# 具有不依赖于时间的不变量的三维常微分方程组的Hamilton结构*

郭仲衡 陈玉明

（北京大学数学系 100871） （湖南大学应用数学系 长沙 410012）

（1994年4月1日收到）

**摘 要**

本文证明了具有不依赖于时间的不变量的三维常微分方程组所描述的动力系统相对于一广义Poisson括号可以改写为Hamilton系统，并且这些不变量就是Hamilton量．做为例子，我们讨论了Kermack-Mckendrick传染病模型，所得结果推广了Y.Nutku的结果。

**关键词** Poisson括号 Hamilton结构 bi-Hamilton结构 不变量 Kermack-Mckendrick传染病模型

## 一、引 言

生物学中的许多现象都可用动力系统作为模型来描述，如描述传染病流行的Kermack-Mckendrick模型[1]．由于其中一些系统容许有bi-Hamilton结构，从数学的观点来看它们是很有意义的．此外，常微分方程组的Hamilton系统在经典力学和量子力学的理论中有相当的重要性．能识别出一动力系统中Hamilton结构的存在性是有许多好处的．特别地，我们有可能利用能量-Casimir方法[2]来讨论相对平衡点的稳定性．

L. Andrey在[3]中指出：动力系统

$$\dot{x}=X(x), \qquad x,\ X\in\mathbf{R}^n \tag{1.1}$$

是Hamilton的一个必要条件是

$$\operatorname{div}X=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X^i}{\partial x^i}=0 \tag{1.2}$$

后来，F. González-Gascón指出条件（1.2）并不是充分的，这是由于L.Andrey仅考虑辛形式是由$\omega=dx^1\wedge dx^2+\cdots+dx^{n-1}\wedge dx^n$给出的Hamilton系统[4]．近来，Y.Nutku给出了两个不满足条件（1.2）时具有Hamilton结构的例子，他指出Lotka-Volterra方程组[5]和Kermack-Mckendrick传染病模型[1]都具有bi-Hamilton结构．本文将证明每一具有不依赖于时间的不变量的，由常微分方程组描述的三维动力系统（简记作3D ODE），相对于一广义Poisson括号可以改写成一Hamilton系统，并且这个不变量就是Hamilton

* 1993年11月22日第一次收到．

函数．我们知道，每一3D ODE至多有两个不依赖于时间的不变量．如果我们找到了两个这样的不变量，那么我们就可以确定两个不等价的Hamilton结构，并进而可以判定该系统是否具有bi-Hamilton结构．此外，对于具有两个不变量的动力系统，我们利用这些不变量就很容易确定所需的广义Poisson括号的结构函数[6]．以上这些都可在所要讨论的Kermack_Mckendrick传染病模型中得到充分体现．

## 二、定 理 的 证 明

为证明本文的主要结果，我们先引述关于Poisson括号的结构矩阵的结论．

**命题**（[6]中第384页的命题6.8） 设$M\subseteq \mathbf{R}^m$为一开子集，$x=(x^1, \cdots, x^m)\in M$，且$J(x)=(J^{ij}(x))$是元素定义在$M$上的函数的$m\times m$矩阵．则$J(x)$是$M$上Poisson括号

$$\{F, H\}=\nabla F\cdot J\nabla H \tag{2.1}$$

的结构矩阵的充分必要条件是$J(x)$具有以下性质：

(a) 反对称性

$$J^{ij}(x)=-J^{ji}(x) \qquad (i, j=1, \cdots, m) \tag{2.2}$$

(b) Jacobi恒等式

$$\sum_{r=1}^{m}[J^{ir}J^{jk}_{r}+J^{kr}J^{ij}_{r}+J^{jr}J^{ki}_{r}]=0 \qquad (i, j, k=1, \cdots, m) \tag{2.3}$$

对所有$x\in M$成立（在本节中，所有下标都表示相应变量的偏导数，例如，$J^{12}_{1}=\partial J^{12}/\partial x^1$）．

很容易验证当$m=3$时，Jacobi恒等式（2.3）可化为恒等式

$$J^{12}J^{23}_{2}+J^{13}J^{23}_{3}-J^{13}J^{12}_{1}-J^{23}J^{12}_{2}+J^{12}J^{13}_{1}-J^{23}J^{13}_{3}=0 \tag{2.4}$$

