

# 夹芯梁的精确解法

郑世瀛 金尧

(西南交通大学 四川成都 610031)

(陈大鹏推荐, 1994年11月3日收到)

## 摘 要

夹芯梁与普通梁的本质区别在于剪切引起芯层横截面严重的而又不均匀的翘曲变形, 其应力分布已远非初等理论所能描述, 而正在广泛应用的经典夹层理论却都建立在平面假设基础上, 尤其不能正确反映弱芯的轻质夹层结构的行为。本文放弃了不合理的假设, 将夹芯梁视为一般层状弹性体, 严格按弹性理论导出了既满足控制方程又同时满足全部边界条件、层间的应力及位移的连续条件的封闭解, 它可确切地反映夹芯梁的位移形态和应力分布, 并从不同角度, 包括多种实验和FEM数值解, 验证了它的正确性。

**关键词** 夹芯结构 弯曲理论 截面翘曲 非均匀 封闭解 精确解

## 一、引 言

长期以来, 人们对夹芯结构进行了大量的研究, 提出各种夹层理论。它们的共同基础均建立在梁的初等弯曲理论之上, 即假定弯曲后整个横截面或各层的横截面仍保持平面, 由此引出轴向应变的线性分布规律, 如40年前相继提出的Reissner理论、Hoff理论、Прусаков-杜庆华理论等<sup>[1]</sup>。前两种理论已广泛应用于结构分析和设计<sup>[2][3]</sup>。由于在这些理论中人为地限制了芯层截面的翘曲, 它们尚不能正确地描述以弱芯—强面板为特点的现代夹芯结构的行为。因此有不少研究者致力于对原有理论进行修正。程华等考虑芯层的弹性支承作用, 提出了修正的Reissner理论<sup>[4]</sup>; 剑持 洁则将多层组合梁理论用于分析建筑用简支厚面板夹芯梁的中点挠度<sup>[5]</sup>; Drysdale 等在分析不对称厚面板的夹芯梁时, 仍假设轴向应变在横截面上分区呈线性分布, 但计入面板抗剪能力, 应用能量方法导出特定夹层梁的挠度表达式<sup>[6]</sup>; Schoutens 把问题限于跨高比很大的情形, 以降低剪切的影响, 同时计入芯层抗弯刚度及弯曲应力 $\sigma_z$ , 导出了中性层位置随芯层的相对刚度变化而改变的关系<sup>[7]</sup>。显然, 这些研究工作都仍未超出平面假设的范畴。

关于芯层的作用, 上述研究者大都认为它对抗弯刚度的贡献主要在于保持面板的间距, 类似于工字梁的腹板, 但因其 $E_c$ 值很低略去其弯曲应力 $\sigma_z$ , 而又保留它的抗剪刚度。又因为与 $E_c$ 相关的 $G_c$ 值也甚小, 于是很多人引用文献[8]的方法, 即按芯子全断面均匀剪切的模式, 对挠曲线作线性修正, 以期缩小最大挠度与实验值间的差距, 并认为所获解答有较好的精度<sup>[6][8][9][10]</sup>。

然而工程上常用的弱芯轻质夹芯结构，在弯曲试验中均可观察到明显的局部反向弯曲现象——一种不寻常的弯曲形态，如图1所示。我们称之为“海鸥型弯曲”。这正是芯层不均匀的剪切变形导致横截面显著翘曲的结果（见图6）。夹芯结构的这一弯曲特征，各经典理论及其修正无法反映和解释的。



图 1

因此，本文放弃了以往所引用的不合理假定，将夹芯梁视为一般层状弹性体，严格按照弹性理论导出既满足控制方程和全部边界条件，又同时满足各层之间的应力及位移的连续条件的封闭解。它可确切反映各种不同的芯层刚度的夹芯梁的真实位移形态和应力分布，适用范围广泛。并从不同角度，包括不同的实验和 FEM 数值解，验证了它的正确性。因此，我们认为它是一个精确解。

