

# 非牛顿流体在环管内的不定常旋转流

黄军旗 刘慈群

(北京师范大学资源与环境科学系, 100875) (中科院渗流流体力学研究所 兰州 102801)  
(1994年4月18日收到)

## 摘 要

本文研究幂律非牛顿流体在环管内的不定常旋转流。该方程是一非线性方程。在部分因子的稳态近似假设之下, 方程被线性化, 用Laplace积分变换法我们获得了问题的解。文中给出了几组解曲线。它反映了角向速度的时间演化规律与空间分布特征。另外我们专门研究了幂律指数对流场的影响, 该参数的敏感性具有一定的数值界限。这一结果, 在有关的工程设计中具有重要的意义。

**关键词** 非牛顿幂律流体 环管旋转流 积分变换 近似解析解

## 一、引 言

研究非牛顿流体环管旋转流在钻探工程、食品工业及高分子加工等领域具有重要的意义。了解环隙间非牛顿流体角向速度的分布特征及变化过程对于工件设计、工艺操作具有重大参考价值。特别对轴隙间润滑剂磨擦受剪后的运动, 在微尺度下这是一种纯旋转流, 其应用更具有针对性。朱文辉和刘慈群曾对环管中的二阶流体<sup>[1]</sup>和Maxwell流体<sup>[2]</sup>的轴向运动分别进行过研究。本文是研究环管中幂律型非牛顿流体的旋转流动特征的, 着重分析了非牛顿指数的影响及其敏感性。分析结果发现, 这种敏感性具有一定的数值界限。 $n < 1$ 时影响显著。文中的各种结论和结果对于工程应用有一定的参考作用。

## 二、控 制 方 程

幂律非牛顿流体在环管内不定常旋转流满足如下基本方程与定解条件<sup>[3], [4]</sup>。

$$r^{1-n} \frac{\partial \omega^2}{\partial r^2} + \frac{2+n}{r^{2-n}} \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\rho}{k} \left( \left| \frac{\partial \omega}{\partial r} \right| \right)^{1-n} \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$t = 0, \quad \omega = 0, \quad r_i \leq r \leq r_0 \quad (2.2)$$

$$r = r_i, \quad \omega = \omega_0, \quad t > 0 \quad (2.3)$$

$$r = r_0, \quad \omega = 0, \quad t > 0 \quad (2.4)$$

这里,  $\omega$ 为角向速度;  $n$ 为幂律指数;  $\rho$ 为密度;  $k$ 为常数;  $r$ 为极坐标空间变量;  $t$ 为时间;  $r_i$ 为环管内壁半径;  $r_0$ 为环管外壁半径;  $\omega_0$ 为环管内壁处角向速度。

若方程(2.1)中, 因子 $(\partial \omega / \partial r)$ 取定常值, 即它满足如下定解问题:

$$n \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2+n}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 \quad (2.5)$$

$$r = r_1, \quad \omega = \omega_0 \quad (2.6)$$

$$r = r_0, \quad \omega = 0 \quad (2.7)$$

解问题(2.5)~(2.7)有

$$\omega = \omega_0 [(r^{-2/n} - r_0^{-2/n}) / (r_1^{-2/n} - r_0^{-2/n})] \quad (2.8)$$

从而

$$|\partial \omega / \partial r| = (2/n) c_0 r^{-2/n-1} \quad (2.9)$$

其中

$$c_0 = \omega_0 / (r_1^{-2/n} - r_0^{-2/n}) \quad (2.10)$$

将式(2.9)代入方程(2.1)的右端并整理有幂律非牛顿流体旋转流线性化方程

$$r^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + ar \frac{\partial \omega}{\partial r} = br^m \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (2.11)$$

其中,

$$a = (2+n)/n, \quad b = (\rho/kn)(2c_0/n)^{1-n}, \quad m = 4 - 2/n$$

为推算方便, 设

$$x = r/r_1, \quad \tau = t/r_1^m b, \quad \varepsilon = r_0/r_1$$

则有如下形式

$$x^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + ax \frac{\partial \omega}{\partial x} - x^m \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = 0 \quad (2.12)$$

$$\tau = 0, \quad \omega = 0, \quad 1 \leq x \leq \varepsilon \quad (2.13)$$

$$x = 1, \quad \omega = \omega_0, \quad \tau > 0 \quad (2.14)$$

$$x = \varepsilon, \quad \omega = 0, \quad \tau > 0 \quad (2.15)$$

### 三、问 题 求 解

对问题(2.12)~(2.15)施行Laplace变换, 记

$$\bar{\omega} = \int_0^\infty \omega(x, \tau) \exp[-s\tau] d\tau \quad (3.1)$$

则有像函数 $\bar{\omega}$ 的常微分方程

$$x^2 \bar{\omega}'' + ax \bar{\omega}' - x^m s \bar{\omega} = 0 \quad (3.2)$$

$$x = 1, \quad \bar{\omega} = \omega_0/s \quad (3.3)$$

$$x = \varepsilon, \quad \bar{\omega} = 0 \quad (3.4)$$

1. 若 $m=0$ , 即 $n=1/2$ , 则(3.2)式成为

$$x^2 \bar{\omega}'' + ax \bar{\omega}' - s \bar{\omega} = 0 \quad (3.5)$$

此为欧拉方程, 考虑到条件(3.3)和(3.4)有如下解

$$\frac{\bar{\omega}}{\omega_0} = \frac{1}{s} x^{-2} \frac{\varepsilon^\Delta x^{-\Delta} - e^{-\Delta} x^\Delta}{\varepsilon^\Delta - e^{-\Delta}} \quad (3.6)$$

