应用数学和力学，第16卷 第7期（1995年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 重调和扰动问题的无穷多解*

戴 求 亿

（湘潭矿业学院，湘潭 411201）

（张鸿庆推荐，1995年3月5日收到）

摘 要

本文考虑有界区域中具有零边值条件的重调和扰动问题．所得结论包含了[1][3][4]中的相应结果．

**关键词** 重调和算子 广义 Morse指标 非平凡解．

## 一、引 言

设$\Omega\subset R^N$是有界光滑区域，考虑重调和扰动问题：

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}\Delta^2u-a\Delta u+bu=g(x,u)+f(x,u) & (\text{在}\Omega\text{内})\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & (\text{在}\partial\Omega\text{上})\end{cases}$$

其中 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，$n$为$\partial\Omega$的的外法线方向，$g(x,u)$和$f(x,u)$满足如下条件：

($g_1$) $g(x,s)\in C(\bar\Omega\times R,\ R)$．且对一切$x\in\bar\Omega$，$g(x,s)$是关于$s$的$C^1$奇函数．即$g'_s(x,s)$存在且$g(x,-s)=-g(x,s)$

($g_2$) 存在常数$0<\mu<1$，$s_0>0$使当$s\geqslant s_0$时有：

$$0<\frac{g(x,s)}{s}<\mu g'_s(x,s)\text{对一切}x\in\bar\Omega\text{成立}$$

($g_3$) $\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{g(x,s)}{s^p}=q(x)>0$关于$x$一致成立，$q(x)\in C^\circ(\bar\Omega)$

($f_1$) $f(x,s)\in C(\bar\Omega\times R,R)$且关于$s$可微．

($f_2$) $\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{f'_s(x,s)}{g'_s(x,s)}=l$关于$x\in\bar\Omega$是一致的．其中 $l<1$，$f'_s=\dfrac{\partial f}{\partial s}$，$g'_s=\dfrac{\partial g}{\partial s}$．

($f_3$) $F(x,s)=\int_0^s f(x,t)dt$关于$x$，$s$一致有界．问题(Ⅰ)曾被很多作者研究过，可参看[1][3][4][6]及其中的有关参考文献．在这里我们借助[1]发展起来的扰动方法，通过运用调和分析和 Morse 理论获得了如下较为完善的多解性结果．

**定理1** 设$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$ 为常数．$g(x,s)$满足$(g_1)\sim(g_3)$．$f(x,s)$满足$(f_1)\sim(f_3)$．$p$满

* 1993年11月22日收到初稿．

足：

$$N\geqslant 5\text{时：}\qquad 1<p<\frac{N+4}{N-4}$$

$$N=3,4\text{时：}\qquad 1<p<\frac{N+2}{N-2}$$

$$N\leqslant 2\text{时：}\qquad 1<p<+\infty$$

则问题(Ⅰ)有无穷多个非平凡解。

此结论包含了[1][3][4]中的相应结果。

## 二、预 备 知 识

设$v(x)\geqslant 0$，在这一节里我们考虑如下特征值问题：

$$(\text{Ⅱ})\quad \begin{cases} \Delta^2 u-v(x)u=\lambda u & (\text{在}\Omega\text{内}) \\ u=\dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & (\text{在}\partial\Omega\text{上}) \end{cases}$$

若以$M(v)$表示问题(Ⅱ)在$H_0^2(\Omega)$中的非正特征值个数则我们可证得：

**定理2** 存在仅依赖于$\Omega$和$N$的正常数$c$使得：

$$N\geqslant 5;\ v(x)\in L^{\frac{N}{4}}(\Omega)\text{ 时：}M(v)\leqslant c\|v(x)\|_{L^{N/4}(\Omega)}^{N/4}$$

$$N=3,4;\ v(x)\in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)\text{时：}M(v)\leqslant c\|v(x)\|_{L^{N/2}(\Omega)}^{N/2}$$

$$N\leqslant 2,\ v(x)\in L^{1+\varepsilon}(\Omega)\text{时：}M(v)\leqslant c\|v(x)\|_{L^{1+\varepsilon}(\Omega)}^{1+\varepsilon}$$