## 二、分析与解答

取图 2 所示梁作为讨论的典型问题。

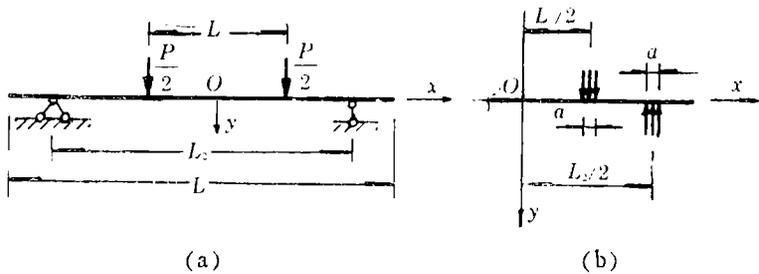


图 2 受力简图

它可演化成多种荷载作用方式：三点弯、满布或间断的均布荷载、纯弯曲的简支或外伸梁。由于对称，可取图 2(b) 所示的分析简图。面板的材料和厚度可以是不对称的，但各层内部均为各向同性的均质材料。采用图 3 所示的局部坐标系。

### 2.1 应力函数

将图示梁作为弹性力学平面问题，按应力求解。采用级数形式的应力函数，因它对边界条件的适应性较好。鉴于文献[11]指出经典弹性力学所用的级数存在明显的缺陷，本文采用了文献[12]中提出的完整的级数应力函数，即

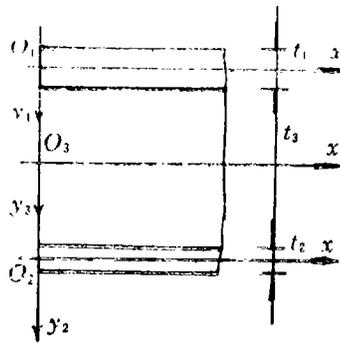


图 3 局部坐标系

$$\varphi_j = \sum_{m=1}^{\infty} \cos \alpha_m x (A_{jm} \operatorname{ch} \alpha_m y_j + B_{jm} \operatorname{sh} \alpha_m y_j + C_{jm} y_j \operatorname{ch} \alpha_m y_j + D_{jm} y_j \operatorname{sh} \alpha_m y_j) + \frac{1}{2} A_{j0} y_j^2 + \frac{1}{6} B_{j0} y_j^3 - \frac{P}{2L} x^2 \quad (2.1)$$

式中,  $\alpha_m = 2m\pi/L$ ;  $j=1, 2, 3$  为各层层序标志, 分别表示上、下面板和芯层。为方便计,

以下简记  $\sum_{m=1}^{\infty}$  为  $\sum$ , 与此相应, 分别将  $\alpha_m, A_{jm}, B_{jm}, C_{jm}, D_{jm}$  简记为  $\alpha, A_j, B_j, C_j, D_j$ 。

## 2.2 应力与位移

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zj} &= \sum \alpha \cos \alpha x \operatorname{ch} \alpha y_j [A_j \alpha + B_j \alpha \operatorname{th} \alpha y_j + C_j (2 \operatorname{th} \alpha y_j + \alpha y_j) \\ &\quad + D_j (2 + \alpha y_j \operatorname{th} \alpha y_j)] + A_{j0} + B_{j0} y_j \\ \sigma_{yj} &= - \sum \alpha^2 \cos \alpha x \operatorname{ch} \alpha y_j [A_j + B_j \operatorname{th} \alpha y_j + C_j y_j \\ &\quad + D_j y_j \operatorname{th} \alpha y_j] - P/L \\ \tau_{xyj} &= \sum \alpha \sin \alpha x \operatorname{ch} \alpha y_j [A_j \alpha \operatorname{th} \alpha y_j + B_j \alpha + C_j (1 + \alpha y_j \operatorname{th} \alpha y_j) \\ &\quad + D_j (\operatorname{th} \alpha y_j + \alpha y_j)] \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

代入几何方程和物理方程, 有

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} = \varepsilon_{xj} = \frac{1}{E_j} (\sigma_{zj} - \nu_j \sigma_{yj})$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial y_j} = \varepsilon_{yj} = \frac{1}{E_j} (\sigma_{yj} - \nu_j \sigma_{zj})$$