其中:

$$\Delta = \sqrt{4+s}$$

显然, 像函数无支点, 这只要将(3.6)右端分子分母同乘以因子 $\Delta$ , 然后再将它们展成 $\Delta$ 的幂级数就可看出:  $s = -4$ 并非支点. 可能的奇点为因子

$$e^{\Delta} - e^{-\Delta} = 0 \quad (3.7)$$

的根以及  $s=0$ 。若设

$$\Delta = i\lambda_k$$

则可知 (3.7) 为根为

$$\lambda_k = k\pi / \ln e, \quad s_k = -[4 + \lambda_k^2] \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

根据 Laplace 反演定律和留数计算法则, 我们可以获得 (3.6) 式的反演, 给出问题 (2.12)、(2.13)、(2.14) 和 (2.15) 的解。

即当  $m=0$  或  $n=1/2$  时

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{x^{-4} - e^{-4}}{1 - e^{-4}} - x^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \{ \exp(s_k \tau) \cdot G(s_k) \} \quad (3.8)$$

其中

$$G(s_k) = \frac{2k\pi \sin(\lambda_k \ln x)}{(4 + \lambda_k^2) \ln e}$$

2. 若  $m \neq 0$ , 令

$$\xi = \frac{2}{m} \sqrt{s} x^{m/2}, \quad \bar{\omega} = x^{1-n/2} U(\xi)$$

则 (3.2) 变为

$$\xi^2 U'' + \xi U' - (v^2 + \xi^2) U = 0 \quad (3.9)$$

其中

$$v = \frac{1}{1-2n}$$

此为 Bessel 方程, 有通解

$$U = c_1 I_\nu(\xi) + c_2 K_\nu(\xi) \quad (3.10)$$

回代各变量有像函数解如下:

$$\frac{\bar{\omega}}{\omega_0} = \frac{1}{s} x^{-1/n} \left[ \frac{I_\nu(\eta_s x^{m/2}) K_\nu(\eta_s e^{m/2}) - K_\nu(\eta_s x^{m/2}) I_\nu(\eta_s e^{m/2})}{\Delta_s} \right] \quad (3.11)$$

这里:

$$\Delta_s = I_\nu(\eta_s) K_\nu(\eta_s e^{m/2}) - K_\nu(\eta_s) I_\nu(\eta_s e^{m/2}) \quad (3.12)$$

$$\eta_s = \frac{2}{m} \sqrt{s}$$

同前, 只要稍加整理, 可发现 (3.11) 的分子分母均可展成  $\eta_s$  的偶次幂级数, 从而  $s=0$  非支点, 可能的奇点为

$$\Delta_s = 0 \quad (3.13)$$

的根且  $s=0$ 。

设

$$\eta_s = \frac{2}{m} \sqrt{s} = i\eta$$

可知式

$$Y_\nu(\eta)J_\nu(\eta e^{m/2}) - J_\nu(\eta)Y_\nu(\eta e^{m/2}) = 0 \quad (3.14)$$

与式 (3.13) 有同根。设为

$$\eta_k \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

则根据 Laplace 反演定律和留数计算法则, 我们获得 (3.11) 式的反演, 给出问题 (2.12) ~ (2.15) 的解。

即当  $m \neq 0$  时

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{x^{-2/n} - \varepsilon^{-2/n}}{1 - \varepsilon^{-2/n}} - \pi x^{-1/n} \sum_{k=1}^{\infty} \exp[s_k \tau] H(s_k) \quad (3.15)$$

其中

$$H(s_k) = \frac{J_\nu(\eta_x)Y_\nu(\eta_\varepsilon) - Y_\nu(\eta_x)J_\nu(\eta_\varepsilon)}{Y_\nu(\eta_\varepsilon)/Y_\nu(\eta) - J_\nu(\eta)/J_\nu(\eta_\varepsilon)} \quad (3.16)$$

$$\eta = (2/m)\sqrt{-s_k}, \quad \eta_x = \eta x^{m/2}, \quad \eta_\varepsilon = \eta e^{m/2}$$