为证明定理2，我们先给出如下一些引理。

**引理1**([6]) $M(v)$等于如下特征值问题：

$$\begin{cases} \Delta^2 u=\lambda v(x)u & (\text{在}\Omega\text{内}) \\ u=\dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & (\text{在}\partial\Omega\text{上}) \end{cases}$$

的不大于1的特征值个数。

**引理2**([6]) 若$N\geqslant 5$，$v(x)\in L^{\frac{N}{4}}(\Omega)$，则存在常数$c>0$使得

$$M(v)\leqslant c\|v(x)\|_{L^{N/4}(\Omega)}^{N/4}.$$

设$M(c,v)$表示特征值问题：

$$(\text{Ⅲ})\quad \begin{cases} -\Delta u=\lambda v(x)u & (\text{在}\Omega\text{内}) \\ u=0 & (\text{在}\partial\Omega\text{上}) \end{cases}$$

的不大于$c$的特征值个数，则有：

**引理3** 存在常数$c_0$使得：$M(v)\leqslant M(c_0,v)$.

**证明** 由$H_0^2(\Omega)\hookrightarrow H_0^1(\Omega)$可知存在常数$c$使得

$$\frac{\int_\Omega |\Delta u|^2 dx}{\int_\Omega v(x) u^2 dx} \geqslant \frac{c\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega v(x) u^2 dx}$$

取 $c_0=\frac{1}{c}$，则由引理1和特征值的极小极大性立即可知：$M(v)\leqslant M(c_0,v)$。Q.E.D

**引理4**([7]，[8]) 设$\lambda_k$表示(Ⅱ)的第$k$个特征值，则存在常数$c_1>0$使得

$N>2$，$v(x)\in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ 时：$k\leqslant c_1\lambda_k^{\frac{N}{2}}\|v(x)\|^{N/2}_{L^{N/2}(\Omega)}$

$N\leqslant 2$，$v(x)\in L^{1+\varepsilon}(\Omega)$时：$k\leqslant c_1\lambda_k^{1+\varepsilon}\|v(x)\|^{1+\varepsilon}_{L^{1+\varepsilon}(\Omega)}$

其中 $\varepsilon$为任意正常数。

**定理2的证明** 由引理2可知：我们仅须证$N\leqslant 4$的情形．为此在引理4中令$\lambda_k\leqslant c_0$并取：$c=\max\{c_1c_0^{\frac{N}{2}}, c_1c_0^{1+\varepsilon}\}$则有：$M(c_0, v)\leqslant c\|v(x)\|^q_{L^q(\Omega)}$．再由引理3可得：$M(v)\leqslant M(c_0,v)\leqslant c\|v(x)\|^q_{L^q(\Omega)}$．其中当$N=3$、$4$时$q=\frac{N}{2}$，当$N\leqslant 2$时$q=1+\varepsilon$。Q. E. D.

## 三、对a＝b＝0情形的研究

当$a=b=0$时定解问题(Ⅰ)变为：

$$(\text{Ⅳ})\quad \begin{cases} \Delta^2 u = g(x,u)+f(x,u) & (\text{在}\Omega\text{内}) \\ u=\dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & (\text{在}\partial\Omega\text{上}) \end{cases}$$

设 $H^2_0(\Omega)$ 为具有范数 $\|u\|=[\int_\Omega |\Delta u|^2 dx]^{1/2}$的 Sobolev 空间在 $H^2_0(\Omega)$ 中定义泛函如下：

$$I^*(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx-\int_\Omega G(x,u)\,dx,\quad G(x,u)=\int_0^u g(x,t)\,dt.$$

