应用数学和力学，第16卷 第7期（1995年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 关于线性互补问题解的存在性*

寇 述 舜

（天津大学数学系，天津 300072）

（潘立宙推荐，1994年10月25日收到）

**摘 要**

讨论线性互补问题解的存在性．证明关于解的唯一性定理．用反例表明：对于线性互补问题解的存在性，"$\boldsymbol{M}$是半正定矩阵"既不是充分条件，也不是必要条件．

**关键词** 线性互补问题 互补基本可行解 存在性 Lemke互补转轴算法

## 一、引 言

线性互补问题是数学规划中与凸二次规划密切相关的重要问题．近二十多年以来国内外许多力学家将弹塑性问题化为线性互补问题，用二次规划法求解，取得许多可喜成果[1]．与此相比，对于解的存在性与唯一性关注较少，而存在性与唯一性是较困难的问题．文献[1]将弹塑性问题化为线性互补问题之后提出了解的存在性与唯一性问题，并指出："对于线性互补问题，只要矩阵$\boldsymbol{M}$是半正定的，解一定存在；若$\boldsymbol{M}$是正定的，解存在且唯一．"[1]其实，"矩阵$\boldsymbol{M}$是半正定矩阵"对于线性互补问题解的存在性并非充分条件，本文将给出一个反例．"若$\boldsymbol{M}$是正定的，则解存在且唯一．"这一命题是正确的，但未见证明．本文将给出一个简单证明．为便于讨论，便于应用，先将有关解的存在性、唯一性的研究结果归纳成四个定理，然后给出两个算例．

## 二、概 念 与 定 理

线性互补问题是：求$\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{z}\in R^p$满足[2,3,4]

$$\text{(LCP)}\qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{w}-\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{q} &\quad (2.1)\\ &\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{z}\geqslant 0 &\quad (2.2)\\ &\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{z}=0 &\quad (2.3)\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{M}$为已知$p\times p$矩阵，$\boldsymbol{q}\in R^p$．

**定义1** 若($\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{z}$)满足式(2.1)，(2.2)，(2.3)，则称为互补可行解[3]，简称为解．

**定义2** 若($\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{z}$)是式(2.1)、(2.2)的基本可行解，并且满足式(2.3)，则称($\boldsymbol{w}$,$\boldsymbol{z}$)为

* 1993年9月14日收到初稿．

互补基本可行解 (complementary basic feasible solution)[2,4]。

**定理1** **(存在性定理)** 设

1° $\forall \boldsymbol{z}\geqslant 0$均有$\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}\geqslant 0$，而且$\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}=0$ ($\boldsymbol{z}\geqslant 0$)蕴涵$(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^T)\boldsymbol{z}=0$;

2° 每一个准互补基本可行解 (almost complementary basic feasible solution) 均非退化。

若式(2.1)与(2.2)相容，则 Lemke 互补转轴算法在有限步内终止于互补基本可行解（因而，互补基本可行解存在）；若式 (2.1) 与 (2.2) 不相容，则算法终止于射线 (ray termination)[2,4]。

**定理2** 若 (LCP) 中矩阵$\boldsymbol{M}$是半正定矩阵，则定理1中的条件1°成立[4]。

**定理3** 设(LCP)有解。若$\boldsymbol{M}$是半正定矩阵，则 Lemke 互补转轴算法在有限步内终止于一个互补基本可行解（在非退化意义下，由定理2可证得）。

**定理4** **(唯一性定理)** 若 (LCP)中$\boldsymbol{M}$是正定矩阵，则互补可行解存在且唯一[1]。

**证** 因为$\boldsymbol{M}$是正定矩阵，所以二次规划

$$\min f(\boldsymbol{z})=\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{z}\,(\text{s.t. }\boldsymbol{z}\geqslant 0)$$

是严格凸二次规划，它的最优解$\boldsymbol{z}^*$存在且唯一。因而，存在唯一的$\boldsymbol{w}^*$满足K-T条件

$$\boldsymbol{w}^*-\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}^*=\boldsymbol{q}$$
$$\boldsymbol{w}^*,\ \boldsymbol{z}^*\geqslant 0$$
$$\boldsymbol{w}^{*T}\boldsymbol{z}^*=0$$