因而

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{1 + \nu_j}{E_j} \sum \sin \alpha x \cdot \operatorname{ch} \alpha y_j \left[ A_j \alpha + B_j \alpha \operatorname{th} \alpha y_j \right. \\ &\quad \left. + C_j \left( \alpha y_j + \frac{2}{1 + \nu_j} \operatorname{th} \alpha y_j \right) + D_j \left( \alpha y_j \operatorname{th} \alpha y_j + \frac{2}{1 + \nu_j} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{E_j} \left[ (A_{j0} + B_{j0} y_j) x + \nu_j \frac{P}{L} x \right] + f_j(y_j) \\ v_j &= - \frac{1 + \nu_j}{E_j} \sum \cos \alpha x \cdot \operatorname{ch} \alpha y_j \left[ A_j \alpha \operatorname{th} \alpha y_j + B_j \alpha \right. \\ &\quad \left. + C_j \left( \alpha y_j \operatorname{th} \alpha y_j - \frac{1 - \nu_j}{1 + \nu_j} \right) + D_j \left( \alpha y_j - \frac{1 - \nu_j}{1 + \nu_j} \operatorname{th} \alpha y_j \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{E_j} \left[ \frac{P}{L} y_j + \nu_j \left( A_{j0} y_j + \frac{1}{2} B_{j0} y_j^2 \right) \right] + g_j(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

由于对称, 有

$$u_j|_{x=0} = 0$$

从而可得  $f_j(y_j) = 0$

又由  $\gamma_{xyj} = \frac{2(1 + \nu_j)}{E_j} \tau_{xyj} = \frac{\partial u_j}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x}$

可得  $g_j(x) = h_j - \frac{1}{2E_j} B_{j0} x^2$  (2.4)

各层的轴力、弯矩为

$$\left. \begin{aligned} N_j &= \int_{-t_j/2}^{t_j/2} \sigma_{xj} b dy_j = b \sum 2 \cos ax \operatorname{ch} T_j [A_j \alpha \operatorname{th} T_j \\ &\quad + D_j (\operatorname{th} T_j + T_j)] + b t_j A_{j0} \\ M_j &= \int_{-t_j/2}^{t_j/2} \sigma_{xj} y_j b dy_j = b \sum 2 \cos ax \operatorname{ch} T_j \\ &\quad \cdot [B_j (T_j - \operatorname{th} T_j) + C_j \frac{t_j}{2} T_j \operatorname{th} T_j] + \frac{2b}{3} \left(\frac{t_j}{2}\right)^3 B_{j0} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

式中,  $T_j = at_j/2$  ( $\alpha$ ,  $T_j$  为  $a_m$ ,  $T_{jm}$  的缩写).

### 2.3 边界条件及层间连续条件

将上下边界的外力展成富氏级数

$$q_j = \frac{P}{L} + \sum P_j \cos ax \quad (j=1, 2) \quad (2.6)$$

式中 
$$P_j = P_{jm} = \frac{2P}{m\pi a_j} \cos\left(\alpha \frac{L_j}{2}\right) \sin\left(\alpha \frac{a_j}{2}\right)$$

相应的边界条件可写成

$$\begin{pmatrix} \tau_{xyj} \\ \sigma_{yj} \end{pmatrix}_{tb} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q_j \end{pmatrix} \quad (j=1, 2) \quad (2.7)$$

其中脚标  $tb$  表示上下边界. 层间界面的应力、位移连续条件为

$$\begin{pmatrix} \tau_{xyj} \\ \sigma_{yj} \end{pmatrix}_{il} = \begin{pmatrix} \tau_{xy3} \\ \sigma_{y3} \end{pmatrix}_{il} \quad (j=1, 2) \quad (2.8)$$

$$\begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix}_{il} = \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}_{il} \quad (j=1, 2) \quad (2.9)$$

其中脚标  $il$  表示界面.