$$I(u)=I^*(u)-\int_\Omega F(x,u)\,dx,\qquad F(x,u)=\int_0^u f(x,t)\,dt.$$

令：$S=\{u\in H^2_0(\Omega)\mid \|u\|=1\}$

$J^*(v)=\sup\limits_{\lambda>0} I^*(\lambda v)\qquad (\lambda\in R,\ v\in S)$

$J(v)=\sup\limits_{\lambda>0} I(\lambda v)\qquad (\lambda\in R,\ v\in S)$

$S^k=\{x\in R^{k+1}\mid |x|=1\}$

$\Sigma=\{A\subset S\mid A\text{为对称紧集}\}$

$M=\{\text{所有正整数}\}$

对任意的$A\in\Sigma$令：

$\gamma^+(A)=\sup\{k\in M,\ \text{使存在奇映射}h\in C(S^k,A)\}$

$\gamma^-(A)=\inf\{k\in M,\ \text{使存在奇映射}h\in C(A,S^k)\}$

$\Gamma_k=\{A\in\Sigma\mid \gamma^+(A)\geqslant K\}$

$\Gamma^*_k=\{A\in\Sigma\mid \gamma^-(A)\geqslant K\}$

$$c_k=\inf_{A\in\Gamma_k}\max_{u\in A}J^*(u)$$

$$b_k=\inf_{A\in\Gamma^*_k}\max_{u\in A}J^*(u)$$

由[1]知：$c_k>0$是$J^*(u)$的临界值，且 $\lim\limits_{k\to\infty}c_k=+\infty$

令：$\tilde{J}_b=\{u\in S\,|\,J(u)\geqslant b\}\qquad(b\in R)$

$J_a=\{u\in S\,|\,J(u)\leqslant a\}\qquad(a\in R)$

则由[1]有：

**引理5**[[1]] 若泛函$J(v)$，$J^*(v)$满足如下条件：

(i) $J(v)$，$J^*(v)\in C(S,R)$；$J(v)\in C^1(\tilde{J}_a,R)$，$J^*(v)\in C^1(\tilde{J}^*_b,R)$

(ii) $J(v)$满足$(p,s)_a$条件，$J^*(v)$满足$(p,s)_b$条件

(iii) $J^*(v)$是$S$上下有界的偶泛函

(iv) 存在$k\in M$，$\varepsilon>0$，$a\in R$使得：$b\leqslant c_k$且：

$$J^*_{c_k+\varepsilon}\subset J_a\subset J_{a+\varepsilon}\subset J^*_{c_{k+1}-\varepsilon}$$

则$J$在$[a,+\infty)$内至少有一个临界值。

为利用上述临界值摄动定理来证明我们的主要结论，一方面，我们需要如下：

**引理6**[4] 若$g(x,u)$满足$(g_1)\sim(g_3)$；$f(x,u)$满足$(f_1)\sim(f_3)$则 $J(u)$满足$(p.s)_a$条件，$J^*(u)$满足$(p.s)_b$条件，并且$J(u)\in C^1(\tilde{J}_a;\ R)$，$J^*(u)\in C^1(\tilde{J}^*_b,R)$。

另一方面我们需要一个关于$C_k$的下界估计。为此注意到：由$(g_3)$，$L^{p+1}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$和 Hölder 不等式我们有：

$$I^*(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_\Omega G(x,u)dx\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{c}{2}\int_\Omega|u|^{p+1}dx$$

其中 $c$为某一适当的正常数。

令：
$$\Phi(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{c}{2}\int_\Omega|u|^{p+1}dx$$

$$H(u)=\sup_{\lambda>0}\Phi(\lambda u)\qquad(u\in S)$$

$$d_k=\inf_{A\in\Gamma^*_k}\max_{u\in A}H(u)$$

由[11]可知$d_k$是$H(u)$的临界值，且当 $k$ 充分大时$d_k>0$。由$I^*(u)$ 与 $\Phi(u)$之间的关系显然有：

$$d_k\leqslant b_k$$

但由 Borsuk-Ulam 定理有：

$$b_k\leqslant c_k$$

因此有：

$$c_k\geqslant d_k$$

这一不等式表明：为估计$c_k$的下界我们只须估计$d_k$的下界。为此我们来证明如下关键性的引理：

**引理7** 对任意的 $k\in M$充分大，存在$\Phi(u)$的临界点$v_k$使得：

$$\Phi(v_k)=d_k;\ \sigma(v_k)\geqslant k+1$$

其中 $\sigma(v_k)$是$\Phi$在$v_k$处的广义 Morse 指标。即：

$$\sigma(v_k)=\max\{\dim E;\ E\subset H^2_0(\Omega)\text{使}\Phi''(v_k)(e.e)\leqslant 0,\ e\in E\}$$