上面利用了$J(x)$的反对称性．

有了关系式(2.4)，我们就可以证明如下定理．

**定理** 任何具有一个不依赖于时间的不变量的，由常微分方程组描述的三维系统都可以写成Hamilton系统的形式，且Hamilton量就是这个不变量．

**证明** 考虑以下的3D ODE，

$$\dot{x}^1=f(x^1, x^2, x^3, t) \tag{2.5a}$$

$$\dot{x}^2=g(x^1, x^2, x^3, t) \tag{2.5b}$$

$$\dot{x}^3=h(x^1, x^2, x^3, t) \tag{2.5c}$$

并且假定$I(x^1, x^2, x^3)$是以上3D ODE的一不依赖于时间的不变量．我们的目的是寻求一结构矩阵$J(x)$使得系统（2.5）可以写成Hamilton系统的形式：

$$\begin{pmatrix}\dot{x}^1\\ \dot{x}^2\\ \dot{x}^3\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}I_1\\ I_2\\ I_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\\ g\\ h\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

不失一般性，我们假设$I_3\neq 0$．(2.6)等价于以下方程组：

$$J^{12}I_2+J^{13}I_3=f \tag{2.7a}$$

$$-J^{12}I_1+J^{23}I_3=g \tag{2.7b}$$

$$-J^{13}I_1-J^{23}I_2=h \tag{2.7c}$$

在假设$I_3\neq 0$及$I$是系统(2.5)的不依赖于时间的不变量的条件下，很容易观察到方程组(2.7)等价于由(2.7a)及(2.7b)构成的方程组，且由(2.7a)及(2.7b)可以得到

$$J^{13}=(f-J^{12}I_2)/I_3 \tag{2.8}$$

$$J^{23}=(g+J^{12}I_1)/I_3 \tag{2.9}$$

将(2.8)及(2.9)两式代入恒等式(2.4)，经过一系列的简化就得到一阶半线性偏微分方程

$$fJ^{12}_1+gJ^{12}_2+hJ^{12}_3 = J^{12}\left(g_2+f_1-\frac{I_1}{I_3}f_3-\frac{I_2}{I_3}g_3\right)-\frac{gf_3}{I_3}+\frac{fg_3}{I_3} \tag{2.10}$$

如果我们考虑与偏微分方程(2.10)有关的Cauchy问题，则理论上就可以得到解[7] $J^{12}$，从而我们完成了定理的证明。

## 三、Kermack-Mckendrick 传染病模型

作为上述一般结果的一个应用，我们来考虑[1]中曾经考虑过的Kermack-Mckenrdick传染病模型。这个模型是由以下常微分方程组描述的，

$$\dot S=-rSI,\quad \dot I=rSI-aI,\quad \dot R=aI \tag{3.1}$$

其中$S$，$I$，$R$分别表示可被感染者的数目，被感染者的数目和被感染者中迁出的数目。常数$a$，$r$则分别确定了被感染者的感染率和迁出率。很显然系统(3.1)具有两个独立的不依赖于时间的不变量

$$H_1=S+I+R \tag{3.2}$$

和

$$H_2=\frac{a}{r}\log S+R \tag{3.3}$$

通过直接计算(注意到$\partial H_1/\partial R=\partial H_2/\partial R=1\neq 0$)可以看到，分别以$H_1$和$H_2$为Hamilton函数的Hamilton系统的Poisson括号的结构矩阵$J_1$和$J_2$的元素$J^{12}_1$和$J^{12}_2$满足同一偏微分方程。这个偏微分方程是

$$-rSI\frac{\partial J^{12}}{\partial S}+(rSI-aI)\frac{\partial J^{12}}{\partial I}+aI\frac{\partial J^{12}}{\partial R}=J^{12}[rS-a-rI] \tag{3.4}$$