梁的端部边界条件应有

$$\sigma_{xj}|_{x=L/2} = 0 \quad (j=1, 2, 3) \quad (2.10)$$

由于本文采用单三角级数形式的应力函数<sup>[12]</sup>, 不能严格满足式(2.10), 若将其放松, 以各层端面的等效力系代之, 即

$$N_j|_{x=L/2} = 0, \quad M_j|_{x=L/2} = 0 \quad (2.11)$$

由于面板甚薄, 可应用圣文南原理; 芯层虽厚, 但其相对刚度甚小,  $\sigma_x$  值本身很小. 这样的简化应是合理的, 况且就梁而言, 端部是次要边界. 将式(2.5)代入式(2.11), 简化可得

$$\left. \begin{aligned} A_{j0} &= \sum (-1)^{m+1} \frac{2}{t_j} \operatorname{ch} T_j [A_j \alpha \operatorname{th} T_j + D_j (\operatorname{th} T_j + T_j)] \\ B_{j0} &= \sum (-1)^{m+1} 3 \left(\frac{2}{t_j}\right)^3 \operatorname{ch} T_j [B_j (T_j - \operatorname{th} T_j) + C_j T_j \frac{t_j}{2} \operatorname{th} T_j] \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

式(2.7)、(2.8)、(2.9)提供了12个方程, 据此对于级数中任一项  $m$  的系数  $A_{jm}$ ,  $B_{jm}$ ,  $C_{jm}$  和  $D_{jm}$  (共  $4 \times 3 = 12$  个) 均可解出. 然后代入式(2.12)即可求得  $A_{j0}$  和  $B_{j0}$  这6个系数. 再代回式(2.2)、(2.3)便是该夹芯梁的应力、位移解答.

将上述过程编成程序后即可对具体问题实施计算。

### 三、算 例

**算例1** 矩形截面均质梁。其受力与支承如图2，几何及物理参数见表1。视该梁为三层材料性质相同的特殊夹芯梁，按本文方法求解，以检验方法和程序。

表 1

$L$ (mm)	$L_1$ (mm)	$L_2$ (mm)	$a_1=a_2$ (mm)	$t_1=t_2$ (mm)	$t_3$ (mm)	$E_1=E_2=E_3$ (GPa)	$\nu_1=\nu_2=\nu_3$	$P/b$ (N/mm)
620	460	540	5	5	30	210	0.3	200

计算结果表明，对处于纯弯状态的中段（如 $|x| \leq 180\text{mm}$ ），用本文方法所得结果与弹性力学多项式解答<sup>[13]</sup>完全一致（计算结果从略）。

**算例2** 弱芯层夹芯梁。参数列于表2中， $L_1=0$ 表示四点弯已退化为三点弯。同时用本文方法和有限元法（8节点等参元）求解，进行结果对照。

表 2

$L$ (mm)	$L_1$ (mm)	$L_2$ (mm)	$a_1=a_2$ (mm)	$t_1=t_2$ (mm)	$t_3$ (mm)	$E_1=E_2$ (GPa)	$E_3$ (GPa)	$\nu_1=\nu_2=\nu_3$	$P/b$ (N/mm)
230	0	180	10	2	24	210	0.21	0.3	40

图4给出了芯层的挠曲线。显然，它的形态与均质实体梁存在着本质的差异。尽管梁的跨间总弯矩全为正值，然挠曲线曲率却仅有中点附近的一段才是正的，出现了拐点。这与实验现象完全一致。图4中的虚线为按文献[14]计算的结果（Reissner解），它明显背离了夹芯梁挠曲后的真实形态。图中还同时给出了有限元数值解，它与本文解吻合良好。

本文解还可正确显示上下面板曲率的差异，即承力侧面板的局部曲率明显增加，反映了该局部的面板具有弹性地基梁的特征。

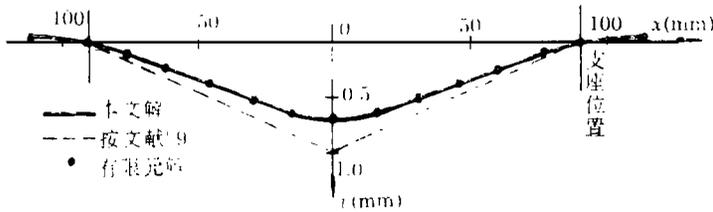


图 4 挠曲线

图5为面板应力 $\sigma_x$ 的分布图。显示了 $\sigma_x$ 与梁的总弯矩的线性变化规律全然不同，两块面板在施力点附近的应力本应出现的剧烈变化，也得到清晰的描述。图中虚线为 Hoff 理论<sup>[15]</sup>的结果。