**证明**　由[2]或[8]的结果我们不妨可以假设$H(u)$在水平$d_k$处仅含有非退化的临界点，注意到$H(u)$是偶泛函因此其临界点成对出现．设$d_k$对应的临界点为：$(u_1,-u_1)$；…；$(u_l,-u_l)$．$m_i$是对应于$u_i$的 Morse 指标．$H_d=\{u\in S\mid H(u)\leqslant d\}$，则由环柄定理(见[9],[12])知：对充分小的$\varepsilon>0$有：

$$H_{d_k+\varepsilon}\simeq H_{d_k-\varepsilon}\cup_{(S^{m_1-1})^\pm}[(D_{m_1})^\pm]\cup_{(S^{m_2-1})^\pm}\cdots\cup_{(S^{m_l-1})^\pm}[(D_{m_l})^\pm]$$

其中　$\cup_{(S^{m_i-1})^\pm}$ 表示 $H_{d_k-\varepsilon}$通过 $(S^{m_i-1})^\pm$ 与 $(D_{m_i})^\pm$ 相粘合即：$H_{d_k-\varepsilon}\cap(D_{m_i})^\pm=(S^{m_i-1})^\pm$，因此我们有：

$$H(u)\leqslant d_k\qquad 对\ u\in(D_{m_i})^\pm$$

$$H(u)\leqslant d_k-\varepsilon\ \ 对\ u\in(S^{m_i-1})^\pm$$

又因为$H(u)$是偶泛函，因此收缩映射可选为奇映射．于是我们可设收缩映射$\gamma$：$[0,1]\times H_{d_k+\varepsilon}\to H_{d_k+\varepsilon}$满足：

(i)　$\gamma(0,u)=u$　　对 $u\in H_{d_k+\varepsilon}$

(ii)　$\gamma(t,-u)=-\gamma(t,u)$　　对 $t\in[0,1]$，$u\in H_{d_k+\varepsilon}$

(iii)　$\gamma(t,u)=u$　对　$u\in Z_k=H_{d_k-\varepsilon}\cup\left[\bigcup_{j=1}^{l}(D_{m_j})^\pm\right]$

(iv)　$\gamma(1,u)\in Z_k$　对　$u\in H_{d_k+\varepsilon}$

由$d_k$的定义我们可选取$A\in\Gamma_k^*$使得：

$$\max_{u\in A}H(u)<d_k+\varepsilon$$

记 $A_1=\gamma(1,A)$，则$A_1\subset Z_k$，于是有：

$$\max_{u\in A_1}H(u)\leqslant d_k$$

因为$\gamma$是奇映射，故$A_1\in\Gamma_k^*$，现令：

$$B=A_1\backslash\overline{\left[\bigcup_{j=1}^{l}(D_{m_j})^\pm\right]}\cup\left[\bigcup_{j=1}^{l}(S^{m_j-1})^\pm\right]$$

显然$B\in\Gamma_k^*$是对称紧集，故可知存在连续奇映射：

$$h:\ B\to S^{k-1}$$

令：　　$h_i^-=h|_{(S^{m_i-1})^\pm}$

并假设：　　$\sup\{m_i\}<k$

则由于$S^{k-1}$的阶数低于$k-1$的同伦群皆为平凡群．故 Eilenberg 扩张定理（见[10]）表明：$h_i^+$可以可张到$D_{m_i}^+$上．而且显然这种扩张可以按奇性的要求在$h_i^-$与$(D_{m_i})^-$之间进行，因此我们最终将得到奇连续映射：

$$\tilde{h}:\ B\cup\left[\bigcup_{j=1}^{l}(D_{m_j})^\pm\right]\to S^{k-1}$$

此即　$\tilde{h}$：$A_1\to S^{k-1}$这显然与$A_1\in\Gamma_k^*$相矛盾．故至少存在一个$1\leqslant i_0\leqslant l$使得：$m_{i_0}\geqslant k$．