由于$\partial H_1/\partial R=\partial H_2/\partial R\neq 0$，我们可以假设Cauchy问题的初值为

$$J^{12}(S,\ I,\ 0)=p(S,\ I) \tag{3.5}$$

下面我们求解Cauchy问题(3.4)与(3.5)，这一问题的解可通过求解如下常微分方程组得到。

$$\frac{dS}{d\tau}=-rSI \tag{3.6a}$$

$$\frac{dI}{d\tau}=rSI-aI \tag{3.6b}$$

$$\frac{dR}{d\tau}=aI \tag{3.6c}$$

$$\frac{dz}{d\tau}=z(rS-a-rI) \tag{3.6d}$$

$$S(0)=s_1 \tag{3.6e}$$

$$I(0)=s_2 \tag{3.6f}$$

$$R(0)=0 \tag{3.6g}$$

$$z(0)=p(s_1,\ s_2) \tag{3.6h}$$

利用不变量$H_1$和$H_2$知，

$$S+I+R=s_1+s_2 \tag{3.7}$$

$$R+\frac{a}{r}\log S=\frac{a}{r}\log s_1 \tag{3.8}$$

由(3.7)及(3.8)知，

$$S=s_1\exp[-(r/a)R] \tag{3.9}$$

$$I=s_1+s_2-R-s_1\exp[-(r/a)R] \tag{3.10}$$

以及

$$s_1=S\exp[(r/a)R] \tag{3.11}$$

$$s_2=S+I+R-S\exp[(r/a)R] \tag{3.12}$$

另一方面，利用关系式(3.9)及(3.10)，由(3.6c)及(3.6d)得到，

$$\begin{aligned}\frac{dz}{z}&=\left(-\frac{r}{a}+\frac{rS-a}{aI}\right)dR\\&=\left[-\frac{r}{a}+\frac{rs_1\exp[-(r/a)R]-a}{a(s_1+s_2-R-s_1\exp[-(r/a)R])}\right]dR\\&=d\left\{-\frac{r}{a}R+\log[a(s_1+s_2-R-s_1\exp[-(r/a)R])]\right\}\end{aligned} \tag{3.13}$$

考虑到初值(3.6g)及(3.6h)就可以得到以上常微分方程(3.13)的解为：

$$z=p(s_1,\ s_2)(s_1+s_2-R-s_1\exp[-(r/a)R])\exp[-(r/a)R]/s_2 \tag{3.14}$$

将(3.11)及(3.12)两式代入上式就得到Cauchy问题的解为：

$$J^{12}(S,I,R)=\frac{p(S\exp[(r/a)R],S+I+R-S\exp[(r/a)R])I\exp[-(r/a)R]}{S+I+R-S\exp[(r/a)R]} \tag{3.15}$$

这样，系统(3.1)就可以写成以下的Hamilton形式，

$$\begin{pmatrix}\dot{S}\\ \dot{I}\\ \dot{R}\end{pmatrix}=J_1\begin{pmatrix}\frac{\partial H_1}{\partial S}\\ \frac{\partial H_1}{\partial I}\\ \frac{\partial H_1}{\partial R}\end{pmatrix}=J_2\begin{pmatrix}\frac{\partial H_2}{\partial S}\\ \frac{\partial H_2}{\partial I}\\ \frac{\partial H_2}{\partial R}\end{pmatrix} \tag{3.16}$$

其中

$$J_i=\begin{pmatrix}0 & J_i^{12} & J_i^{13}\\ -J_i^{12} & 0 & J_i^{23}\\ -J_i^{13} & -J_i^{23} & 0\end{pmatrix}\qquad (i=1,\ 2) \tag{3.17}$$

$$J_1^{12}=\frac{p_1(S\exp[(r/a)R],\ S+I+R-S\exp[(r/a)R])I\exp[-(r/a)R]}{S+I+R-S\exp[(r/a)R]} \tag{3.18a}$$

$$J_1^{13}=-rSI-J_1^{12} \tag{3.18b}$$

$$J_1^{23}=-rSI-aI+J_1^{12} \tag{3.18c}$$

$$J_2^{12}=\frac{p_2(S\exp[(r/a)R],\ S+I+R-S\exp[(r/a)R])I\exp[-(r/a)R]}{S+I+R-S\exp[(r/a)R])} \tag{3.19a}$$