由此可知，$(\boldsymbol{w}^*,\ \boldsymbol{z}^*)$是 (LCP) 的唯一互补可行解。

**推论** 设 (LCP)中$\boldsymbol{M}$是正定矩阵。若每一个准互补基本可行解均非退化，则 Lemke 互补转轴算法在有限步内终止于互补基本可行解，而且 (LCP) 的互补基本可行解是唯一的。

**证** 因为$\boldsymbol{M}$是正定矩阵，所以定理1中的条件1°成立，而且式(2.1)与(2.2)相容。再由定理1与定理4可得欲证。

## 三、例

**例 1** 设

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}-2\\ -4\end{pmatrix}.$$

试解线性互补问题 (LCP)。

**解** 用 Lemke 互补转轴算法解之 (见表 1)。迭代两次后，下次迭代 $z_1$应当进基，而与$z_1$ 对应的列中无正元素，因而迭代终止于射线

$$\{(\boldsymbol{w}^T,\boldsymbol{z}^T,z_0)=(0,0,0,1,3)+\lambda(0,0,1,1,0)\,|\,\lambda\geqslant 0\}.$$

显然，$\boldsymbol{M}$是半正定矩阵，而且所有准互补基本可行解均非退化。为什么找不到互补基本可行解？因为该线性互补问题(LCP)无解（可以验证式(2.1)与(2.2)不相容）。

**表 1**

| 基 | $w_1$ | $w_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_0$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | [illegible] | 0 | $-1$ | 1 | $-1$ | $-2$ |
| $w_2$ | 0 | 1 | 1 | $-1$ | $(-1)$ | $-4$ |
| $w_1$ | 1 | $-1$ | $-2$ | (2) | 0 | 2 |
| $z_0$ | 0 | $-1$ | $-1$ | 1 | 1 | 4 |
| $z_2$ | 0.5 | $-0.5$ | $-1$ | 1 | 0 | 1 |
| $z_0$ | $-0.5$ | $-0.5$ | 0 | 0 | 1 | 3 |

**例2** 设

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}2\\ -6\end{pmatrix}.$$

试解线性互补问题 (LCP).

**解** 用 Lemke 互补转轴算法解之. 迭代两次得互补基本可行解 $\boldsymbol{w}=(13/2,0)^T$, $\boldsymbol{z}=(0,3/2)^T$.

然而, $\boldsymbol{M}$却不是半正定矩阵.

本例表明: "$\boldsymbol{M}$是半正定矩阵"也不是 (LCP) 有解的必要条件.

## 四、结　束　语

若$\boldsymbol{M}$是正定矩阵, 则线性互补问题 (LCP) 具有唯一的互补可行解. 设 (LCP) 有解. 若$\boldsymbol{M}$是半正定矩阵, 则用 Lemke 互补转轴算法必定能够在有限次迭代内得到一个互补基本可行解 (在非退化意义下). 然而, "$\boldsymbol{M}$是半正定矩阵"并非"线性互补问题有解" 的充分条件, 也不是必要条件.

根据实际问题建立起线性互补问题之后, 最好先由物理、力学等有关理论判定解的存在性, 或判定式 (2.1) 与 (2.2) 的相容性, 然后求解. 如果难以判定, 而$\boldsymbol{M}$的半正定性已经证明, 那么也可以试用 Lemke 互补转轴算法求解, 根据所得结果判定解的存在性.

## 参　考　文　献

[1] 朱昌铭、金永杰, 一种基于虚功原理的求解弹塑性问题的有限元——数学规划法, 应用数学和力学, 14(7)(1993), 601—608.

[2] M. S. Bazaraa and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, New York, John Wiley & Sons, Inc., (1979), 437—453.

[3] G. V. Reklaitis, etc., *Engineering Optimization, Methods and Applications*, New York, John Wiley & Sons, Inc., (1983), 486—494.

[4] 寇述舜, 《凸分析与凸二次规划》, 天津大学出版社, 天津 (1994), 157—173.

# The Existence of the Solution for Linear Complementary Problem

Kou Shushun

*(Dept. of Math., Tianjin University, Tianjin* 300072)

**Abstract**

This paper deals with the existence of the solution for linear complementary problem. The uniqueness theorem of the solution for linear complementary problem is proved. Two examples are given. They show that "M is positive semidefinite" neither suficient nor necessary condition for the existence to the solution of linear complementary problem.

**Key words** linear complementary problem, complementary basic feasible solution, existence, Lemke's complementary pivoting algorithm