$k=|\sigma^n(0)|$. 下面，我们求关于GTM代换σ的映射函数θ.

令$a=\mathrm{tr}M_0$，$b=\mathrm{tr}M_1$，$c=\mathrm{tr}M_0M_1$，另外注意$M_0=M(0,\lambda)$，$M_1=M(1,\lambda)$，则

$$
\begin{aligned}
\theta(a,b,c)&=(\mathrm{tr}J_M(\sigma(0)),\mathrm{tr}J_M(\sigma(1)),\mathrm{tr}J_M(\sigma(0\ 1)))\\
&=(\mathrm{tr}(M_0^rM_1^r),\mathrm{tr}(M_1^rM_0^r),\mathrm{tr}(M_0^{2r}M_1^{2r}))
\end{aligned}
$$

再记

$$
\begin{aligned}
\Phi_n(\alpha,\beta,\gamma)=&U_n(\alpha)U_n(\beta)\gamma-U_{n+1}(\alpha)U_{n-1}(\beta)\\
&-U_{n-1}(\alpha)U_{n+1}(\beta)\qquad(n\in Z)
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

这里$\{U_n(x)\}_{n\in Z}$为(2.2)式所定义. 据引理4.3，立即有

$$\theta(a,b,c)=(\Phi_r(a,b,c),\Phi_r(a,b,c),\Phi_{2r}(a,b,c)) \tag{4.4}$$

引理4.5 若令$(z_1,z_1,z_2)=(\Phi_r(a,b,c),\ \Phi_r(a,b,c),\ \Phi_{2r}(a,\ b,\ c))$，记$g(\xi_1,\ \xi_2)=(\Phi_r(\xi_1,\xi_1,\xi_2),\ \Phi_{2r}(\xi_1,\xi_1,\xi_2))$，则$\theta^{l+1}(a,\ b,\ c)=(U,U,V)$，其中$(U,\ V)=g^l(z_1,z_2)$. $(l\in N,l\geqslant 1)$.

证明 当$l=1$时，由(4.4)式 $\theta(a,b,c)=(z_1,z_1,z_2),\theta^2(a,b,c)=\theta(z_1,z_1,z_2)=(\Phi_r(z_1,z_1,z_2),\Phi_r(z_1,z_1,z_2),\Phi_{2r}(z_1,z_1,z_2))=(U,U,V)$其中$(U,V)=(\Phi_r(z_1,z_1,z_2),\ \Phi_{2r}(z_1,z_1,z_2))=g(z_1,z_2)$.

假设$l=k$时引理成立，$\theta^{k+1}(a,b,c)=(U,U,V)$，其中$(U,V)=g^k(z_1,z_2)$,则$\theta^{k+2}(a,b,c)=\theta(U,U,V)=(\Phi_r(U,U,V),\Phi_r(U,U,V),\ \Phi_{2r}(U,U,V))=(U',U',V')$ 其中 $(U',V')=(\Phi_r(U,U,V),\ \Phi_{2r}(U,U,V))=g(U,V)=g^{k+1}(z_1,z_2)$.故$l=k+1$时也成立.

五、谱Λ_n的递增性

定理 谱序列$\{\Lambda_n\}_{n\geq 1}$是递增的.

证明 根据第三节的命题(1)，第四节引理4.4得到的(4.2)式，以及引理4.5，可知下列条件等价：

(1) $\lambda\in\Lambda_n$;

(2) $\mathrm{tr}P_k(\lambda)=2$ $(k=|\sigma^n(0)|)$;

(3) $\theta^n(a,b,c)$的第一项为2 (θ^n表示θ的n次复合，即$\theta^n=\theta(\theta^{n-1})$);

(4) $g^{n-1}(z_1,z_2)$ 的第一项为2 (g^{n-1}表示g的$n-1$次复合，即 $g^{n-1}=g(g^{n-2})$).这里$a=\mathrm{tr}M_0$，$b=\mathrm{tr}M_1$，$c=\mathrm{tr}(M_0M_1)$，$z_1=\Phi_r(a,b,c),z_2=\Phi_{2r}(a,b,c)$，$\Phi_n$的定义见(4.3)式，$\theta$的定义见(4.4)式. 设平面曲线

$$\Omega: \begin{cases} x=\Phi_r(a,b,c)\doteq f_1(\lambda) \\ y=\Phi_{2r}(a,b,c)\doteq f_2(\lambda) \end{cases} \qquad (\lambda\text{是参数})$$

且记 $E_n=g^{-n}(x=2)$，即二维平面内的直线$x=2$在n次复合函数g^n下的逆像．因此，

$$\Lambda_n=\{\lambda|(f_1(\lambda),f_2(\lambda))\in\Omega\cap E_{n-1}\} \tag{5.1}$$

据(4.3)式及引理4.1，

$$\begin{aligned}\Phi_r(x,x,y)&=U_r^2(x)y-2U_{r+1}(x)U_{r-1}(x)\\&=U_r^2(x)y-2[U_r^2(x)-U_1^2(x)]\\&=(y-2)U_r^2(x)+2.\end{aligned}$$

$$\Phi_{2r}(x,x,y)=(y-z)U_{2r}^2(x)+2.$$

按引理4.5的记号，$g(x,y)=(\Phi_r(x,x,y),\Phi_{2r}(x,x,y))$，所以

$$E_1=\{(x,y)|(y-2)U_r^2(x)=0\}$$

$$E_2=\{(x,y)|(y-2)U_{2r}^2(x),U_r^2((y-2)U_r^2(x)+2)=0\}$$

据引理4.1，$E_1\subset E_2$．令$G=E_2\backslash E_1$，即有

$$E_2=E_1\cup G \quad \text{且} \quad E_1\cap G=\phi$$

这样

$$E_{n+2}=g^{-n}(E_2)=g^{-n}(E_1)\cup g^{-n}(G)=E_{n+1}\cup g^{-n}(G)$$

所以

$$\Lambda_n\subseteq\Lambda_{n+1}.$$

参 考 文 献

[1] F. Axel, J. P. Allouche, M. Kléman, M. Mendes-France and J. Peyrière. Vibratinal modes in a one dimensional "quasi-alloy": the Morse Case. J. de physique, Collogue C_3, Supp. au n°7, 47,(1986), 181—186.

[2] M. Queffelee. *Lecture Notes in Mathematics*, No. 1294(1987).

[3] J. P. Allouche and J. Peyrière, Sur une formule de récurrence sur les traces de produits de matrices associés à certaines substitutions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **302**, Série I (1986), 1135—1136.

Increasing Property of Spectrum in the Vibrations of a Cyclic Chain of Masses Distributed According to the GTM Sequence

Shang Pengjian

(Department of Applied Mathematics, Northern Jiaotong University, Beijing 100044)

Abstract

Generalized Thue-Morse sequences are introduced into vibrational question of a chain of masses linked by springs of constant strength, and increasing property is proven of spectrum Λ_n of linear operator Tn about the vibrational model.

Key words linear operator, spectrum, generalized Thue-Morse substitution, vibrational equation