$$J_2^{13}=-rSI \tag{3.19b}$$

$$J_2^{23}=rSI-aI+\frac{a}{rS}J_2^{12} \tag{3.19c}$$

如果取$p_1=-p_2=p$，则易见$J_1$和$J_2$的任意线性组合仍为一Poisson 结构的结构矩阵。事实上，令

$$J=\lambda J_1+\mu J_2,\qquad \forall\lambda,\ \mu\in\mathbf{R} \tag{3.20}$$

则有

$$J^{12}\frac{\partial J^{23}}{\partial I}+J^{13}\frac{\partial J^{23}}{\partial R}-J^{13}\frac{\partial J^{12}}{\partial S}-J^{23}\frac{\partial J^{12}}{\partial I}+J^{12}\frac{\partial J^{13}}{\partial S}-J^{23}\frac{\partial J^{13}}{\partial R}$$

$$=-(\lambda^2-\mu^2)\left[-rSI\frac{\partial J_1^{12}}{\partial S}+(rSI-aI)\frac{\partial J_1^{12}}{\partial I}+aI\frac{\partial J_1^{12}}{\partial R}\right]$$

$$+(\lambda^2-\mu^2)J_1^{12}(rS-a-rI)=0$$

上面最后一个等号成立利用了$J_1^{12}$满足关系式(3.4)。这就说明了$J$这一$3\times3$反对称矩阵满足恒等式(2.4)，所以$J$为一Poisson括号的结构矩阵，也就是说系统(3.1)具有bi-Hamilton结构。特别地，如果取$p_1(S,\ I)=-p_2(S,\ I)=-rSI$，此时有

$$J_1=\begin{pmatrix}0 & -rSI & 0\\ rSI & 0 & -aI\\ 0 & aI & 0\end{pmatrix}$$

$$J_2=rSI\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

还有

$$J_1\nabla H_2=J_2\nabla H_1=0$$

成立，即$H_1$和$H_2$分别为$J_2$和$J_1$的Casimir函数。易见这些结果就是Y.Nutku[1]中所得到的结果。

在这节里，我们利用第二节所得到的一般结论详细地讨论了Kermack-Mckendrick传染病模型，得到了比Y.Nutku更一般的结果。值得一提的是，我们在第二节所得到的一般结论不仅从理论上证明了具有不依赖于时间的不变量的3D ODE的Hamilton结构的存在性，统一了现有文献中有关3D ODE的Hamilton结构的结果，而且也可以由此得到比文献中结果更一般性的结论。这样从一般性结果中就可以选择一些更适当的Poisson结构（譬如，上例所做的具有Casimir函数的Poisson结构）来进行更进一步的讨论，这里不再多说。此外，如果系统具有依赖于时间的不变量，但可以通过重新标化独立坐标变量而变成不依赖于时间的不变量，则该系统仍可以改写成一Hamilton形式。关于这一结果我们将另文报道。

## 参考文献

[1] Nutku, Y., Bi-Hamiltonian structure of the Kermack-Mckendrick model for epidemics, *J. Phys. A:Math. Gen.*, **23** (1990), L1145—L1146.

[2] Krisnnaprasad, P.S. and J.E. Marsden, Hamiltonian structures and stability for rigid bodies with flexible attachments, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **98** (1987), 71—93.

[3] Andrey, L. The rate of entropy change in non-Hamiltonian systems, *Phys. Lett. A*, **111** (1985), 45—46.

[4] González-Gascón, F., Note on a paper of Andrey concerning non-Hamiltonian systems, *Phys. Lett. A.*, **114** (1986), 61—62.

[5] Nutku, Y., Hamiltonian sturcture of the Lotka-Volterra equations, *Phys.Lett. A*, **145** (1990), 27—28.

[6] Olver, P.J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New York Inc. (1986).

[7] John, F., *Partial Differential Equations*, 4th ed., Springer-Verlag, New York (1982).


# The Hamiltonian Structures of 3D ODE with Time-Independent Invariants


Guo Zhong-heng

(*Department of Mathematics, Peking University, Beijing*, 100871)

Chen Yu-ming

(*Department of Applied Mathematics, Hu'nan University, Changsha*, 410012)



**Abstract**

We have proved that any 3-dimensional dynamical system of ordinary differential equations (in short,3D ODE) with time-independent invariants can be rewritten as Hamiltonian systems with respect to generalized Poisson brackets and the Hamiltonians are these invariants. As an example, we discuss the Kermack-Mckendrick model for epidemics in detail. The results we obtained are generalization of those obtained by Y. Nutku.



**Key words** Poisson bracket, Hamiltonian structure, bi-Hamiltonian structure, invariant, the Kermack-Mckendrick model for epidemics