夹芯梁之所以会呈现前述弯曲特征，原因在于其芯层抗剪刚度甚低（尤其是弱芯轻质夹芯结构），它在剪力作用下横截面发生了严重的且很不均匀的翘曲。图6给出一系列横截面

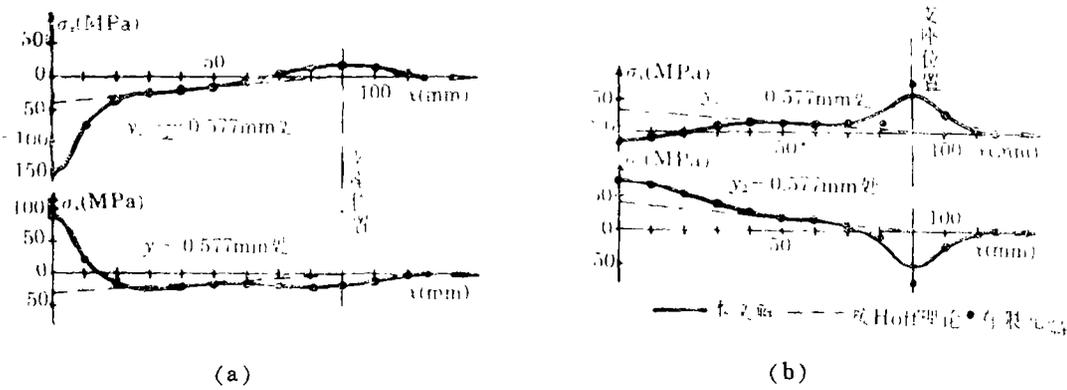


图5 面板应力 $\sigma_x$

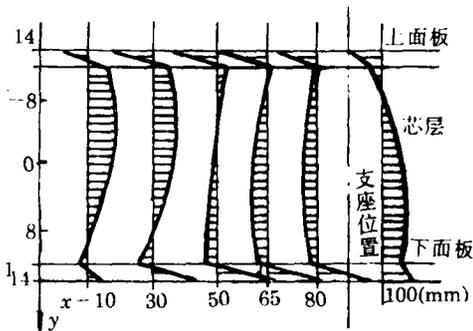


图6 横截面水平位移 $u$  (翘曲情况)

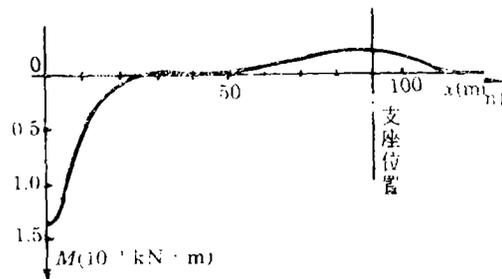


图7 上面板弯矩

的翘曲形态及其变化，它清晰地描绘了夹芯梁内各点的水平位移分量  $u$  分布的复杂情况，可以说它与平面假设—— $u(x_0, y)$  的线性规律毫无相似之处。因此，经典理论及其各种修正理论所引用的假设，显然是不合理的。对于弱芯梁其解答更不适用的原因就在于此。

图7为由式(2.5)算出的面板弯矩图，它与梁的挠曲线相吻合。因为面板较薄，尽管它自身的弯矩与截面总弯矩相比甚小（除支反力作用的局部之外），但其弯曲应力  $\sigma_x$  却相当大，尤其是在承力点附近。这应引起足够重视。因为各经典理论未能计及这一点，更严重的是在此局部面板常处于压—弯组合状态，极易损坏，且一般的修补措施无济于事，必须有良好的过渡区。

顺便指出，有的文献在分析中引用的关系  $dM/dx=Q$ （或薄板的平衡表达式）在此不成立。因为此处的面板或芯子均非独立的杆件或平板。

此外，从图6、7可见，跨间的截面翘曲影响还会传至外伸部分，引起外伸段的弯曲和剪切变形，尽管这段梁的合弯矩和合剪力均为零，各层的内力直至临近端部才衰减为零。

#### 四、试 验

试验梁的面板材料为LY12（合金铝板），芯层为有机玻璃，有关参数列于表3。荷载增量  $\Delta P=200\text{N}$ ，加力点安放了13mm宽的有机玻璃衬垫。用电测法量测表面应变。