$$m = 4 - 2/n, \quad \nu = 1/(1 - 2/n)$$

$s_k$  是下列方程的第  $k$  个根,  $k=1, 2, 3, \dots$

$$Y_\nu(\eta)J_\nu(\eta_\varepsilon) - J_\nu(\eta)Y_\nu(\eta_\varepsilon) = 0$$

式 (3.8) 和 (3.15) 即为问题 (2.12) ~ (2.15) 的完整的解析解。

#### 四、计算结果与分析

图1是环管内沿半径方向, 某一时刻  $\tau=0.05$  的速度分布图,  $n < 1$ . 曲线向下凹, 表明随着靠近外壁, 速度是锐减着的。

图2是环管中部一点处速度的变化曲线。随着时间延续, 该点速度达到它的最大值——稳定时的值。

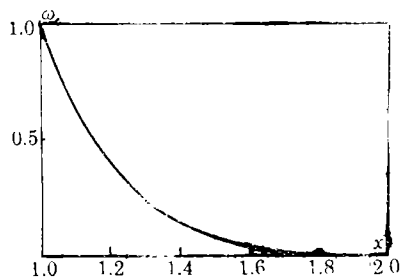


图1  $\omega$  分布曲线 ( $n=0.87, \tau=0.05, \varepsilon=2.0$ )

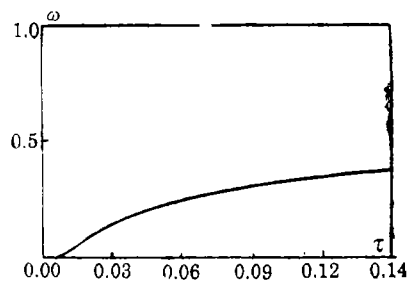


图2  $\omega$  变化曲线 ( $n=0.87, x=1.30, \varepsilon=2.0$ )

图3是  $n > 1$  时环管内速度分布曲线, 与图1比较, 无明显差别。这种现象可用图4来说明。图4是固定点固定时刻速度随指数  $n$  的变化趋势。当  $n < 1$  时, 它的影响是显著的。当  $n > 1$  时,  $n$  变化引起的差别无实际意义。

#### 五、结 语

幂律指数对非牛顿环管旋转流的影响依赖于  $n$  的数值区段。  $n < 1$  时影响显著,  $n > 1$  时非

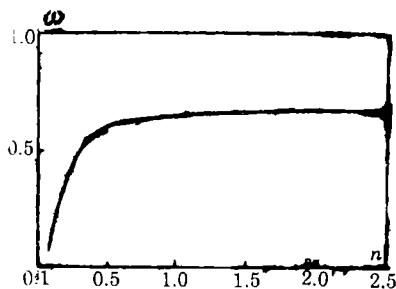
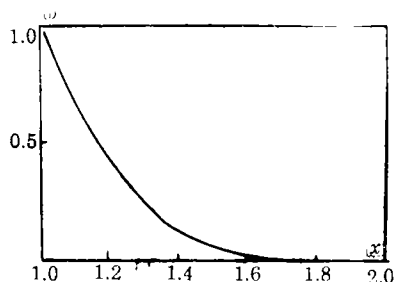


图3  $\omega$ 分布曲线( $n=1.35, \tau=0.05, \varepsilon=2.0$ )      图4  $\omega$ 与 $n$ 的关系曲线( $\tau=0.05, x=1.10, \varepsilon=2.0$ )

牛顿流用牛顿流体的解代替误差不会太大, 见图4. 本文解的形式是简洁的, 可对有关的工程设计提供一种便利的手段。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 朱文辉、刘慈群, 二阶非牛顿流体不定常环管流解析解, 应用数学和力学, 14(3) (1993), 195—201.
- [ 2 ] 朱文辉、刘慈群, Maxwell流体环管不定常流动解析解, 力学学报, 24(1) (1992), 1.
- [ 3 ] 韩式方、韩飞宇, 非牛顿流体环管内不定常流动研究, 《流变学进展》, (Ⅵ), 成都科技大学出版社 (1987).
- [ 4 ] 陈文芳, 《非牛顿流体力学》, 科学出版社 (1984).

## Unsteady Rotative Flow of Non-Newtonian Fluid in an Annular Pipe

Huang Jun-qi

(Department of Resources and Environment Sciences, Beijing  
Normal University, Beijing, 100875)

Liu Ci-qun

(Institute of Porous Flow and Fluids Mechanics, Academia Sinica, Lanzhou, 102801)

### Abstract

This paper studies power law non-Newtonian fluid rotative flow in an annular pipe. The governing equation is nonlinear one. We linearized the governing equation by assuming that partial factor is at steady state. With Laplace transform we obtain an analytical solution of the problem. In the paper, several groups of curves are given; these curves reflect the temporal change law and spatial distribution of fluid velocity. In addition, we study the effect of power law index on the flow field. The result indicates that when the power law index  $n < 1$ , the

flow velocity is highly sensitive to the index, and this fact is important in related engineering decisions.

**Key words:** non-Newtonian power law fluid, annular pipe rotative flow, integral transform, approximate solution