最后注意到：若$u_0$是$\Phi(u)$的非平凡临界点则有：

$$H''\left(\frac{u_0}{\|u_0\|}\right)=\lambda(u_0)\Phi''(u_0)$$

其中$\lambda(u_0)$是适当的 Lagrange 乘子．这表明：若$M(u_0)$是$H''(u_0/\|u_0\|)$的非正特征空间，则$\Phi''(u_0)$具有非正特征空间$M(u_0)\oplus Ru_0$，因此对$\Phi$有：$\sigma(\lambda(u_{i_0})u_{i_0})\geqslant k+1$，Q.E.D

**引理8**　存在仅依赖于$\Omega$和$N$的常数$c$使得

$$c_k \geqslant c(k+1)^{\alpha_N}$$

其中 $N\geqslant 5$时，$\alpha_N=\frac{4}{N}\frac{p+1}{p-1}$；$N=3,4$ 时，$\alpha_N=\frac{2}{N}\frac{p+1}{p-1}$；$N\leqslant 2$时，$\alpha_N=\frac{p+1}{p-1+\varepsilon}$，

$\varepsilon>0$为任意小的常数。

**证明** 为证引理8，我们只须对$d_k$给出相应的估计式。由引理7知：当$k$充分大时对 $d_k$存在$v_k$使得：

$$\Phi(v_k)=d_k,\ \Phi'(v_k)=0,\ \sigma(v_k)\geqslant k+1.$$

由 $\Phi'(v_k)=0$得：$\int_\Omega|\Delta v_k|^2dx=(p+1)c\int_\Omega|v_k|^{p+1}dx$ 故有：

$$d_k=\frac{pc}{2}\int_\Omega|v_k|^{p+1}dx>0$$

又由$\sigma(v_k)$的定义可知$\sigma(v_k)$等于算子 $\Delta^2-\frac{cp(p+1)}{2}|v_k|^{p-1}$的非正特征值个数，故由定理1可知：

$$k+1\leqslant\sigma(v_k)\leqslant c\||v_k|^{p-1}\|^q_{L^q(\Omega)}$$

其中 $N\geqslant 5$时，$q=\frac{N}{4}$，$N=3,4$时，$q=\frac{N}{2}$，$N\leqslant 2$ 时，$q=1+\varepsilon$。由此及嵌入定理即可得到：

$$\int_\Omega|v_k|^{p+1}dx\geqslant c(k+1)^{\alpha_N}$$

于是$d_k=\frac{pc}{2}\int_\Omega|v_k|^{p+1}dx\geqslant c(k+1)^{\alpha_N}$。其中$c$为某适当常数，$\alpha_N$ 与引理 8 的取值相同。Q. E. D.

**定理3** 若$g(x,u)$满足$(g_1)\sim(g_3)$，$f(x,u)$满足$(f_1)\sim(f_3)$ $p$满足：

$$N\geqslant 5\text{时；}\qquad 1<p<\frac{N+4}{N-4}$$

$$N=3,4\text{时；}\qquad 1<p<\frac{N+2}{N-2}$$

$$N\leqslant 2\text{时；}\qquad 1<p<+\infty$$

则问题(Ⅳ)有无穷多个非平凡解。

**证明** 由于$F(x,u)$关于$x,u$一致有界，故对任意的$c_k>0$都存在常数$d$使得：

$$J^*_{c_k}\subset J_{c_k+d}\subset J^*_{c_k+2d}$$

于是由引理5，6可知：为证定理3只须证：

$$c_{k+1}-c_k>2d$$

对无穷多个相异的$k$成立。故仅有有限个$k$使上式成立，则当$k$充分大时总有：

$$c_{k+1}-c_k\leqslant 2d$$

于是存在常数$d_1$使得对充分大的$k$总有：

$$c_k\leqslant 2dk+d_1$$

这与定理3的假设及引理8的结论相矛盾。Q. E. D

## 四、对 a≠0、b≠0 的情形的研究

在本节中我们试图将定理 3 的结论推广到更一般的问题（Ⅰ）。沿用第三节的记号：$H_0^2(\Omega)$，$\|\cdot\|$，$S$，$\Sigma$；$\gamma^+(A)$；$\gamma^-(A)$；$\Gamma_k$；$\Gamma_k^*$；$I^*(u)$；$\Phi(u)$；$c_k$；$b_k$；$d_k$等等。令：