图8和图9给出了  $\sigma_x$  沿面板表面各测点的实测值和  $\tau_{xy}$  在  $x=60\text{mm}$  截面上三个测点的实测值，以及按本文解对该实验梁应力变化的预测曲线，显见二者有良好的吻合关系。作为对

表 3

$L$ (mm)	$L_1$ (mm)	$L_2$ (mm)	$a_1$ (mm)	$a_2$ (mm)	$t_1=t_2$ (mm)	$t_3$ (mm)	$b$ (mm)	$E_1=E_2$ (GPa)	$E_3$ (GPa)	$\nu_1=\nu_2$	$\nu_3$	$P$ (N)
350	0	300	13	5	2	47	11.7	69	3.4	0.33	0.385	200

照，图中以虚线给出Reissner解。

图8表明，当芯层比较刚硬时（此梁 $K=E_f/E_c=20.8$ ），除了受力点附近，Reissner解尚有一定的精度。即使在这样的条件下，两块面板受力仍无对称性可言，加力点附近应力变化仍很剧烈（弹性地基效应）。图9显示，即使远离加力点，横截面上的 $\tau_{xy}$ 也有明显的变化。

此外，还用本文方法对文献[4]所列试验梁进行计算，结果表明在 $K=1, 4.7, 120$ 和 $563$ 四种条件下，本文方法的结果与实验值相对误差小于5%（中点挠度值，文献中仅给出它的实测结果）。

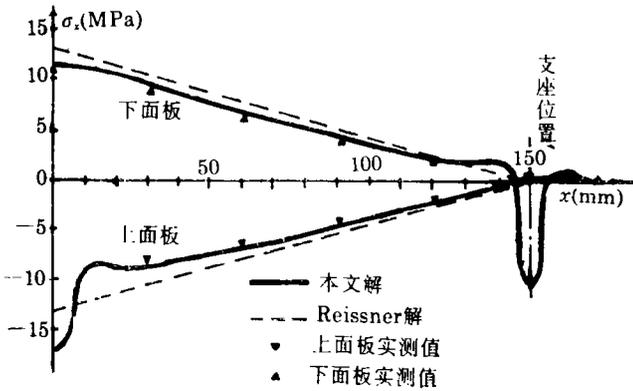


图8 面板应力 $\sigma_x$ 分布

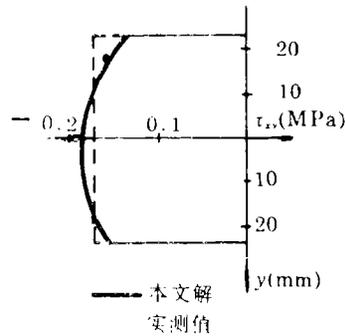


图9 芯层剪应力 $\tau_{xy}$

### 五、结 语

(1) 本文解答是一个满足了弹性力学控制方程和所有边界条件与连续条件的封闭解。在 $E_f/E_c=1\sim 1000$ 范围内，其正确性和广泛的适应性已被弹性理论经典解、有限元数值解及不同的实验所证实。

(2) 由于承力后芯层的翘曲和局部压缩变形，上下面板的应力已失去对称性，在施力点附近它的曲率骤增，局部弯曲应力 $\sigma_x$ 和界面的 $\sigma_y, \tau_{xy}$ 值随之急剧上升，此处的界面连接以及处于弯压联合作用下的面板极易破损或因屈曲折断而失效。对此，设计和修理中极端的局部增强措施不能奏效，只能使失效区转移。须谨慎设置有效的过渡区。

(3) 本文揭示了常用的弱芯夹芯板条弯曲中复杂的结构引为。由此可知它与常规梁之间存在着本质的差异。由于面板与芯层材性差别悬殊，且相互联系与制约关系复杂，致使结构的抗弯、抗剪、抗横向挤压三种性能之间发生较强的耦合关系。梁的初等弯曲理论不计挤压效应并对抗弯、抗剪效应所做的简单解耦处理，对普通梁有良好的近似，在此却不适用。这正是夹芯梁（或板）的经典理论及其修正之所以不可能正确反映弱芯结构弯曲的基本

特征的原因, 因它源于梁的初等理论。由于变形后的横截面已远非平面(或直法线)假设所能模拟, 因而中性轴、惯性矩、抗弯刚度( $EI$ 或 $D$ )等概念, 在此也失去了原本的前提和定义。

(4) 夹芯梁的弯曲问题是夹层板、壳、柱的弯曲、振动和屈曲理论研究与设计的基础。因此, 对它的结构行为的再认识是有必要的。建议在精确解的基础上研究和发展新一代的实用算法, 以促进夹芯结构的设计水平的提高, 减少某些盲目性。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 中国科学院力学所, 《夹层板壳的弯曲、稳定和振动》, 科学出版社(1977)。
- [ 2 ] 王震鸣, 《复合材料力学和复合材料结构力学》, 机械工业出版社(1991), 365—375。
- [ 3 ] S. W. Tsai, *Composites Design*, 4th edition, Think Composites, Dayton, Ohio, USA (1989), 8-5-8-7。
- [ 4 ] 程华、刘方龙, 复合材料夹层板弯曲修正的 Reissner 理论, 复合材料学报, 7(4) (1990), 17—26。
- [ 5 ] 剑持 浩, 关于夹层梁的挠度, 日本复合材料学会志, 4(1) (1978), 39—44。
- [ 6 ] R. G. Drysdale, F. B. Augel and G. B. Haddad, Thick skin sandwich beam columns with weak cores, *Journal of the Structural Division*, 105(12) (1979), 2601—2619。
- [ 7 ] J. E. Schoutens, Direct measurements of non-linear stress-strain curves and elastic properties of metal matrix composite sandwich beams with any core material, *Journal of Materials Science*, 20 (1985), 4421—4430。
- [ 8 ] S. P. Timoshenko, and J. M. Gere, *Mechanics of Materials*, Van Nostrand Reinhold Company, New York (1972), 201—208。
- [ 9 ] A. F. Johnson, and G. D. Sims, Mechanical properties and design of sandwich materials, *Journal Composites*, 17(4) (1986), 321—327。
- [ 10 ] C. L. Dym, and I. H. Shomes, *Solid Mechanics: A Variational Approach*, 《固体力学变分法》, 袁祖贻等译, 中国铁道出版社(1984), 197—205。
- [ 11 ] 奚绍中、郑世瀛, 《应用弹性力学》, 中国铁道出版社(1981), 49—59。
- [ 12 ] 金尧、郑世瀛, 完整的级数应力函数, 力学与实践, 14(6) (1992), 56—57。
- [ 13 ] 徐芝纶, 《弹性力学》, 人民教育出版社(1979), 46—47。
- [ 14 ] 李顺林, 《复合材料工作手册》, 航空工业出版社(1988), 223—225。
- [ 15 ] 周祝林, 夹层结构设计, 玻璃钢杂志, (59) (1985), 17—38。

## Exact Solution of Sandwich Beams

Zheng Shiying    Jin Yao

*(Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P. R. China)*

### Abstract

Seriously non-uniform warping cross sections due to shear effects sharply expose the essential difference between solid and sandwich beams. Actually, the deflected configuration and stress distributions in sandwich beam are far beyond the scope that the elementary bending theory is applicable for their description. For analysis of sandwich beams, the most extensively employed classical theories are based on such assumption as the whole cross section or each individual layer thereof remains plane for bent configurations. As a matter of fact, theories based on such assumptions appear particularly incapable of depicting the mechanical characteristic behavior of sandwich beams, with a weak core in particular. Not relying on any assumptions, the present work tends to have the sandwich beam considered as layered elastic continuum. Close solution thereupon obtained satisfies the governing equations, the boundary conditions, as well as the stress continuity and displacement compatibility requirements on interlayer interfaces. Experimental studies and numerical (finite element analysis) examinations favorably justify the validity of the present solution together with its superb capability of representing the displacement responses and stress distributions in sandwich beams.

**Key words** sandwich beam, flexural theory, warping, non-uniform, close solution, exact solution