$$L^*(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{a}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{b}{2}\int_\Omega u^2dx-\int_\Omega G(x,u)dx$$

$$L(u)=L^*(u)-\int_\Omega F(x,u)dx$$

$$\Psi^*(v)=\sup_{\lambda>0}L^*(\lambda v)\qquad \lambda\in R,\ v\in S$$

$$\Psi(v)=\sup_{\lambda>0}L(\lambda v)\qquad \lambda\in R,\ v\in S$$

$$a_k=\inf_{A\in\Gamma_k}\max_{u\in A}\Psi^*(u)$$

首先类似于[4]可以证得：

**引理9** 若$a>0$，$b>0$，$g(x,u)$和$f(x,u)$满足$(g_1)\sim(g_3)$ $(f_1)\sim(f_3)$则$L(u)$满足$(p.s)_a$条件，$L^*(u)$满足$(p,s)_b$条件。

其次注意到：$a>0$，$b>0$故有：

$$L^*(u)\geqslant\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u|^2dx-\int_\Omega G(x,u)dx$$
$$=I^*(u)\geqslant\Phi(u)$$

由此我们可得：$a_k\geqslant c_k\geqslant d_k$。这表明$c_k$的下界也是$a_k$的一个下界，于是有：

**引理10** 存在常数$c$使得：$a_k\geqslant c(k+1)^{\alpha_N}$其中的$\alpha_N$与引理8中相同。

与定理3相同的证明过程，引理10，9立即可导致：

**定理4** 若$a>0$，$b>0$为常数，$g(x,u)f(x,u)$满足$(g_1)\sim(g_3)$；$(f_1)\sim(f_3)$，$p$满足：$N\geqslant5$时$p\in\left(1,\frac{N+4}{N-4}\right)$，$N=3$，4时$p\in\left(1,\frac{N+2}{N-2}\right)$；$N\leqslant2$时$p\in(1,+\infty)$，则问题（Ⅰ）有无穷多个非平凡解。

**致谢** 作者衷心感谢导师王传芳教授的悉心指导和热情鼓励。

### 参 考 文 献

[1] A, Bahri, and H. Berestycki, A perturbation method in critical point theory and applications, *Trans A. M. S*,, 267 (1) (1981), 1—32.

[2] A, Bahri and H, Berestycki, Forced vibrations of superquadratic Hamiltonian systems. *Acta Math*., 152(3—4)(1984), 143—197.

[3] 戴淑环、严子谦，方程$\Delta^2u-a\Delta u+bu=f(x,u)$的非平凡解的存在性——山路引理的一个应用。吉林大学学报(1984)，1.

[4] 唐贤江，方程$\Delta^2u-a\Delta u+bu=f(x,u)+g(x,u)$的无穷多解，四川大学学报(1984).

[5] 丘成桐，《微分几何》，科学出版社（1988）.

[6] 戴求亿，算子$\Delta^2-v(x)$的非正特征值个数的估计及其应用。数学物理学报，12（增刊)(1992)，93—95

[7] P. Li and S. T. Yau, On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem,

*Comm. Math. phy.*, **88** (1982), 309～318.
[8] Kazunaga Tanaka, Morse indices at critical points related to the symmetric mountain pass theorem and applications, *Comm P. D. E*, **14**(1)(1989), 99—128.
[9] 张恭庆, 《临界点理论及其应用》, 上海科技出版社(1986).
[10] 廖山涛、刘金旺, 《同伦论基础》, 北京大学出版社(1980).
[11] P. H. Rabinowitz, Course of Lectures—CIME, varenna, Italy, June (1974).
[12] R. S. Palais, Morse theory on Hilbert Manifolds, *Topology*, (2) (1963), 299—340.

# Infinitely Many Solutions for Double Hamonic Perturbed Problem

Dai Qiuyi

(*Xiang Tan Mining Institute, Xiangtan* 411201)

**Abstract**

In this paper we consider the double hamonic perturbed problem on a bounded domain with boundary-value zero. The results which we have obtained have improved the results obtained in [1] [3] and [4].

**Key words** double hamonic operator, generalized Morse indice,nontrivial solution